

УДК 629.7.01, 629.76

doi: 10.18698/0536-1044-2022-2-94-104

# Приближенная методика проектировочного баллистического расчета двухступенчатых ракет-носителей

Л.П. Мухамедов<sup>1</sup>, Д.А. Кириевский<sup>2</sup>

<sup>1</sup> МГТУ им. Н.Э. Баумана

<sup>2</sup> АО «ГКНПЦ имени М.В. Хруничева»

## Approximate Methodology for Design Ballistic Calculation of Two-Stage Launch Vehicles

L.P. Muhamedov<sup>1</sup>, D.A. Kirievskiy<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Bauman Moscow State Technical University

<sup>2</sup> AO Khrunichev State Research and Production Space Center

В связи с проблемами освоения дальнего космоса и создания низкоорбитальных спутниковых группировок с малыми космическими аппаратами заметно выросла актуальность задач проектной баллистики ракет-носителей. Самым рентабельным способом доставки малых спутников на целевые орбиты является их выведение с помощью двухступенчатых ракет-носителей сверхлегкого класса, работающих на жидких компонентах топлива. Для решения задач проектной баллистики двухступенчатой ракеты-носителя расширена ранее разработанная методика проектировочного баллистического расчета для ее первой ступени. Проработаны вопросы аналитического определения потерь характеристической скорости последней ступени многоступенчатой ракеты-носителя. Предложена приближенная методика проектировочного баллистического расчета на активном участке траектории двухступенчатой ракеты-носителя при выведении полезной нагрузки на низкую опорную орбиту с произвольным наклоном. Работоспособность методики продемонстрирована на конкретном примере выведения полезной нагрузки на круговую полярную орбиту.

**Ключевые слова:** методика проектировочного баллистического расчета, задачи проектной баллистики, проектно-баллистические параметры, ракета-носитель, потери характеристической скорости

At the initial stage of building new models of rocket and space systems, so-called design ballistic calculations are usually performed. Due to the problems of deep space exploration and the creation of low-orbit satellite constellations with small spacecraft, the relevance of the tasks of design ballistics of launch vehicles has noticeably increased. The most cost-effective way to deliver small satellites to target orbits is to launch them using two-stage ultra-light launch vehicles powered by liquid propellants. To solve the problems of design ballistics of a two-stage launch vehicle, we expanded the technique of design ballistic calculation of the first stages of launch vehicles and tackled the problems of analytical determination of the characteristic velocity losses of the last stages of multistage launch vehicles. As a result, we introduce an approximate method for ballistic design calculation on the active part of the trajectory of two-stage launch vehicles when the payload is injected into a low Earth orbit with an arbitrary inclination. The paper considers the application of the developed technique on a specific example of injecting a payload into a circular polar orbit.

**Keywords:** design ballistic calculation method, design ballistics problems, design ballistic parameters, launch vehicle, characteristic velocity losses

В связи с проблемами освоения дальнего космоса [1–8] и создания низкоорбитальных спутниковых группировок с малыми космическими аппаратами [9–12] все более актуальными становятся задачи проектной баллистики ракет-носителей (РН). Наиболее рентабельным способом доставки малых спутников на целевые орбиты является их выведение с помощью двухступенчатых РН сверхлегкого класса, работающих на жидких компонентах топлива.

Цель работы — создание методики проективно-баллистического расчета двухступенчатых РН сверхлегкого класса, предназначенных для доставки полезной нагрузки с поверхности Земли на целевые орбиты.

Проектирование РН, как любой сложной технической системы, представляет собой длительный многоэтапный итерационный процесс. Поэтому на начальном этапе разработки новых образцов РН возникает потребность в универсальных проективно-баллистических расчетах [13–19], обеспечивающих совместно с уравнениями массового анализа выбор наилучшего сочетания проектно-баллистических параметров (ПБП), которые в дальнейшем используют в качестве исходных данных в задачах оптимизации более высокого уровня. Под ПБП следует понимать минимальную совокупность относительных параметров, однозначно определяющих траекторию РН.

Конечные результаты будем представлять в аналитической форме, так как применение высокоточных методов на данном этапе разработок малоэффективно, что объясняется следующими причинами. Во-первых, несмотря на высокое быстродействие современных компьютеров, использование программных средств и алгоритмов высокого уровня может привести к неоправданным временным и материальным затратам. Во-вторых, применение методов численного интегрирования в сложном алгоритме оптимизации может сопровождаться потерей контроля проектантом за процессом выбора наиболее рационального решения.

Таким образом, методика проективно-баллистического расчета должна обеспечивать в аналитической форме взаимосвязь параметров движения и ПБП двухступенчатой РН, не прибегая к громоздким выкладкам и численному интегрированию.

Для первых ступеней (ПС) РН имеем пять независимых ПБП.

*Относительная конечная масса ПС*

$$\mu_{к1} = \frac{m_{к1}}{m_0},$$

где  $m_{к1}$  — конечная масса ПС;  $m_0$  — стартовая масса РН.

*Удельный импульс тяги двигательной установки ПС в пустоте*

$$I_{н1} = \frac{P_{н1}}{\dot{m}_1}.$$

Здесь  $P_{н1}$  — суммарная пустотная тяга двигательной установки ПС с учетом потерь характеристической скорости на управление;  $\dot{m}_1$  — абсолютное постоянное значение массового секундного расхода топлива,

$$\dot{m}_1 = -m_0 \frac{d\mu}{dt},$$

где  $\mu$  — относительная текущая масса ПС;  $t$  — время полета.

*Коэффициент увеличения удельного импульса тяги в пустоте*

$$k_p = \frac{P_{н1}}{P_0} = \frac{I_{н1}}{I_0},$$

где  $P_0$  — суммарная тяга двигательной установки ПС у поверхности Земли с учетом потерь на органы управления;  $I_0$  — земной удельный импульс тяги.

*Стартовая нагрузка на тягу или коэффициент тяговооруженности*

$$v_0 = \frac{m_0 g_0}{P_0} = \frac{m_0 g_0 k_p}{P_{н1}},$$

где  $g_0 = 9,81 \text{ м/с}^2$  — осредненное по поверхности Земли ускорение свободного падения.

*Баллистический коэффициент*

$$\sigma = \frac{m_0}{S_M c_{x_{\max}}},$$

где  $S_M$  — площадь миделева сечения ракеты, проходящая по корпусу силового блока;  $c_{x_{\max}}$  — максимальное значение коэффициента силы лобового сопротивления РН при нулевом угле атаки, числе Маха  $M = 1,07$  и высоте полета  $h = 7 \text{ км}$ .

