

УДК 629.7.023:539.3

doi: 10.18698/0536-1044-2021-10-106-116

# Исследование нелинейного деформирования и устойчивости композитного отсека фюзеляжа самолета при поперечном изгибе

Л.П. Железнов, А.Н. Серьёзов

ФГУП «Сибирский научно-исследовательский институт авиации имени С.А. Чаплыгина»

## Research on Nonlinear Deformation and Stability of an Aircraft Fuselage Composite Section under Transverse Bending

L.P. Zheleznov, A.N. Seriosnov

Siberian Aeronautical Research Institute named after S.A. Chaplygin

Исследований на прочность и устойчивость подкрепленных композитных оболочек с учетом моментности и нелинейности исходного напряженно-деформированного состояния в настоящее время недостаточно. Большинство известных решений задач устойчивости оболочек получено аналитическими и численными методами, как правило, в линейном приближении, т. е. в классической постановке. Предложена методика, реализующая метод конечных элементов для решения задач прочности и устойчивости дискретно-подкрепленных цилиндрических оболочек, выполненных из композиционного материала, с учетом моментности и нелинейности их докритического напряженно-деформированного состояния. Исследована устойчивость подкрепленного отсека фюзеляжа самолета, выполненного из композиционного материала, при поперечном изгибе. Определено влияние нелинейности деформирования, жесткости стрингерного набора и толщины оболочки на критические нагрузки потери устойчивости оболочки.

**Ключевые слова:** цилиндрические композитные оболочки, нелинейное деформирование, устойчивость оболочки, метод конечных элементов

Currently, there is a lack of studies on the strength and stability of reinforced composite shells, taking into account the momentness and nonlinearity of the initial stress-strain state. Most of the known solutions to the shells stability problems are obtained by analytical and numerical methods, as a rule, in the linear approximation, i.e. in the classical formulation. A developed technique is proposed implementing the finite element method for solving the problems of strength and stability of discrete-reinforced cylindrical shells made of the composite material, taking into account the momentness and nonlinearity of their subcritical stress-strain state. The transverse bending stability of the reinforced aircraft fuselage compartment made of composite material has been investigated. The effect of deformation nonlinearity, stiffness of stringer set, shell thickness on critical loads of the shell instability has been determined.

**Keywords:** cylindrical composite shells, nonlinear deformation, shall stability, finite element method

Анизотридные сетчатые конструкции из композиционных материалов, изготавливаемые методом непрерывной намотки, получили широкое распространение в современных летательных и особенно космических аппаратах. В летательных аппаратах их применяют либо как самостоятельные конструкции, состоящие только из подкреплений, либо совместно с обшивкой. Последнее необходимо для конструкций фюзеляжей самолетов.

Основополагающий вклад в разработку сетчатых композиционных конструкций внес В.В. Васильев [1]. Аналитические оценки напряженно-деформированного состояния регулярной сетчатой оболочки с использованием вариационного принципа, безмоментной теории оболочек и с заменой реберной структуры условно сплошным слоем с осредненной жесткостью приведены в работе В.В. Васильева и В.А. Бунакова [2].

Однако континуальная модель не вполне адекватна реальной сетчатой структуре вблизи кромок и нарушений регулярности. В этих случаях необходимо использовать дискретные модели. Дискретный подход к моделированию сетчатых анизотридных конструкций использовали В.В. Васильев, А.Ф. Разин, А.А. Бабичев, В.П. Булдаков, М.В. Никитин и др.

Тем не менее методы расчета на прочность и устойчивость сетчатых конструкций с учетом нелинейности исходного напряженно-деформированного состояния недостаточно развиты. Большая часть известных решений задач устойчивости оболочек получена аналитическими методами и, как правило, в линейном приближении без учета моментности и нелинейности докритического состояния оболочек, т. е. в классической постановке [3, 4]. Поэтому разработка надежных и эффективных методов расчета анизотридных конструкций является актуальной задачей.

Наиболее подходящим методом в этом случае является метод конечных элементов, обладающий такими достоинствами, как универсальность, физичность и неограниченная возможность применения в сложных конструкциях при произвольном нагружении.

В настоящей работе задача прочности и устойчивости цилиндрических оболочек, выполненных из композиционного материала, при нагружении поперечной силой решена методами конечных элементов и линеаризации Ньютона — Канторовича. Используются раз-

работанные на основе гипотезы Тимошенко конечные элементы (КЭ) цилиндрических композитных оболочек естественной кривизны, в аппроксимации перемещений которых в явном виде выделены их жесткие перемещения (перемещения КЭ как твердого тела). Исследован отсек фюзеляжа перспективного пассажирского самолета в виде круговой анизотридной цилиндрической оболочки в широком диапазоне жесткости оболочки.

Цель работы — исследование влияния нелинейности исходного напряженно-деформированного состояния, видов и жесткости подкрепляющего набора на критические нагрузки потери устойчивости оболочки.

Рассмотрим подкрепленную продольным (стрингерами) и поперечным (шпангоутами) наборами некруговую цилиндрическую композитную оболочку (рис. 1), находящуюся под действием неоднородной краевой нагрузки в виде продольной силы  $N$ , изгибающего  $M$  и крутящего  $M_k$  моментов, поперечной силы  $Q$  и внутреннего давления  $q$ . На рис. 1 введены следующие обозначения:  $a$  и  $b$  — большая и малая ось эллипса;  $\beta$  — угол поворота радиуса кривизны  $R$  поперечного сечения оболочки относительно вертикальной оси.

Кратко изложим основные соотношения для КЭ некруговой эллиптической цилиндрической композитной оболочки. Оболочку будем рассматривать как конструктивно-ортотропную, в которой суммарная жесткость складывается из жесткостей обшивки и подкреплений, приведенных к срединной поверхности обшивки. При выводе основных соотношений воспользуемся ранее разработанным алгоритмом [5, 6].

Разобьем оболочку линиями главных кривизн по образующей на  $m$ , а по направляющей на  $n$  частей, т. е. представим ее набором  $m \times n$  криволинейных прямоугольных КЭ естественной кривизны.

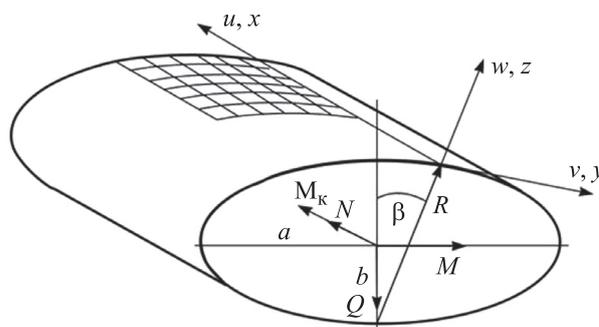


Рис. 1. Схема расчета некруговой цилиндрической композитной оболочки

Для оболочки применяем гипотезу Тимошенко прямой линии. Углы поворотов сечений оболочки определяются выражениями [1, 7]

$$\begin{aligned} \vartheta_x &= \vartheta_1 + \psi_x; \quad \vartheta_y = \vartheta_2 + \psi_y; \quad \vartheta_1 = -w_x; \\ \vartheta_2 &= k_2(v - w_\beta); \quad k_2 = 1/R, \end{aligned} \quad (1)$$

где  $\psi_x, \psi_y$  — углы сдвига сечений оболочки по осям  $x$  и  $y$ ;  $w$  — прогиб оболочки по оси  $x$ ;  $k_2$  и  $R$  — кривизна и радиус оболочки;  $x$  — продольная координата; здесь и далее индексы « $x$ » и « $\beta$ » означают дифференцирование по соответствующим переменным.