Для вторых ступеней (ВС) РН имеем три независимых ПБП.

*Относительная конечная масса ВС*

$$\mu_{к2} = m_{к2}/m_{02},$$

где  $m_{к2}$  и  $m_{02}$  — конечная и стартовая масса ВС.

Удельный импульс тяги двигательной установки ВС в пустоте

$$I_{п2} = \frac{P_{п2}}{\dot{m}_2},$$

где  $P_{п2}$  — суммарная пустотная тяга двигательной установки ВС с учетом потерь характеристической скорости на управление;  $\dot{m}_2$  — массовый секундный расход топлива ВС,

$$\dot{m}_2 = -m_{02} \frac{d\mu}{dt}.$$

Стартовая нагрузка на тягу или коэффициент тяговооруженности ВС

$$v_{п2} = \frac{m_{02} g_0}{P_{п2}}.$$

В качестве ПБП также будем рассматривать характеристические (идеальные) скорости ПС  $v_{хар1}$  и ВС  $v_{хар2}$ :

$$v_{хар1} = -I_{п1} \ln \mu_{к1}; \quad v_{хар2} = -I_{п2} \ln \mu_{к2}.$$

**Методика расчета.** При выводе уравнений движения РН на активном участке траектории (АУТ) использованы следующие допущения:

- Земля — сферическая, поле ее тяготения — центральное;
- движение относительно центра масс не рассматривается;
- управление — идеальное, а управляющие усилия по сравнению с силой тяги пренебрежимо малы;
- траектория РН лежит в плоскости орбиты выведения, проходящей через центр Земли;
- траектория РН зависит от атмосферы только на АУТ ПС;
- влияние окружной скорости Земли на траекторные переменные учтено введением формул пересчета относительной скорости РН во вращающейся системе координат в абсолютную;
- подъемная сила не влияет на закон управления.

В полете на РН действуют:

- сила тяги двигательной установки  $P$ , вектор которой направлен по продольной оси РН;
- сила тяжести  $G = mg$ , направленная к центру масс Земли, где  $m$  — текущая масса РН в рассматриваемый момент времени;  $g$  — ускорение свободного падения,  $g = \mu_{\oplus} / r^2$  ( $\mu_{\oplus}$  — константа поля тяготения Земли, принятая равной  $398\,600 \text{ км}^3/\text{с}^2$ ;  $r$  — радиус-вектор);

- сила аэродинамического сопротивления  $X_{аэр}$ , действующая в направлении, обратном направлению вектора скорости РН.

Угловое положение РН характеризуется программным углом тангажа  $\varphi_{пр}(t)$  — углом между линией стартового горизонта и осью РН.

При формировании системы уравнений движения использованы следующие системы координат (рис. 1):

- *стартовая* — с началом координат  $O_c$ ;
- *сферическая* — с началом координат в центре Земли  $F$ ; радиальная координата центра масс обозначена через  $r$ , угловая (полярный угол) — через  $\eta$ ;
- *связанная* — с началом координат в центре масс РН; ось  $OX_1$  направлена по продольной оси РН, ось  $OY_1$  перпендикулярна ей;
- *скоростная* — с началом в центре масс РН; ось  $OX$  направлена по вектору скорости  $v$ , ось  $OY$  перпендикулярна ей и лежит в плоскости траектории.

В общем случае продольная ось РН не совпадает с направлением вектора скорости РН, поэтому справедливо соотношение

$$\theta = \varphi_{пр}(t) + \eta - \alpha,$$

где  $\theta$  — угол наклона вектора скорости РН к местному горизонту (траекторный угол);  $\alpha$  — угол атаки (угол между направлением вектора скорости и осью РН).

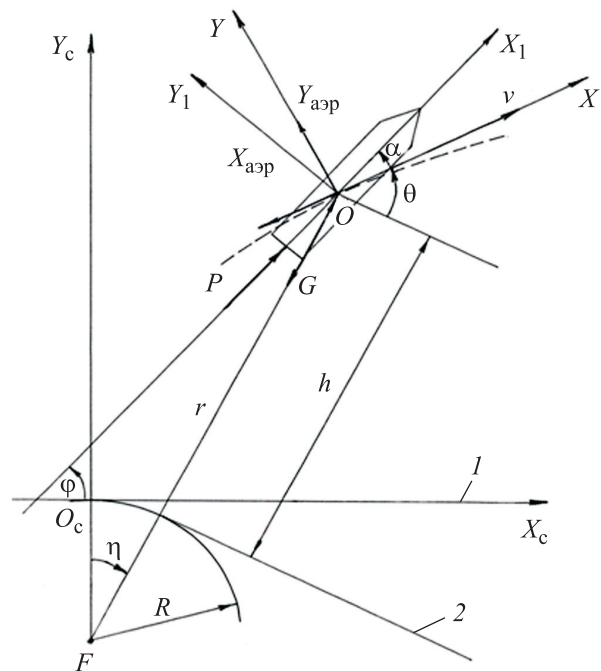


Рис. 1. Схема движения РН на АУТ:  
1 — стартовый горизонт; 2 — местный горизонт

С учетом принятых допущений система уравнений движения РН в сферической скоростной системе координат (с началом в центре Земли  $F$ ) запишется как (см. рис. 1)

$$m\dot{v} = P \cos \alpha - X_{\text{аэп}} - mg \sin \theta; \tag{1}$$

$$\begin{aligned} \frac{mv^2}{\rho} &= vm\dot{\theta} = P \sin \alpha + Y_{\text{аэп}} - \\ &- mg \cos \theta + \frac{mv^2}{r} \cos \theta, \tag{2} \\ \dot{h} &= v \sin \theta; \quad h = r - R, \end{aligned}$$

где  $v$  — скорость полета РН;  $Y_{\text{аэп}}$  — подъемная аэродинамическая сила;  $\rho$  — мгновенный радиус кривизны траектории;  $r$  — радиальная координата центра масс;  $R$  — средний радиус Земли,  $R = 6371$  км.

Проведем анализ составляющих, входящих в состав уравнений (1) и (2), и представим их в функции ПБП. Рассмотрим составляющие системы уравнений движения ПС.

*Сила тяги ПС*

$$P_1 = P_{\text{пл}} \left( 1 - \frac{k_p - 1}{k_p} \frac{p_h}{p_0} \right),$$

где  $P_{\text{пл}} = I_{\text{пл}} \dot{m}_1$ ;  $p_h$  — атмосферное давление на высоте  $h$ ;  $p_0$  — атмосферное давление у поверхности Земли.

*Время конца АУТ ПС*

$$t_1 = \frac{v_0 I_{\text{пл}}}{k_p g_0} (1 - \mu_{\text{кл}}).$$

*Сила лобового сопротивления*

$$X_{\text{аэп}} = c_x \frac{\rho_h v^2}{2} S_M = c_x q S_M,$$

где  $c_x$  — аэродинамический коэффициент силы лобового сопротивления;  $\rho_h$  — плотность воздуха, являющаяся функцией высоты полета  $h$ ;  $q$  — скоростной напор,  $q = \rho_h v^2 / 2$ .

Коэффициент  $c_x$  представим как  $c_x = \bar{c}_x c_{x_{\text{max}}}$ , где  $\bar{c}_x$  — безразмерный коэффициент

Таблица 1

**Универсальная зависимость безразмерного коэффициента лобового сопротивления от числа Маха**

М	$\bar{c}_x$	М	$\bar{c}_x$	М	$\bar{c}_x$
0,30	0,47	1,07	1,00	3,00	0,50
0,80	0,62	1,20	0,96	5,00	0,35
1,00	0,92	2,00	0,65	10,00	0,34

лобового сопротивления. Универсальная зависимость безразмерного коэффициента лобового сопротивления  $\bar{c}_x$  от числа Маха  $M$  [18–20] приведена в табл. 1.

При интегрировании системы дифференциальных уравнений движения ПС РН численным методом в качестве программы использован закон изменения программного угла атаки, предложенный в работах [14, 18]:

$$\alpha_{\text{пр}} = \begin{cases} 0 & \text{при } t_b \geq t; \\ \alpha_{\text{max}} K(K-2) & \text{при } t \geq t_b \text{ и } M \leq 0,8; \\ 0 & \text{при } M > 0,8, \end{cases}$$

где  $t_b$  — время окончания вертикального подъема РН;  $\alpha_{\text{max}}$  — максимальное значение угла атаки;  $K = 2 \exp [5,33(M_b - M)]$ ,  $M_b$  — число Маха, соответствующее времени  $t_b$ , определяемое из условия  $\mu_b = 0,95$  ( $\mu_b$  — относительная конечная масса этапа вертикального полета) [13].

Время окончания вертикального подъема РН

$$t_b = 0,05 I_{\text{пл}} \frac{v_0}{k_p g_0}.$$

Выражая правые части системы уравнений (1) и (2) через ПБП, получаем

$$\begin{cases} \dot{v} = \frac{g_0 k_p}{v_0 \mu} \cos \alpha - g \sin \theta - \frac{\bar{c}_x q}{\sigma \mu} - \frac{g_0 (k_p - 1)}{v_0 \mu k_p} \frac{p_h}{p_0}; \\ \dot{\theta} = \frac{1}{v} \left[ \frac{g_0 k_p}{v_0 \mu} \left( 1 - \frac{k_p - 1}{k_p} \frac{p_h}{p_0} \right) \sin \alpha - g \cos \theta + \frac{v^2}{r} \cos \theta \right]; \\ \dot{h} = v \sin \theta; \quad \dot{\mu} = -\frac{g_0 k_p}{v_0 I_{\text{пл}}}, \end{cases}$$

где  $\alpha = \alpha_{\text{пр}}(t)$ ;  $g = g(h)$ ;  $\bar{c}_x = \bar{c}_x(M)$ ;  $p_h = p_h(h)$ .

Анализ характера изменения траекторных переменных позволил выявить некоторые общие закономерности, использованные в дальнейшем при выводе расчетных формул приближенной методики проектировочного баллистического расчета.

Во-первых, движение ПС РН на АУТ независимо от класса, конструктивно-компоновочной схемы и ПБП осуществляется с вертикальным ускорением  $a_y = \dot{v} \sin \theta$ , близким к его постоянному осредненному значению [17–19]

$$a_{y \text{ ср}} \approx g_0 \left( \frac{1,09}{v_0} - 1 \right).$$

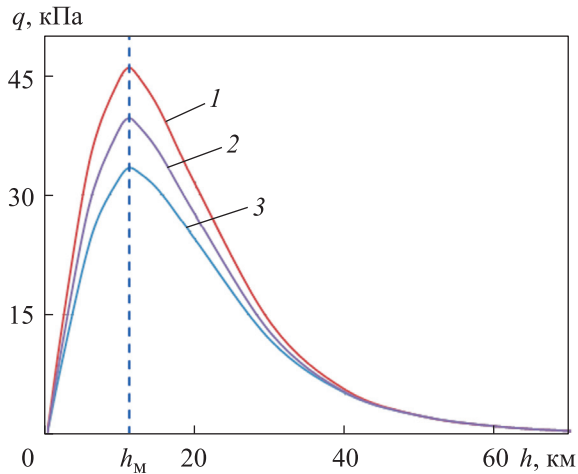


Рис. 2. Зависимость скоростного напора  $q$  от высоты полета  $h$  ПС РН на топливе кислород + керосин при различных значениях коэффициента тяговооруженности и траекторного угла:

- 1 —  $v_0 = 0,65$ ,  $\theta_M = 50,5^\circ$ ;  
 2 —  $v_0 = 0,70$ ,  $\theta_M = 52,0^\circ$ ;  
 3 —  $v_0 = 0,75$ ,  $\theta_M = 53,5^\circ$

Во-вторых, скоростной напор достигает максимального значения приблизительно на одной и той же высоте  $h_m = 11\,000$  м независимо от ПБП и программы полета [17–19].

На рис. 2 приведены зависимости скоростного напора  $q$  от высоты полета ПС РН на топливе кислород + керосин при различных значениях коэффициента тяговооруженности  $v_0$  и траекторного угла, соответствующего максимуму скоростного напора  $\theta_M$ .

Время  $t_m$  и массу ПС  $\mu_m$ , соответствующие максимальному скоростному напору, представим как

$$t_m = \sqrt{\frac{2h_m}{g_0 \left( \frac{1,09}{v_0} - 1 \right)}}; \quad \mu_m = \frac{k_p g_0 t_m}{I_{\text{пл}} v_0}.$$

При построении аналитических соотношений используем вместо программы  $\varphi_{\text{пр}}(t)$  зависимость программного траекторного угла  $\theta_{\text{пр}}$  от времени полета  $t$ .