Из выражения (1) получаем углы сдвига сечений оболочки

$$\psi_x = \vartheta_x - \vartheta_1; \quad \psi_y = \vartheta_y - \vartheta_2.$$

Используя билинейную аппроксимацию для тангенциальных перемещений  $u, v$  и углов сдвига  $\psi_x, \psi_y$ , бикубическую аппроксимацию для прогиба  $w$  и соотношения для перемещений элемента оболочки как жесткого целого [5], запишем следующие выражения для полных перемещений точек КЭ:

$$u = a_1xy + a_2x + a_3y + a_4 + a_6\psi_1s + a_{20}\psi_2c;$$

$$v = a_5xy + a_6xc + a_7y + a_8(\psi_1c + \psi_2s) - a_{20}xs + a_{23}c - a_{24}s;$$

$$\begin{aligned} w &= a_9x^3y^3 + a_{10}x^3y^2 + a_{11}x^3y + a_{12}x^3 + a_{13}x^2y^3 + \\ &+ a_{14}x^2y^2 + a_{15}x^2y + a_{16}x^2 + a_{17}xy^3 + a_{18}xy^2 + \\ &+ a_{19}xy + a_{20}xc + a_{21}y^3 + a_{22}y^2 + a_{23}s + \\ &+ a_{24}c + a_6xs + a_8(\psi_1s - \psi_2c); \end{aligned}$$

$$c = \cos\beta; \quad s = \sin\beta;$$

$$\psi_1 = \int Rs d\beta; \quad \psi_2 = -\int Rc d\beta;$$

$$\psi_x = a_{25}xy + a_{26}x + a_{27}y + a_{28};$$

$$\psi_y = a_{29}xy + a_{30}x + a_{31}y + a_{32},$$

где  $a_i$  — коэффициенты полиномов,  $i = 1, 2, \dots, 32$ .

Коэффициенты полиномов  $a_i$  выражаются через узловые неизвестные:

$$\bar{\mathbf{u}} = \{u_i, v_i, w_i, \vartheta_{1i}, \vartheta_{2i}, w_{xyi}, \psi_{xi}, \psi_{yi}, u_j, v_j, w_j, \vartheta_{1j}, \vartheta_{2j}, w_{xyj}, \psi_{xj}, \psi_{yj}, u_k, \dots, u_n, \dots, w_{xyn}, \psi_{xn}, \psi_{yn}\}^T,$$

где  $\bar{\mathbf{u}}$  — вектор узловых перемещений, углов поворотов и сдвигов КЭ.

В каждом узле есть восемь неизвестных, поэтому КЭ имеет 32 степени свободы.

Нелинейные соотношения Коши для деформаций и изменений кривизн срединной поверхности оболочки имеют вид

$$\mathbf{e} = \mathbf{e}_l + \mathbf{e}_n.$$

Здесь  $\mathbf{e}, \mathbf{e}_l$  и  $\mathbf{e}_n$  — векторы деформаций, линейной и нелинейной составляющих вектора  $\mathbf{e}$ ,

$$\mathbf{e}_l = \{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \chi_1, \chi_2, \chi_3, \psi_x, \psi_y\}^T;$$

$$\mathbf{e}_n = \{\varepsilon_{1n}, \varepsilon_{2n}, \varepsilon_{3n}, 0, 0, 0, 0, 0\}^T;$$

$$\varepsilon_1 = u_x; \quad \varepsilon_2 = k_2(v_\beta + w); \quad \varepsilon_3 = (v_x + k_2u_\beta);$$

$$\chi_1 = (\vartheta_x)_x; \quad \chi_2 = k_2(\vartheta_y)_\beta; \quad \chi_3 = (\vartheta_y)_x;$$

$$\varepsilon_{1n} = (w_x)^2/2; \quad \varepsilon_{2n} = k_2(v - w_\beta)^2/2;$$

$$\varepsilon_{3n} = -k_2w_x(v - w_\beta).$$

Согласно работе [8], соотношения упругости для оболочки имеют вид

$$\mathbf{T} = \mathbf{D}\mathbf{e}.$$

Здесь  $\mathbf{T}$  — вектор внутренних усилий, изгибающих моментов и поперечных сил,  $\mathbf{T} = \{T_1, T_2, T_3, M_1, M_2, M_3, Q_1, Q_2\}^T$ ;  $\mathbf{D}$  — матрица упругих жесткостей,

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} & K_{11} & K_{12} & K_{13} & 0 & 0 \\ B_{12} & B_{22} & B_{23} & K_{12} & K_{22} & K_{23} & 0 & 0 \\ B_{13} & B_{23} & B_{33} & K_{13} & K_{23} & K_{33} & 0 & 0 \\ K_{11} & K_{12} & K_{13} & D_{11} & D_{12} & D_{13} & 0 & 0 \\ K_{12} & K_{22} & K_{23} & D_{12} & D_{22} & D_{23} & 0 & 0 \\ K_{13} & K_{23} & K_{33} & D_{13} & D_{23} & D_{33} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{11} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{22} \end{bmatrix};$$

$$C_{11} = C_{22} = 5/6Gh,$$

где  $B_{ij}, K_{ij}, D_{ij}$  — приведенные к срединной поверхности оболочки коэффициенты мембранной и изгибной жесткостей композитной оболочки [1];  $G$  — модуль сдвига;  $h$  — приведенная толщина оболочки.

Используя решение из работы [5], запишем выражение для потенциальной энергии КЭ оболочки

$$\Pi = W - V,$$

где  $W$  — энергия деформации КЭ;  $V$  — работа внешних сил.

Согласно работе [5],

$$W = \frac{1}{2} \iint_s \mathbf{T}^T \mathbf{e} ds = \frac{1}{2} \iint_s (\mathbf{T}^T \mathbf{e}_l + \mathbf{T}^T \mathbf{e}_n) ds =$$

$$= \frac{1}{2} \iint_s (\mathbf{e}_l^T \mathbf{D} \mathbf{e}_l + \mathbf{e}_l^T \mathbf{D} \mathbf{e}_n + \mathbf{e}_n^T \mathbf{D} \mathbf{e}_l + \mathbf{e}_n^T \mathbf{D} \mathbf{e}_n) ds;$$

$$V = \iint_s \mathbf{q}^T \mathbf{u} ds + \int_{l_k} \mathbf{R}_k^T \mathbf{u}_k dl_k + \mathbf{R}_l^T \bar{\mathbf{u}}_l;$$

$$\mathbf{u}_k = \{u, v, w, \vartheta_1, \vartheta_2, w_{xy}\}^T,$$

где  $\mathbf{q}$  — вектор внешней поверхностной нагрузки;  $\mathbf{R}_k, \mathbf{R}_l$  — векторы контурных и локальных сил и моментов.