В этом случае система уравнений движения ПС РН приобретает вид

$$\begin{cases} \dot{v} = \frac{g_0 k_p}{v_0 \mu} \cos \alpha - g \sin \theta - \frac{\bar{c}_x q}{\sigma \mu} - \frac{g_0 (k_p - 1)}{v_0 \mu k_p} \frac{p_h}{p_0}; \\ \dot{h} = v \sin \theta; \quad \dot{\mu} = -\frac{g_0 k_p}{v_0 I_{\text{пл}}}, \end{cases}$$

где  $g = g(h)$ ;  $\bar{c}_x = \bar{c}_x(M)$ ;  $p_h = p_h(h)$ ;  $\theta = \theta_{\text{пр}}(t)$ .

Зависимость  $\theta_{\text{пр}}(t)$  удобно представить в форме степенной функции [17–19]:

$$\theta_{\text{пр}} = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{при } t \leq t_B; \\ \theta_1 + \left( \frac{\pi}{2} - \theta_1 \right) \left( \frac{t_1 - t_M}{t_1 - t_B} \right)^n & \text{при } t_B \leq t \leq t_1, \end{cases} \quad (3)$$

где  $t_1$  — время конца активного участка ПС;  $\theta_1$  — угол наклона траектории, соответствующий моменту времени  $t_1$ ;  $n = (0,59 + 0,000125 \Delta v_{\text{хар1}})(v_0)^{-0,8}$ ,  $\Delta v_{\text{хар1}}$  — потери характеристической скорости ПС РН.

В выражении (3)

$$n = \begin{cases} 1,1 & \text{при } (0,59 + 0,000125 \Delta v_{\text{хар1}})(v_0)^{-0,8} < 1,1; \\ 2,0 & \text{при } (0,59 + 0,000125 \Delta v_{\text{хар1}})(v_0)^{-0,8} > 2,0. \end{cases}$$

Интегрируя первое уравнение системы (3) в интервале  $0 \dots t_k$  при условии  $\cos \alpha = 1$ , получаем

$$v_k = -I_{\text{пл}} \int_1^{\mu_{k1}} \frac{d\mu}{\mu} - \int_0^{t_k} g \sin \theta dt - \int_0^{t_k} \frac{c_x q S_M}{m_0 \mu} dt + I_{\text{пл}} \frac{k_p - 1}{k_p} \int_1^{\mu_{k1}} \frac{p_h}{p_0} \frac{1}{\mu} d\mu. \quad (4)$$

Нередко выражение (4) представляют в виде

$$v_k = v_{\text{хар}} - \Delta v_g - \Delta v_a - \Delta v_p,$$

где  $v_{\text{хар}}$ ,  $\Delta v_g$ ,  $\Delta v_a$  и  $\Delta v_p$  — характеристическая скорость РН и ее потери на гравитацию, преодоление сопротивления атмосферы (далее потери на аэродинамику) и противодействие соответственно.

Представим выражение для гравитационных потерь ПС РН в виде двух слагаемых:

$$\Delta v_{g1} = \int_0^{t_M} g \sin \theta dt + \int_{t_M}^{t_1} g \sin \theta dt.$$

Для определения гравитационных потерь предлагается использовать следующую расчетную зависимость:

$$\Delta v_{g1} = g_0 t_M (0,76 + 0,24 \sin \theta_M) + g_{\text{ср}} (t_1 - t_M) \times [k_g \sin \theta_M + (1 - k_g) \sin \theta_1],$$

где  $k_g = 0,5 - 0,08(v_{\text{хар1}}/2400 - 1)$ ;  $g_{\text{ср}}$  — осредненное ускорение свободного падения,

$$g_{\text{ср}} = 9,65 \text{ м/с}^2.$$

Потери характеристической скорости на аэродинамику представим в виде

$$\Delta v_a = \int_0^{t_1} \frac{c_x q S_M}{m_0 \mu} = \frac{q_{\max} t_M}{\sigma} \int_0^{t_1/t_M} \frac{\bar{q} \bar{c}_x}{\mu} d\xi, \quad (5)$$

где  $q_{\max}$  — максимальный скоростной напор;  $\bar{q}$  — относительный скоростной напор;  $\xi$  — независимая безразмерная координата.

Как показали результаты предварительных расчетов, безразмерный интеграл в выражении (5) слабо зависит от проектно-баллистических параметров. Поэтому при построении расчетной зависимости, определяющей  $\Delta v_a$ , он может быть представлен постоянной величиной.

Кроме того, будем считать, что вертикальное ускорение  $a_y = \text{const}$  и  $h_M = 11\,000$  м. В этом случае произведение  $q_{\max} t_M$  в выражении (5) становится прямо пропорциональным квадратному корню из вертикального ускорения  $a_y$  и обратно пропорциональным квадрату синуса траекторного угла  $\theta_M$ .

Окончательное выражение для потерь характеристической скорости на аэродинамику запишем как

$$\Delta v_a = \frac{A}{\sigma \sin^2 \theta_M} \sqrt{\frac{1,09}{v_0} - 1},$$

где  $A$  — статистический коэффициент,  $A = 1,8 \cdot 10^6$  кг/(м·с).

Согласно формуле (3), выражение для определения траекторного угла  $\theta_M$  представим в виде степенной функции

$$\theta_M = \theta_1 + \left( \frac{\pi}{2} - \theta_1 \right) \left( \frac{t_1 - t_M}{t_1 - t_B} \right)^n.$$

Потери характеристической скорости на противодействие

$$\Delta v_p = -I_{п1} \frac{k_p - 1}{k_p} \int_1^{\mu_{к1}} \frac{p_h}{p_0} \frac{1}{\mu} d\mu. \quad (6)$$

С учетом того, что безразмерный интеграл в выражении (6) в основном зависит от коэффициента тяговооруженности, запишем

$$\Delta v_p = 0,48 I_{п1} \frac{k_p - 1}{k_p} v_0^{1,65}.$$

Для определения высоты полета в конце АУТ ПС РН используем гипотезу движения с постоянным вертикальным ускорением [18]:

$$h_1 = h_M + 0,5(t_1 - t_M)(v_M \sin \theta_M + v_1 \sin \theta_1) \times \left( \frac{1 + \mu_{к1}}{1 + \sin \theta_1} \right)^{0,65},$$