Вариационное уравнение Лагранжа для КЭ оболочки имеет вид

$$\delta \Pi = \delta W - \delta V = 0,$$

где  $\delta$  — знак вариации.

Варьируя по узловым перемещениям КЭ, получаем относительно них систему нелинейных алгебраических уравнений. С учетом условия совместности узловых перемещений элементов и граничных условий запишем систему нелинейных алгебраических уравнений относительно узловых перемещений всех КЭ оболочки:

$$\mathbf{K} \mathbf{u}' - \mathbf{Q} = 0, \tag{2}$$

где  $\mathbf{K}$  — матрица жесткости оболочки, получаемая суммированием матриц жесткости отдельных КЭ с использованием матрицы индексов [9];  $\mathbf{u}'$  — вектор узловых неизвестных оболочки;  $\mathbf{Q}$  — вектор обобщенных узловых сил оболочки.

Для решения системы уравнений (2) воспользуемся методом Ньютона — Канторовича [10], уравнение которого имеет вид

$$\mathbf{H}(\mathbf{u}'_n) \Delta = \mathbf{Q} - \mathbf{G}; \quad \mathbf{u}'_{n+1} = \mathbf{u}'_n + \Delta,$$

где  $\mathbf{H}$  — матрица Гессе системы, элементами которой являются элементы второй вариации потенциальной энергии деформации подкрепленной оболочки,  $\Delta$  — приращение вектора  $\mathbf{u}'_n$ ;  $\mathbf{G}$  — градиент потенциальной энергии деформации.

Критическая нагрузка определяется как предельная по расходимости итерационного процесса при резком возрастании перемещений в отдельных узлах конечно-элементной сетки или как бифуркационная с использованием энергетического критерия устойчивости, согласно которому равновесное состояние устойчиво, если  $\delta^2 \Pi > 0$ . Форма потери устойчивости оболочки определяется из решения системы  $\mathbf{H} \ddot{\mathbf{u}} = 0$ , где  $\ddot{\mathbf{u}}$  — вектор бифуркационных узловых перемещений.

**Исследование нелинейного деформирования и устойчивости отсека фюзеляжа самолета при поперечном изгибе.** Рассмотрим подкрепленную продольным и поперечным наборами круговую цилиндрическую оболочку в виде отсека фюзеляжа пассажирского самолета, близкого по форме поперечного сечения к самолету ЯК-40, и находящуюся под действием краевой поперечной силы  $Q$ , приложенной к свободному краю оболочки. Исследуем различные виды подкреплений оболочки: анизотридное (рис. 2) и ортогональное по линиям главных кривизн. Граничные условия: со стороны нагружения оболочки  $w_x = 0$ ; а с другого края  $u = v = w_x = 0$ .

Оболочка радиусом  $R = 1200$  мм и длиной  $L = 1680$  мм подкреплена равностоящим подкрепляющим набором (прямоугольного поперечного сечения) разной жесткости (см. рис. 2).

Оболочка выполнена из полимерного композиционного материала Torayca T700.

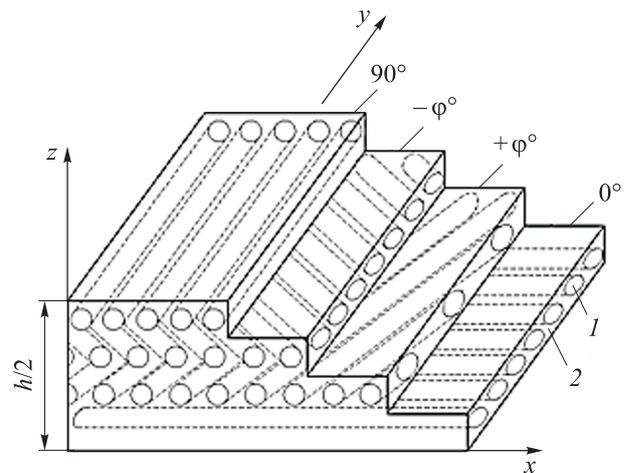
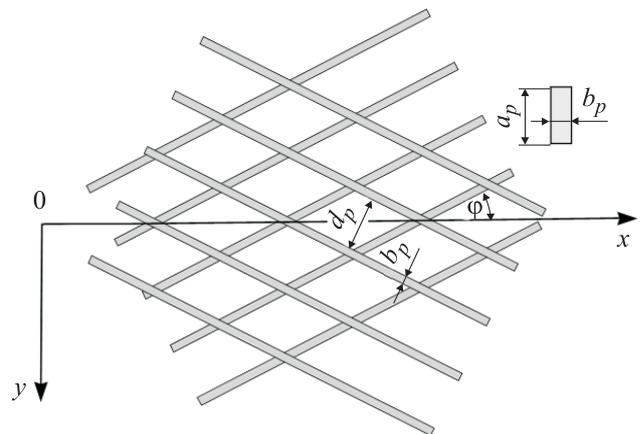


Рис. 2. Схема укладки монослоев в обшивке и подкреплений оболочки: 1 — волокно; 2 — матрица

**Механические характеристики  
монослоя Torayca T700**

Модуль упругости, МПа, в продольном направлении монослоя:

на растяжение  $E_1^+$  ..... 125 510

на сжатие  $E_1^-$  ..... 114 380

Модуль упругости, МПа, в поперечном направлении монослоя:

на растяжение  $E_2^+$  ..... 8780

на сжатие  $E_2^-$  ..... 8670

Модуль сдвига  $G_{12}$ , МПа ..... 4740

Разрушающее продольное напряжение монослоя в, МПа:

на растяжение  $\sigma_{1B}^+$  ..... 2340

на сжатие  $\sigma_{1B}^-$  ..... 1240

Разрушающее поперечное напряжение монослоя, МПа:

на растяжение  $\sigma_{2B}^+$  ..... 51,7

на сжатие  $\sigma_{2B}^-$  ..... 211,2

Касательное напряжение  $\tau_{12B}$ , МПа ..... 71,4

Коэффициент Пуассона монослоя  $\mu_{21}$  ..... 0,34

Толщина монослоя  $\delta_m$ , мкм ..... 192

В разработанном конечно-элементном алгоритме рассмотрена конструктивно-орто-тропная схема расположения подкреплений. Жесткостные характеристики материала обшивки получены с использованием формул, приведенных в работе [11]:

$$B_{11} = \sum_{k=1}^n \left( E_1^{(k)} \cos^4 \varphi_k + 2E_1^{(k)} \mu_{21}^{(k)} \sin^2 \varphi_k \cos^2 \varphi_k + E_2^{(k)} \sin^4 \varphi_k + G_{12}^{(k)} \sin^2 2\varphi_k \right) (z_k - z_{k-1});$$

$$B_{22} = \sum_{k=1}^n \left( E_1^{(k)} \sin^4 \varphi_k + 2E_1^{(k)} \mu_{21}^{(k)} \sin^2 \varphi_k \cos^2 \varphi_k + E_2^{(k)} \cos^4 \varphi_k + G_{12}^{(k)} \sin^2 2\varphi_k \right) (z_k - z_{k-1});$$

$$B_{12} = B_{21} = \sum_{k=1}^n \left[ \left( E_1^{(k)} + E_2^{(k)} \right) \sin^2 \varphi_k \cos^2 \varphi_k + E_1^{(k)} \times \mu_{21}^{(k)} \left( \sin^4 \varphi_k + \cos^4 \varphi_k \right) - G_{12}^{(k)} \sin^2 2\varphi_k \right] (z_k - z_{k-1});$$

$$D_{11} = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^n \left( E_1^{(k)} \cos^4 \varphi_k + 2E_1^{(k)} \mu_{21}^{(k)} \sin^2 \varphi_k \cos^2 \varphi_k + E_2^{(k)} \sin^4 \varphi_k + G_{12}^{(k)} \sin^2 2\varphi_k \right) (z_k^3 - z_{k-1}^3);$$

$$D_{22} = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^n \left( E_1^{(k)} \sin^4 \varphi_k + 2E_1^{(k)} \mu_{21}^{(k)} \sin^2 \varphi_k \cos^2 \varphi_k + E_2^{(k)} \cos^4 \varphi_k + G_{12}^{(k)} \sin^2 2\varphi_k \right) (z_k^3 - z_{k-1}^3);$$

$$D_{12} = D_{21} = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^n \left[ \left( E_1^{(k)} + E_2^{(k)} \right) \sin^2 \varphi_k \cos^2 \varphi_k + E_1^{(k)} \times \mu_{21}^{(k)} \left( \sin^4 \varphi_k + \cos^4 \varphi_k \right) - G_{12}^{(k)} \sin^2 2\varphi_k \right] (z_k^3 - z_{k-1}^3);$$

$$K_{11} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \left( E_1^{(k)} \cos^4 \varphi_k + 2E_1^{(k)} \mu_{21}^{(k)} \sin^2 \varphi_k \cos^2 \varphi_k + E_2^{(k)} \sin^4 \varphi_k + G_{12}^{(k)} \sin^2 2\varphi_k \right) (z_k^2 - z_{k-1}^2);$$

$$K_{22} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \left( E_1^{(k)} \sin^4 \varphi_k + 2E_1^{(k)} \mu_{21}^{(k)} \sin^2 \varphi_k \cos^2 \varphi_k + E_2^{(k)} \cos^4 \varphi_k + G_{12}^{(k)} \sin^2 2\varphi_k \right) (z_k^2 - z_{k-1}^2);$$

$$K_{12} = K_{21} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \left[ \left( E_1^{(k)} + E_2^{(k)} \right) \sin^2 \varphi_k \cos^2 \varphi_k + E_1^{(k)} \times \mu_{21}^{(k)} \left( \sin^4 \varphi_k + \cos^4 \varphi_k \right) - G_{12}^{(k)} \sin^2 2\varphi_k \right] (z_k^2 - z_{k-1}^2);$$

$$B_{13} = B_{31} = \sum_{k=1}^n \sin \varphi_k \cos \varphi_k \left[ E_1^{(k)} \left( 1 - \mu_{21}^{(k)} \right) \cos^2 \varphi_k - 2G_{12}^{(k)} \cos^2 2\varphi_k - E_2^{(k)} \left( 1 - \mu_{12}^{(k)} \right) \sin^2 \varphi_k \right] (z_k - z_{k-1});$$

$$B_{23} = B_{32} = \sum_{k=1}^n \sin \varphi_k \cos \varphi_k \left[ E_1^{(k)} \left( 1 - \mu_{21}^{(k)} \right) \sin^2 \varphi_k + 2G_{12}^{(k)} \cos^2 2\varphi_k - E_2^{(k)} \left( 1 - \mu_{12}^{(k)} \right) \cos^2 \varphi_k \right] (z_k - z_{k-1});$$

$$K_{13} = K_{31} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \sin \varphi_k \cos \varphi_k \left[ E_1^{(k)} \left( 1 - \mu_{21}^{(k)} \right) \cos^2 \varphi_k - 2G_{12}^{(k)} \cos^2 2\varphi_k - E_2^{(k)} \left( 1 - \mu_{12}^{(k)} \right) \sin^2 \varphi_k \right] (z_k^2 - z_{k-1}^2);$$

$$K_{23} = K_{32} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \sin \varphi_k \cos \varphi_k \left[ E_1^{(k)} \left( 1 - \mu_{21}^{(k)} \right) \sin^2 \varphi_k + 2G_{12}^{(k)} \cos^2 2\varphi_k - E_2^{(k)} \left( 1 - \mu_{12}^{(k)} \right) \cos^2 \varphi_k \right] (z_k^2 - z_{k-1}^2);$$

$$B_{33} = \sum_{k=1}^n \left[ \left( E_1^{(k)} + E_2^{(k)} - 2E_1^{(k)} \mu_{21}^{(k)} + G_{12}^{(k)} \right) \times \sin^2 \varphi_k \cos^2 \varphi_k + G_{12}^{(k)} \cos^2 2\varphi_k \right] (z_k - z_{k-1});$$

$$K_{33} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \left[ \left( E_1^{(k)} + E_2^{(k)} - 2E_1^{(k)} \mu_{21}^{(k)} + G_{12}^{(k)} \right) \times \sin^2 \varphi_k \cos^2 \varphi_k + G_{12}^{(k)} \cos^2 2\varphi_k \right] (z_k^2 - z_{k-1}^2);$$

$$D_{33} = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^n \left[ \left( E_1^{(k)} + E_2^{(k)} - 2E_1^{(k)} \mu_{21}^{(k)} + G_{12}^{(k)} \right) \times \sin^2 \varphi_k \cos^2 \varphi_k + G_{12}^{(k)} \cos^2 2\varphi_k \right] (z_k^3 - z_{k-1}^3),$$

где  $k$  — номер слоя обшивки;  $\varphi_k$  — угол между осью 1, направленной вдоль армирующих волокон  $k$ -го слоя, и осью  $x$  (см. рис. 2);  $z_k$  и  $z_{k-1}$  — верхняя и нижняя координата  $z$   $k$ -го слоя обшивки.

С обшивкой связана декартова система координат  $xyz$ , а с каждым армированным слоем с номером  $k$  — локальная система координат 1, 2, начало которой совпадает с началом системы координат  $xyz$  (см. рис. 2).

Подкрепления выполнены из такого же композиционного материала, получены путем специальной спиральной непрерывной намотки, а также продольной и поперечной укладки монослоев. В результате образуется так называемая анизотридная оболочка.