где

$$v_M = -I_{п1} \ln \mu_M - g_0 t_M (0,76 + 0,24 \sin \theta_M) - 0,66 \Delta v_a - 0,9 \Delta v_p.$$

Систему уравнений движения ВС в функциях ПБП на АУТ запишем следующим образом:

$$\begin{cases} \dot{v} = \frac{g_0}{v_{п2} \mu} \cos \alpha - g \sin \theta; \\ \dot{\theta} = \frac{1}{v} \left( \frac{g_0}{v_{п2} \mu} \sin \alpha - g \cos \theta + \frac{v^2}{r} \cos \theta \right); \\ \dot{h} = v \sin \theta; \quad \theta = \varphi + \eta - \alpha; \quad \dot{\mu} = -\frac{g_0}{v_{п2} I_{п2}}; \\ g = \frac{\mu_{\oplus}}{r^2}; \quad \frac{v^2}{r} \cos \theta = v \dot{\eta}; \quad \varphi = \varphi_{пр}(t). \end{cases} \quad (7)$$

Приращение времени полета на АУТ ВС имеет вид

$$\Delta t_2 = \frac{v_{п2} I_{п2}}{g_0} (1 - \mu_{к2}).$$

При проведении расчетов численным методом в качестве программы использован угол тангажа

$$\varphi_{пр}(t) = \varphi_n + \dot{\varphi} t,$$

где  $\varphi_n$  — начальное значение угла тангажа.

Зависимость пересчета относительной скорости  $v$  (во вращающейся системе координат) в абсолютную  $v_{абс}$  получена из сферических треугольников, сторонами которых являются составляющие скоростей [14]:

$$v_k^2 = v_{абс}^2 + v_c^2 - 2v_{абс} v_c \frac{\cos i}{\cos \varphi_c},$$

где  $\varphi_c$  — широта точки старта;  $v_c$  — скорость вращения Земли в точке старта;  $i$  — наклонение орбиты.

Терминальные (конечные) условия:

$$\begin{aligned} v_{абс} &= v_{лк}^{HOO}; \\ h_k &= h^{HOO}; \quad \theta_k = 0, \end{aligned}$$

где  $v_{лк}^{HOO}$  — скорость движения РН на круговой низкой опорной орбите (НОО);  $h^{HOO}$  — высота НОО;  $\theta_k$  — угол наклона траектории в конце полета.

Как уже отмечалось, для решения задач проектной баллистики требуются универсальные быстрые алгоритмы, не требующие значитель-

ного машинного времени. Анализ большого числа результатов проектно-баллистических расчетов, проведенных численным методом, позволил построить структуру приближенных аналитических соотношений для определения гравитационных потерь.

Если считать, что  $g = \text{const}$ , то

$$\Delta v_{g2} = \int_{t_1}^{t_k} g \sin \theta dt \approx g_{cp2} \Delta t_2 \sin \theta_{cp2},$$

где  $g_{cp2}$  — осредненное значение ускорения свободного падения на активном участке траектории ВС;  $\theta_{cp2}$  — осредненное значение угла наклона траектории ВС.

Выражения для определения  $g_{cp2}$  и  $\sin \theta_{cp2}$  можно аппроксимировать следующими зависимостями:

$$g_{cp2} = 0,32g_1 + 0,68g_k;$$

$$\sin \theta_{cp2} = \frac{C_\theta (h_k - h_1)}{\Delta t_2 (0,83v_1 + 0,17v_k)},$$

где  $g_1$  и  $g_k$  — ускорение свободного падения в начальный и конечный момент времени;  $C_\theta$  — дополнительный множитель;  $v_1$  и  $v_k$  — начальная и конечная скорость РН.

Дополнительный множитель

$$C_\theta = (0,78 + 1,1 \sin \theta_1) \left( \frac{v_1}{v_{xap2}} \right)^{0,1} v_{п2}^{0,17}.$$

Потери характеристической скорости ВС РН на углы атаки [17]

$$\Delta v_{\alpha 2} = \Delta v_{xap2} (1 - \cos \alpha_{cp2}) \approx \Delta v_{xap2} [1 - \cos(\arcsin \alpha_{cp2})],$$

где  $\alpha_{cp2}$  — осредненное значение угла атаки ВС.

Для определения структуры формулы, определяющей  $\sin \alpha_{cp2}$ , представим второе уравнение системы (7) как

$$v\dot{\theta} = \dot{v}_\theta = \dot{v}_{xap} \sin \alpha - g(1 - \bar{v}) \cos \theta. \quad (8)$$

Здесь  $\dot{v}_\theta$  — нормальное к траектории ускорение центра масс РН;  $\bar{v}$  — относительное переносное ускорение,

$$\bar{v} = (v_k / v_{1к})^2,$$

где  $v_{1к}$  — первая космическая скорость РН.

Согласно уравнению (8), выражение для синуса осредненного угла атаки при выведении полезной нагрузки на круговую орбиту имеет вид

$$\sin \alpha_{cp2} = \frac{\Delta t_2 g_{cp2} (1 - \bar{v})_{cp2} - C_\alpha v_1 \sin \theta_1}{\Delta v_{xap2}}, \quad (9)$$

где  $(1 - \bar{v})_{cp2}$  — относительное переносное ускорение;  $C_\alpha$  — коэффициент, учитывающий погрешности аппроксимации выражения (9), а также влияние начальной скорости РН  $v_1$  и параметра  $v_{п2}$  на  $\sin \alpha_{cp2}$ ,

$$C_\alpha = \left[ 4,5(\sin \theta_1 - 0,07) + 2,1 \frac{v_1 - 3300}{3300} \right] v_{п2}^{-1,2}. \quad (10)$$

Если  $v_{п2} \leq 1$ , то необходимо принять в выражении (10)  $v_{п2} = 1$ .

Относительное переносное ускорение  $(1 - \bar{v})_{cp2}$  для последней ступени РН имеет вид

$$(1 - \bar{v})_{cp2} = 0,55(1 - \bar{v})_1 + 0,45(1 - \bar{v})_к.$$

Если в качестве первой космической скорости  $v_{1к}$  рассматривать скорость движения РН

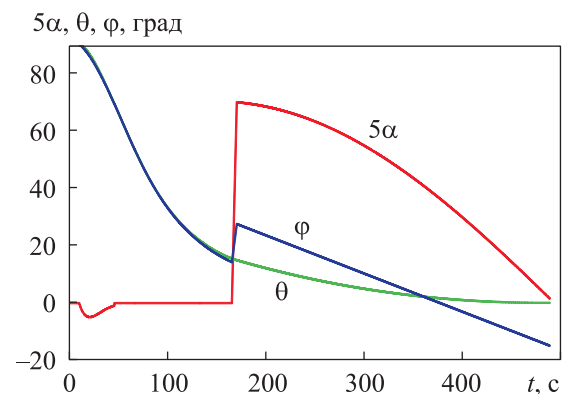


Рис. 3. Зависимость углов тангажа, атаки и наклона вектора скорости к местному горизонту для АУТ двухступенчатой РН от времени ее полета

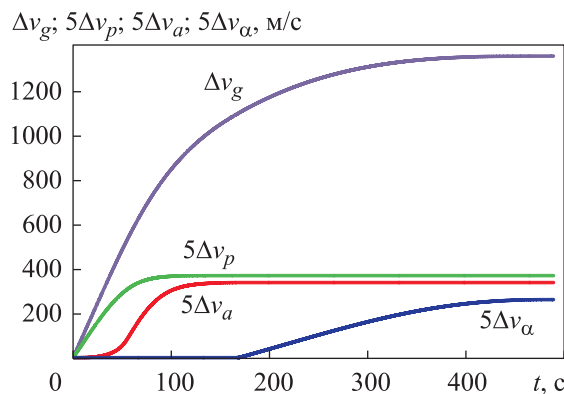


Рис. 4. Зависимость потерь характеристической скорости на гравитацию, аэродинамику, противодавление и углы атаки для АУТ двухступенчатой РН от времени ее полета

Таблица 2

**Параметры движения двухступенчатой РН, полученные методом численного интегрирования дифференциальных уравнений**

Этап движения РН	Время полета, с	Скорость полета, м/с	Высота полета, км	Траекторный угол, град	Угол атаки, град	Скоростной напор, Па (кгс/м <sup>2</sup> )
Старт	0	0	0,1	90	0	0
Достижение максимального скоростного напора	65,7	442,7	11,0	54,08	0	35803,1 (3650,9)
Разделение ступеней	165,5	3265,9	72,3	15,47	0	314,8 (32,1)
Движение через 5 с после разделения ступеней	170,5	3293,8	76,6	14,91	13,94	–
Конец АУТ	487,22	7800,4	180,0	0	0,40	–

Таблица 3

**Значения потерь характеристической скорости двухступенчатой РН**

Этап движения РН	Потери характеристической скорости, м/с			
	на гравитацию	на аэродинамику	на противодействие	на углы атаки
Разделение ступеней	1084,8/1085,3	67,4/66,8	73,6/73,5	0/0
Конец АУТ	1347,1/1351,2	67,4/66,8	73,6/73,5	51,9/56,8

*Примечание.* В числителе дроби указаны значения, рассчитанные методом численного интегрирования, в знаменателе — аналитическим методом.

на круговой НОО  $v_{1k}^{HOO}$ , то выражение  $(1-\bar{v})_1$  можно упростить следующим образом:

$$(1-\bar{v})_1 = 1 - \left( \frac{v_1}{v_{1k}^{HOO}} \right)^2$$

Отметим, что аналитические соотношения, связывающие траекторные переменные в характерных точках АУТ, получены на основании результатов анализа изменения во времени траекторных переменных баллистических расчетов, определенных методом численного интегрирования уравнений движения РН.

Продемонстрируем работоспособность приближенной методики баллистического расчета на конкретном примере выведения полезной нагрузки на круговую полярную орбиту. В качестве исходных данных использованы следующие параметры:  $I_{n1} = 3090$  м/с;  $k_p = 1,09$ ;  $\mu_{k1} = 0,2574$ ;  $v_0 = 0,72$ ;  $\sigma = 3 \cdot 10^4$  кг/м<sup>2</sup>;  $I_{n2} = 3515$  м/с;  $\mu_{k2} = 0,2505$ ;  $v_{n2} = 1,2$ ;  $\theta_1 = 15,46^\circ$ ;  $\theta_k = 0^\circ$ ;  $v_{1k}^{HOO} = 7800,4$  м/с;  $h^{HOO} = 180$  км.

На рис. 3 показаны законы изменения  $\alpha(t)$ ,  $\varphi(t)$  и  $\theta(t)$  на АУТ двухступенчатой РН, полученные методом численного интегрирования дифференциальных уравнений движения РН.

Как видно из рис. 3, угол атаки (график дан с изменением масштаба в 5 раз) на дозвуковом участке принимает отрицательные значения,

далее он равен нулю. После разделения ступеней угол атаки ВС, как правило, больше нуля. Его оптимальное среднеинтегральное значение зависит от тяговооруженности ВС.

На рис. 4 приведены зависимости потерь характеристической скорости на гравитацию  $\Delta v_g$ , аэродинамику  $\Delta v_a$ , противодействие  $\Delta v_p$  и углы атаки  $\Delta v_\alpha$  для АУТ двухступенчатой РН от времени ее полета.

Параметры движения двухступенчатой РН, полученные методом численного интегрирования дифференциальных уравнений, приведены в табл. 2. Значения траекторных переменных соответствуют характерным этапам движения РН.

В табл. 3 приведены значения потерь характеристической скорости двухступенчатой РН, рассчитанные методом численного интегрирования дифференциальных уравнений ее движения и по предложенной приближенной методике проектировочного баллистического расчета (аналитическим методом).

**Выводы**

1. Предложена приближенная методика проектировочного баллистического расчета на АУТ двухступенчатой РН при выведении по-



лезной нагрузки на НОО высотой 180...230 км с произвольным наклоном орбиты.

2. Разработанная методика позволяет проводить проектировочные баллистические расчеты АУТ РН от сверхлегкого класса до сверхтяжелого при минимальных временных и материальных затратах.

3. Погрешности определения скорости в конце АУТ по сравнению с результатами численного интегрирования уравнений движения

РН по абсолютной величине не превышают  $\pm 20$  м/с. Погрешности определения высоты в конце АУТ ПС составляют не более  $\pm 4$  км.

4. Предложенную методику рекомендовано применять на ранних этапах разработок перспективных проектов при формировании облика изделия. Она также может быть полезна студентам старших курсов вузов при выполнении курсовых и дипломных проектов по теме «Проектирование ракет-носителей».