Жесткостные характеристики приведенного набора подкреплений получаем с использованием формул, указанных в работе [1], и с учетом приведения их к срединной поверхности обшивки:

$$\begin{aligned}
 B_{11p} &= E_p a_p b_p / d_p \cos^4 \varphi; \\
 B_{22p} &= E_p a_p b_p / d_p \sin^4 \varphi; \\
 B_{12p} &= E_p a_p b_p / d_p \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi; \\
 B_{33p} &= G_p a_p b_p / d_p \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi; \\
 D_{11p} &= E_p a_p b_p / d_p (a_p^2 / 12 + e_p^2) \cos^4 \varphi; \\
 D_{22p} &= E_p a_p b_p / d_p (a_p^2 / 12 + e_p^2) \sin^4 \varphi; \\
 D_{12p} &= E_p a_p b_p / d_p (a_p^2 / 12 + e_p^2) \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi; \\
 D_{33p} &= G_p a_p b_p / d_p (a_p^2 / 12 + e_p^2) \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi; \\
 K_{11p} &= E_p a_p b_p e_p / d_p \cos^4 \varphi; \\
 K_{22p} &= E_p a_p b_p e_p / d_p \sin^4 \varphi; \\
 K_{12p} &= E_p a_p b_p e_p / d_p \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi; \\
 K_{33p} &= G_p a_p b_p e_p / d_p \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi,
 \end{aligned}$$

где  $E_p$  и  $G_p$  — модуль упругости и сдвига подкрепления;  $a_p, b_p, d_p$  — высота, ширина и шаг

подкреплений;  $\varphi$  — угол укладки монослоев в подкреплениях относительно продольной оси оболочки;  $e_p$  — эксцентриситет подкреплений относительно срединной поверхности обшивки.

В случае расчета ортогонального подкрепления используем известные формулы для конструктивно-ортотропной оболочки [9]. Для подкреплений принимаем модуль упругости  $E_p = 83\,670$  МПа и модуль сдвига  $G_p = 4000$  МПа.

Будем рассматривать три варианта укладки монослоев обшивки (табл. 1).

Исследуем пять вариантов подкреплений, приведенные характеристики которых, включая жесткость  $J_p$ , указаны в табл. 2.

Оболочка разбивалась конечно-элементной сеткой  $m \times n = 14 \times 100$ , что обеспечивало сходимость решения по числу КЭ.

**Результаты расчетного исследования.** На рис. 3, а–в приведены зависимости критического параметра нагрузки  $k_\tau$  от жесткости подкрепляющего набора  $J_p$  ( $J_p = b_p a_p^3 / 12$ ) для металлической и композитных оболочек со спиральным и ортогональным подкреплениями при разной толщине оболочки  $h$ . Критический параметр нагрузки

$$k_\tau = Q^* / Q_0.$$

Здесь  $Q^*$  — критическая поперечная сила;  $Q_0$  — критическая поперечная сила круговой цилиндрической оболочки той же толщины  $h$  [12],

Таблица 1

Варианты укладки монослоев обшивки

| Вариант | Схема укладки  | $h_{об}$ , мм |
|---------|--|---------------|
| I       | $0^\circ, 90^\circ, \pm 45^\circ, 90^\circ, 0^\circ$   | 1,152         |
| II      | $0^\circ, \pm 45^\circ, 90^\circ, 0^\circ, \pm 45^\circ, 90^\circ$                                     | 1,728         |
| III     | $0^\circ, 0^\circ, 0^\circ, \pm 45^\circ, 90^\circ, \pm 45^\circ, 90^\circ, 0^\circ, 0^\circ, 0^\circ$ | 2,304         |

Таблица 2

Приведенные характеристики подкреплений

| Вариант | $a_p$ , мм | $b_p$ , мм | $d_p$ , мм | $\varphi$ , град | $J_p$ , мм <sup>4</sup> |
|---------|------------|------------|------------|------------------|-------------------------|
| 1       | 10         | 2,5        | 103,6447   | 30, 90, 0, -30   | 208                     |
| 2       | 20         | 5,0        | 103,6447   | 30, 90, 0, -30   | 3333                    |
| 3       | 30         | 7,5        | 103,6447   | 30, 90, 0, -30   | 16 875                  |
| 4       | 40         | 10,0       | 103,6447   | 30, 90, 0, -30   | 53 333                  |
| 5       | 50         | 12,5       | 103,6447   | 30, 90, 0, -30   | 130 208                 |

$$Q_0 = \pi R_0 C S_b,$$

где  $R_0$  — радиус оболочки;  $C = 0,953$ ;

$$S_b = 0,74 \frac{Eh}{(1-\mu^2)^{5/8}} \left( \frac{h}{R_0} \right)^{5/4} \left( \frac{R_0}{L} \right)^{1/2}$$

— критическое классическое касательное усилие круговой цилиндрической оболочки при кручении ( $\mu$  — коэффициент Пуассона металлической оболочки;  $L$  — длина оболочки).

Сплошными линиями на рис. 3, а–в обозначены результаты линейного решения, штриховыми — нелинейного. Анализ этих рисунков показывает, что влияние нелинейности в большинстве случаев расчета минимально. С увели-

чением толщины оболочки  $h$  критический параметр нагрузки  $k_\tau$  существенно уменьшается (до 300 %). При действии поперечной силы независимо от толщины и жесткости подкрепляющего набора параметр нагрузки  $k_\tau$  металлической оболочки выше, чем у композитной. Кроме того, чем больше толщина обшивки, тем выше эффективность металлической оболочки. Критический параметр нагрузки анизотридных оболочек всегда меньше такового для металлической оболочки.

На рис. 4, а–в показана весовая эффективность оболочки в виде зависимостей критического весового параметра  $\tilde{k}_\tau$  от жесткости подкрепляющего набора  $J_p$  металлической и композитных оболочек с ортогональным