## Литература

- [1] Микрин Е.А. Перспективы развития отечественной пилотируемой космонавтики (к 110-летию со дня рождения С.П. Королева). *Космическая техника и технологии*, 2017, № 1, с. 5–10.
- [2] Брюханов Н.А., Легостаев В.И., Лобыкин А.А. и др. Использование ресурсов Луны для исследования и освоения Солнечной системы в XXI веке. *Космическая техника и технологии*, 2014, № 1, с. 3–14.
- [3] Fortescue P., Swinerd G., Stark J. *Spacecraft systems engineering*. Wiley, 2011. 728 p.
- [4] Григорьев М.Н., Охочинский М.Н., Вагнер И.В. Логистический подход к проекту создания российской Лунной базы. *Инновации*, 2016, № 7, с. 14–19.
- [5] Деречин А.Г., Жарова Л.Н., Синявский В.В. и др. Международное сотрудничество в сфере пилотируемых полетов. Часть 2. Создание и эксплуатация Международной космической станции. *Космическая техника и технологии*, 2017, № 2, с. 5–28.
- [6] Сирота А.А. Этапы строительства и особенности устройства международной лунной исследовательской станции. *Сб. тез. док. XLV Межд. науч. конф.* Москва, МАИ, 2018, т. 3. С. 68–70.
- [7] Schruink D., Sharpe B., Cooper B., et al. *The Moon: resources, future development and settlement*. Springer, 2007. 261 p.
- [8] Данилюк А.Ю., Ключников В.Ю. и др. Проблемы создания перспективных сверхтяжелых ракет-носителей. *Вестник НПО им. С.И. Лавочкина*, 2015, № 1, с. 10–19.
- [9] Петрукович А.А., Никифоров О.В. Малые спутники для космических исследований. *Ракетно-космическое приборостроение и информационные методы*, 2016, т. 3, № 4, с. 22–31.
- [10] Каширин А.В., Глебанов И.И. Анализ современного состояния рынка наноспутников как прорывной инновации и возможности его развития в России. *Молодой ученый*, 2016, т. 1, № 7, с. 15–23.
- [11] Ключников В.Ю. Ракеты-носители сверхлегкого класса: ниша на рынке пусковых услуг и перспективные проекты. Ч. 1. *Воздушно-космическая сфера*, 2019, № 3, с. 58–71, doi: <https://doi.org/10.30981/2587-7992-2019-100-3-58-71>
- [12] Черный И. Electron готовится к первому пуску. *Новости космонавтики*, 2017, т. 27, № 5, с. 45.
- [13] Аппазов Р.Ф., Лавров С.С., Мишин В.П. *Баллистика управляемых ракет дальнего действия*. Москва, Наука, 1966. 305 с.
- [14] Алифанов О.М., ред. *Баллистические ракеты и ракеты-носители*. Москва, Дрофа, 2004. 512 с.
- [15] Мишин В.П., Безвербый В.К., Панкратов Б.М. и др. *Основы проектирования летательных аппаратов (транспортные системы)*. Москва, Машиностроение, 2005. 375 с.
- [16] Сердюк В.К. *Проектирование средств выведения космических аппаратов*. Москва, Машиностроение, 2009. 504 с.
- [17] Мухамедов Л.П. *Основы проектирования транспортных космических систем*. Москва, изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2019. 265 с.
- [18] Мухамедов Л.П., Кириевский Д.А. Приближенная методика проектировочного баллистического расчета первых ступеней ракет-носителей. *Известия высших учебных заведений. Машиностроение*, 2020, № 6, с. 67–77, doi: <http://dx.doi.org/10.18698/0536-1044-2020-6-67-77>

- [19] Muhamedov L.P., Kirievskii D.A. An approximate determination of the characteristic velocity losses and the positioning of the end of the launching phase of the first stages of launch vehicles. *AIP Conf. Proc.*, 2021, vol. 2318, no. 1, art. 020001, doi: <https://doi.org/10.1063/5.0036342>
- [20] Петров К.П. *Аэродинамика транспортных космических систем*. Москва, Эдиториал УРСС, 2000. 368 с.