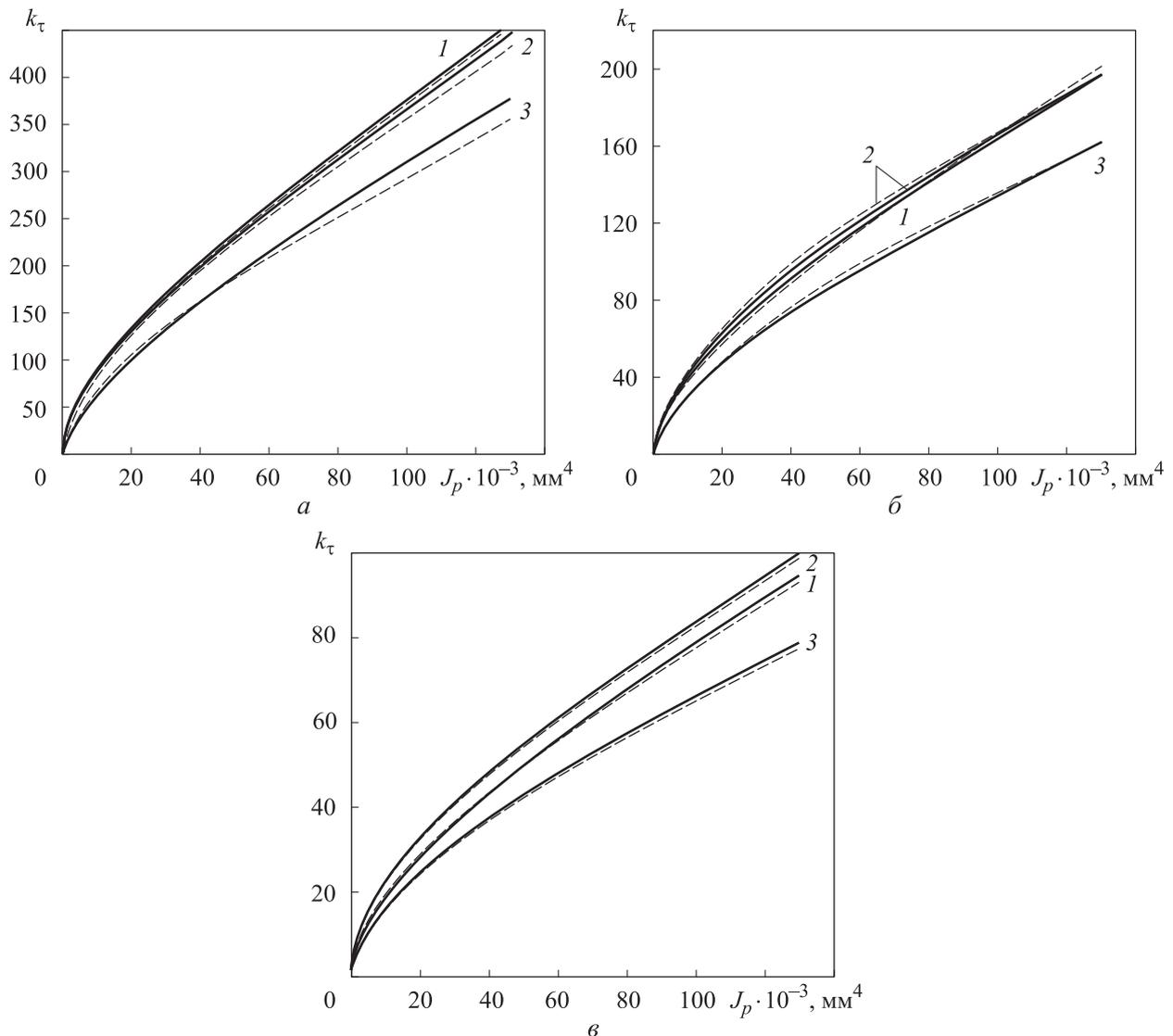


Рис. 3. Зависимости критического параметра нагрузки  $k_\tau$  от жесткости подкрепляющего набора  $J_p$  при толщине  $h = 1,152$  (а),  $1,728$  (б) и  $2,304$  мм (в) для различных оболочек: 1 и 3 — композитных с ортогональным и спиральным подкреплениями; 2 — металлической

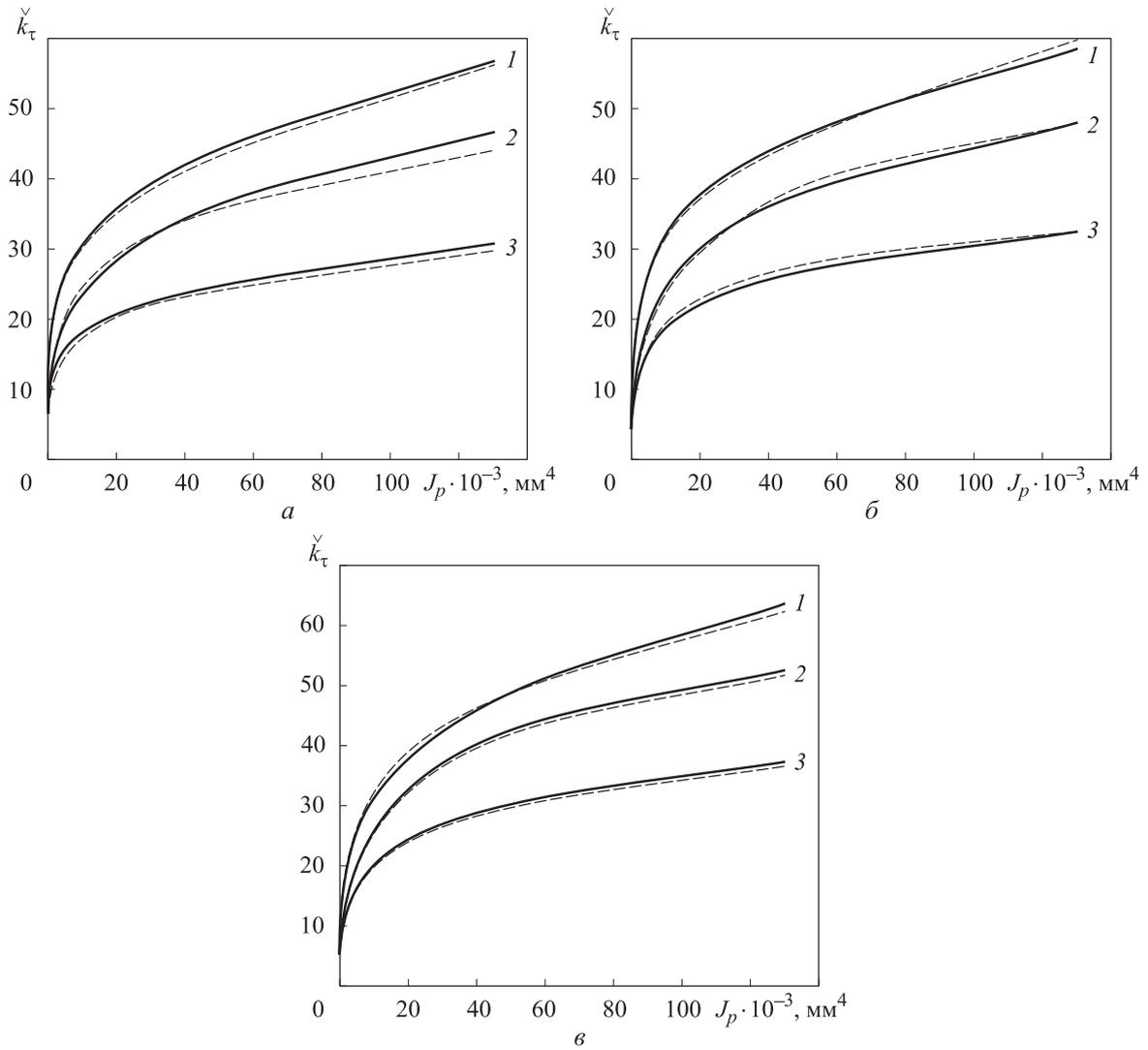


Рис. 4. Зависимости критического весового параметра  $\check{k}_\tau$  от жесткости подкрепляющего набора  $J_p$  при толщине  $h = 1,152$  (*a*),  $1,728$  (*б*) и  $2,304$  мм (*в*) для различных оболочек: 1 и 2 — композитных с ортогональным и спиральным подкреплениями; 3 — металлической