## References

- [1] Mikrin E.A. Outlook for our country's manned spaceflight development (to mark the 110<sup>th</sup> anniversary of S.P. Korolev). *Kosmicheskaya tekhnika i tekhnologii* [Space Technique and Technologies], 2017, no. 1, pp. 5–10. (In Russ.).
- [2] Bryukhanov N.A., Legostaev V.I., Lobykin A.A., et al. Use of lunar resources for solar system exploration and exploitation in the 21st century. *Kosmicheskaya tekhnika i tekhnologii* [Space Technique and Technologies], 2014, no. 1, pp. 3–14. (In Russ.).
- [3] Fortescue P., Swinerd G., Stark J. *Spacecraft systems engineering*. Wiley, 2011, 728 p.
- [4] Grigor'yev M.N., Okhochinskiy M.N., Vagner I.V. Logistical approach to the project of the Russian Moon base. *Innovatsii* [Innovations], 2016, no. 7, pp. 14–19. (In Russ.).
- [5] Derechin A.G., Zharova L.N., Sinyavskiy V.V. et al. International cooperation in the sphere of manned lights. Part 2. Development and operation of the International Space Station. *Kosmicheskaya tekhnika i tekhnologii* [Space Technique and Technologies], 2017, no. 2, pp. 5–28. (In Russ.).
- [6] Sirota A.A. [Building stages and design properties of international lunar research station]. *Sb. tez. dok. XLV Mezhd. nauch. konf.* [Abs. XLV Int. Sci. Conf.]. Moscow, MAI Publ., 2018, vol. 3, pp. 68–70. (In Russ.).
- [7] Schrunk D., Sharpe B., Cooper B. et al. *The moon: resources, future development and settlement*. Springer, 2007. 261 p.
- [8] Danilyuk A.Yu., Klyushnikov V.Yu., et al. Problems of design & development of perspective super-heavy launch vehicles. *Vestnik NPO im. p.I. Lavochkina*, 2015, no. 1, pp. 10–19. (In Russ.).
- [9] Petrukovich A.A., Nikiforov O.V. Small satellites for scientific research. *Raketno-kosmicheskoe priborostroenie i informatsionnye metody*, 2016, vol. 3, no. 4, pp. 22–31. (In Russ.).
- [10] Kashirin A.V., Glebanov I.I. Analysis of current status of nanosatellites market as a breakthrough innovation and possibility of its development in Russia state. *Molodoy uchenyy* [Young Scientist], 2016, vol. 1, no. 7, pp. 15–23. (In Russ.).
- [11] Klyushnikov V.Yu. Micro launch vehicles: the segment in the launch services market and promising projects. P. 1. *Vozdushno-kosmicheskaya sfera* [Aerospace Sphere Journal], 2019, no. 3, pp. 58–71, doi: <https://doi.org/10.30981/2587-7992-2019-100-3-58-71> (in Russ.).
- [12] Chernyy I. Electron is getting ready for the first launch. *Novosti kosmonavтики*, 2017, vol. 27, no. 5, pp. 45. (In Russ.).
- [13] Appazov R.F., Lavrov S.S., Mishin V.P. *Ballistika upravlyaemykh raket dal'nego deystviya* [Ballistics of long-range guided missiles]. Moscow, Nauka Publ., 1966. 305 p. (In Russ.).
- [14] Alifanov O.M., ed. *Ballisticheskie rakety i rakety-nositeli* [Ballistic missiles and launch rockets]. Moscow, Drofa Publ., 2004. 512 p. (In Russ.).
- [15] Mishin V.P., Bezverbyy V.K., Pankratov B.M. et al. *Osnovy proektirovaniya letatel'nykh apparatov (transportnye sistemy)* [Design fundamentals for aircraft (transport systems)]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 2005. 375 p. (In Russ.).
- [16] Serdyuk V.K. *Proektirovanie sredstv vyvedeniya kosmicheskikh apparatov* [Space transportation system design]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 2009. 504 p. (In Russ.).
- [17] Mukhamedov L.P. *Osnovy proektirovaniya transportnykh kosmicheskikh system* [Design fundamentals of space transportation systems]. Moscow, Bauman MSTU Publ., 2019. 265 p. (In Russ.).
- [18] Mukhamedov L.P., Kirievskiy D.A. Approximate methodology for design ballistic calculations of the first stage of launch vehicles. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Mashinostroenie* [BMSTU Journal of Mechanical Engineering], 2020, no. 6, pp. 67–77, doi: <http://dx.doi.org/10.18698/0536-1044-2020-6-67-77> (in Russ.).

- [19] Muhamedov L.P., Kirievskii D.A. An approximate determination of the characteristic velocity losses and the positioning of the end of the launching phase of the first stages of launch vehicles. *AIP Conf. Proc.*, 2021, vol. 2318, no. 1, art. 020001, doi: <https://doi.org/10.1063/5.0036342>
- [20] Petrov K.P. *Aerodinamika transportnykh kosmicheskikh system* [Aerodynamics of transport space systems]. Moscow, Editorial URSS Publ., 2000. 368 p. (In Russ.).

Статья поступила в редакцию 18.10.2021

## Информация об авторах

**МУХАМЕДОВ Леонид Павлович** — кандидат технических наук, доцент кафедры «Космические аппараты и ракеты-носители». МГТУ им. Н.Э. Баумана (105005, Москва, Российская Федерация, 2-я Бауманская ул., д. 5, к. 1, e-mail: [l.p.muhamedov@yandex.ru](mailto:l.p.muhamedov@yandex.ru)).

**КИРИЕВСКИЙ Дмитрий Алексеевич** — инженер-конструктор третьей категории. АО «ГКНПЦ имени М.В. Хруничева» (121309, Москва, Российская Федерация, ул. Ново-возаводская, д. 18, e-mail: [kda9700@mail.ru](mailto:kda9700@mail.ru)).

## Information about the authors

**MUHAMEDOV Leonid Pavlovich** — Candidate of Science (Eng.), Associate Professor, Department of Spacecraft and Launch Vehicles. Bauman Moscow State Technical University (105005, Moscow, Russian Federation, 2<sup>nd</sup> Baumanskaya St., Bldg. 5, Block 1, e-mail: [l.p.muhamedov@yandex.ru](mailto:l.p.muhamedov@yandex.ru)).

**KIRIEVSKIY Dmitriy Alekseevich** — Design Engineer of the 3<sup>rd</sup> Category. AO Khrunichev State Research and Production Space Center (121309, Moscow, Russian Federation, Novoza-vodskaya St., Bldg. 18, e-mail: [kda9700@mail.ru](mailto:kda9700@mail.ru)).

### Просьба ссылаться на эту статью следующим образом:

Мухамедов Л.П., Кириевский Д.А. Приближенная методика проектировочного баллистического расчета двухступенчатых ракет-носителей. *Известия высших учебных заведений. Машиностроение*, 2022, № 2, с. 94–104, doi: [10.18698/0536-1044-2022-2-94-104](https://doi.org/10.18698/0536-1044-2022-2-94-104)

### Please cite this article in English as:

Muhamedov L.P., Kirievskiy D.A. Approximate Methodology for Design Ballistic Calculation of Two-Stage Launch Vehicles. *BMSTU Journal of Mechanical Engineering*, 2022, no. 2, pp. 94–104, doi: [10.18698/0536-1044-2022-2-94-104](https://doi.org/10.18698/0536-1044-2022-2-94-104)



## Издательство МГТУ им. Н.Э. Баумана предлагает читателям монографию

### «Технология производства малотоннажных судов из композиционных материалов»

**Авторы: В.А. Нелюб, М.Э. Францев, А.С. Бородулин**

Изложены основные сведения о конструкторско-технологических решениях, особенностях проектирования, производства и диагностики состояния композитных конструкций малотоннажных судов. Приведены физико-механические характеристики и показаны перспективы применения полимерно-волоконистых композитных материалов на основе стеклянных и углеродных наполнителей, полиэфирных и эпоксидных связующих при производстве корпуса и надстройки судовых конструкций. Рассмотрены технологические методы и рекомендованы рациональные технологические процессы изготовления композиционных элементов судовых конструкций. Изложены технологические методы и средства неразрушающего контроля композиционных конструкций малотоннажных судов.

Для специалистов в области производства и эксплуатации композиционных конструкций малотоннажных судов.

### По вопросам приобретения обращайтесь:

105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1.  
Тел.: +7 499 263-60-45, факс: +7 499 261-45-97;  
[press@baumanpress.ru](mailto:press@baumanpress.ru); <https://bmstu.press>