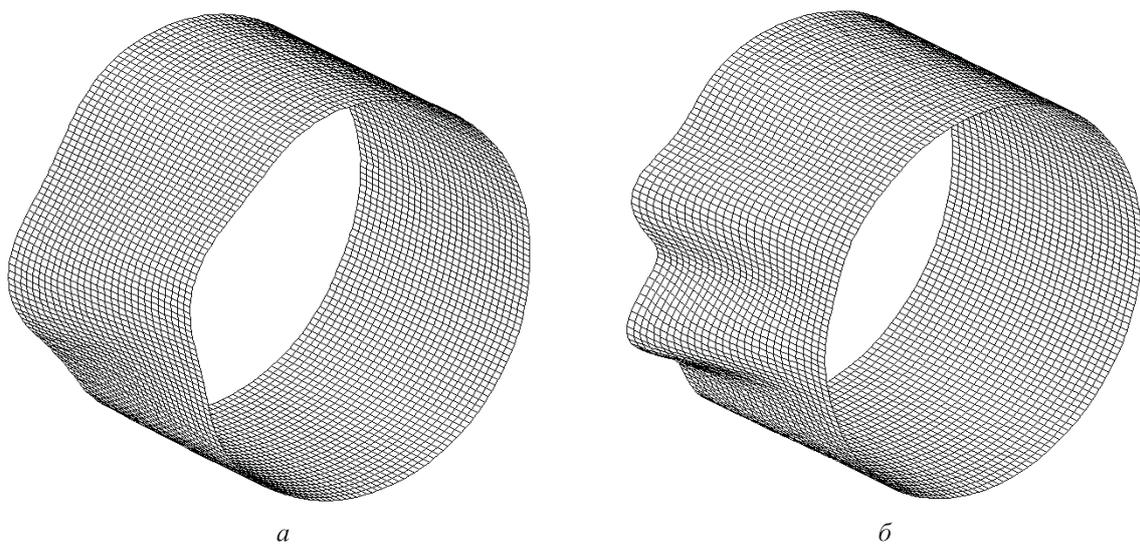


Рис. 5. Формы потери устойчивости оболочки при малой (*a*) и большой (*б*) жесткостях подкреплений

и спиральными подкреплениями при разной толщине оболочки. Критический весовой параметр  $k_{\tau} = k_{\tau}/(G/G_0)$ , где  $G$  и  $G_0$  — вес рассчитанного и эталонного отсека. Сплошными линиями на рис. 4, *a–в* обозначены результаты линейного решения, штриховыми — нелинейного.

Анализ рис. 4, *a–в* показывает, насколько эффективна в весовом отношении та или иная оболочка. Наиболее эффективны композитные оболочки с ортогональным подкреплением. Металлические оболочки практически всегда проигрывают композитным. Нелинейность в большинстве исследованных оболочек незначительна и снижает значение критического весового параметра  $k_{\tau}$ . При увеличении жесткости подкреплений весовая эффективность оболочек повышается.

Формы потери устойчивости оболочки толщиной  $h = 1,152$  мм при малой (см. табл. 2,

вариант 1) и большой (вариант 5) жесткостях подкреплений приведены на рис. 5, *a* и *б*. Оболочка теряет устойчивость на боковой поверхности от действия максимальных касательных усилий. С увеличением жесткости подкреплений число волн по окружности оболочки увеличивается.

## Выводы

1. Весовая эффективность металлических оболочек ниже, чем у композитных.
2. Весовая эффективность анизотропных оболочек меньше, чем у оболочек с ортогональным расположением подкреплений.
3. Оболочка теряет устойчивость, как правило, по общей форме от действия максимальных касательных усилий.

## Литература

- [1] Васильев В.В. *Механика конструкций из композитных материалов*. Москва, Машиностроение, 1988. 272 с.
- [2] Васильев В.В., Бунаков В.А. Проектирование сетчатых композитных цилиндрических оболочек, сжатых в осевом направлении. *Конструкции из композиционных материалов*, 2000, № 2, с. 68–77.
- [3] Бакулин В.Н., Виноградов Ю.И. Аналитическое и асимптотическое решение краевых задач механики деформирования оболочек при сосредоточенном нагружении. *Известия высших учебных заведений. Авиационная техника*, 2017, № 1, с. 14–20.
- [4] Дмитриев В.Г., Бирюков В.И., Егорова О.В. и др. Нелинейное деформирование многослойных композитных оболочек вращения при больших перемещениях и углах поворота нормали. *Известия высших учебных заведений. Авиационная техника*, 2017, № 2, с. 8–15.
- [5] Железнов Л.П., Кабанов В.В. Исследование нелинейного деформирования и устойчивости некруговых цилиндрических оболочек при осевом сжатии и внутреннем давлении. *Прикладная механика и техническая физика*, 2002, т. 43, № 4, с. 161–169.
- [6] Бойко Д.В., Железнов Л.П., Кабанов В.В. Нелинейное деформирование и устойчивость дискретно-подкрепленных овальных цилиндрических композитных оболочек при поперечном изгибе и внутреннем давлении. *Проблемы машиностроения и надежности машин*, 2014, № 6, с. 23–30.
- [7] Ванин Г.А., Семенюк Н.П., Емельянов Р.Ф. *Устойчивость оболочек из армированных материалов*. Киев, Наукова Думка, 1978. 211 с.
- [8] Кармишин А.В., Лясковец В.А., Мяченков В.И. и др. *Статика и динамика оболочечных конструкций*. Москва, Машиностроение, 1975. 376 с.
- [9] Постнов В.А., Хархурим И.Я. *Метод конечных элементов в расчетах судовых конструкций*. Ленинград, Судостроение, 1974. 341 с.
- [10] Канторович Л.В., Акилов Г.П. *Функциональный анализ в нормированных пространствах*. Москва, Физматгиз, 1959. 684 с.
- [11] Олегин И.П., Максименко В.Н. *Теоретические основы методов расчета прочности элементов конструкций из композитов*. Новосибирск, Изд-во НГТУ, 2006. 240 с.
- [12] Кабанов В.В. *Устойчивость неоднородных цилиндрических оболочек*. Москва, Машиностроение, 1982. 256 с.

## References

- [1] Vasil'yev V.V. *Mekhanika konstruksiy iz kompozitnykh materialov* [Mechanics of composite constructions]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1988. 272 p.
- [2] Vasil'yev V.V., Bunakov V.A. Proektirovanie setchatykh kompozitnykh tsilindricheskikh obolochek, szhatykh v osevom napravlenii. *Konstruksii iz kompozitsionnykh materialov*, 2000, no. 2, pp. 68–77 (in Russ.).
- [3] Bakulin V.N., Vinogradov Yu.I Analytical and asymptotic solution of boundary value problems in the mechanics of deformed shells under concentrated loading. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Aviatcionnaya tekhnika*, 2017, no. 1, pp. 14–20. (In Russ.). (Eng. version: *Russ. Aeronaut.*, 2017, vol. 60, no. 1, pp. 13–20, doi: <https://doi.org/10.3103/S1068799817010032>)
- [4] Dmitriev V.G., Biryukov V.I., Egorova O.V., et al. Nonlinear deforming of laminated composite shells of revolution under finite deflections and normal's rotation angles. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Aviatcionnaya tekhnika*, 2017, no. 2, pp. 8–15 (in Russ.). (Eng. version: *Russ. Aeronaut.*, 2017, vol. 60, no. 2, pp. 169–176, doi: <https://doi.org/10.3103/S1068799817020027>)
- [5] Zheleznov L.P., Kabanov V.V. Nonlinear deformation and stability of noncircular cylindrical shells under internal pressure and axial compression. *Prikladnaya mekhanika i tekhnicheskaya fizika*, 2002, vol. 43, no. 4, pp. 161–169 (in Russ.). (Eng. version: *J. Appl. Mech. Tech. Phy.*, 2002, vol. 43, no. 4, pp. 617–621, doi: <https://doi.org/10.1023/A:1016066001346>)
- [6] Boyko D.V., Zheleznov L.P., Kabanov V.V. Nonlinear deformation and stability of discretely-supported egg-shaped cylindrical composite shells under transversal bending and internal pressure. *Problemy mashinostroeniya i nadezhnosti mashin*, 2014, no. 6, pp. 23–30 (in Russ.). (Eng. version: *J. Mach. Manuf. Reliab.*, 2014, vol. 43, no. 6, pp. 470–476, doi: <https://doi.org/10.3103/S1052618814060181>)
- [7] Vanin G.A., Semenyuk N.P., Emel'yanov R.F. *Ustoychivost' obolochek iz armirovannykh materialov* [Shell stability of reinforced materials]. Kiev, Naukova Dumka Publ., 1978. 211 p.
- [8] Karmishin A.V., Lyaskovets V.A., Myachenkov V.I., et al. *Statika i dinamika obolocheknykh konstruksiy* [Statics and dynamics of shell constructions]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1975. 376 p.
- [9] Postnov V.A., Kharkhurim I.Ya. *Metod konechnykh elementov v raschetakh sudovykh konstruksiy* [Finite elements method in calculations of ship structures]. Leningrad, Sudostroenie Publ., 1974. 341 p.
- [10] Kantorovich L.V., Akilov G.P. *Funktsional'nyy analiz v normirovannykh prostranstvakh* [Functional analysis in normalized spaces]. Moscow, Fizmatgiz Publ., 1959. 684 p.
- [11] Olegin I.P., Maksimenko V.N. *Teoreticheskie osnovy metodov rascheta prochnosti elementov konstruksiy iz kompozitov* [Technical basis for computation of component strength of composite constructions]. Novosibirsk, Izd-vo NGTU Publ., 2006. 240 p.
- [12] Kabanov V.V. *Ustoychivost' neodnorodnykh tsilindricheskikh obolochek* [Stability of non-uniform cylindrical shells]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1982. 256 p.

Статья поступила в редакцию 13.04.2021

## Информация об авторах

**ЖЕЛЕЗНОВ Лев Петрович** — доктор технических наук, старший научный сотрудник, начальник аспирантуры. ФГУП «Сибирский научно-исследовательский институт авиации имени С.А. Чаплыгина» (630051, Новосибирск, Российская Федерация, ул. Ползунова, д. 21, e-mail: Zgeleznov@sibnia.ru).

**СЕРЬЁЗНОВ Алексей Николаевич** — доктор технических наук, профессор, научный руководитель института, заместитель директора. ФГУП «Сибирский научно-исследовательский институт авиации имени С.А. Чаплыгина» (630051, Новосибирск, Российская Федерация, ул. Ползунова, д. 21, e-mail: cvile@sibnia.ru).

## Information about the authors

**ZHELEZNOV Lev Petrovich** — Doctor of Science (Eng.), Senior Researcher, Head of Postgraduate Department. Siberian Aeronautical Research Institute named after S.A. Chaplygin (630051, Novosibirsk, Russian Federation, Polzunova St., 21, e-mail: Zgeleznov@sibnia.ru).

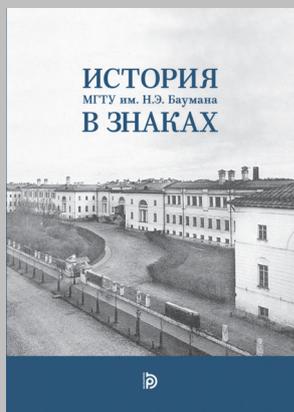
**SERIOSNOV Alexey Nikolaevich** — Doctor of Science (Eng.), Professor, Scientific Supervisor, Deputy Director. FSUE Siberian Aeronautical Research Institute named after S.A. Chaplygin (630051, Novosibirsk, Russian Federation, Polzunova St., 21, e-mail: cvile@sibnia.ru).

### Просьба ссылаться на эту статью следующим образом:

Железнов Л.П., Серьёзов А.Н. Исследование нелинейного деформирования и устойчивости композитного отсека фюзеляжа самолета при поперечном изгибе. *Известия высших учебных заведений. Машиностроение*, 2021, № 10, с. 106–116, doi: 10.18698/0536-1044-2021-10-106-116

### Please cite this article in English as:

Zheleznov L.P., Seriosnov A.N. Research on Nonlinear Deformation and Stability of an Aircraft Fuselage Composite Section under Transverse Bending. *BMSTU Journal of Mechanical Engineering*, 2021, no. 10, pp. 106–116, doi: 10.18698/0536-1044-2021-10-106-116



## Издательство МГТУ им. Н.Э. Баумана предлагает читателям юбилейное издание

### «История МГТУ им. Н.Э. Баумана в знаках»

**Авторы: Г.А. Базанчук, С.М. Климов, Е.А. Старожук**

Эта книга — попытка проиллюстрировать историю МГТУ им. Н.Э. Баумана памятниками фалеристики — вспомогательной исторической дисциплины, занимающейся изучением орденов, медалей, знаков, жетонов. О наградах Университета и наградах, вручаемых Университетом, о памятных и юбилейных знаках, связанных с ним, ведется рассказ в этом издании. Авторами проделана большая работа по поиску и систематизации материала, что позволило описать более тысячи знаков и значков.

Книга будет интересна широкому кругу читателей, и прежде всего — коллекционерам-фалеристам; выпускникам прошлых лет и сотрудникам Университета, которые хотели бы вспомнить о ярких событиях, добрых традициях и интересных фактах из жизни их альма-матер; современным студентам, живо интересующимся историей замечательного вуза, в котором им предстоит учиться и стать дипломированными инженерами; коллегам из родственных вузов, желающим установить дружеские связи с МГТУ им. Н.Э. Баумана, сопоставить свой опыт с нашим; руководителям производственных и научных организаций, заинтересованных в талантливых и квалифицированных молодых специалистах; молодым людям, получающим среднее образование и стоящим перед выбором жизненного пути, и их родителям.

### По вопросам приобретения обращайтесь:

105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1.  
Тел.: +7 499 263-60-45, факс: +7 499 261-45-97;  
press@baumanpress.ru; <https://bmstu.press>