

# Машиностроение и машиноведение

УДК 531.391

doi: 10.18698/0536-1044-2021-10-3-15

## Исследование автоколебательных процессов в зоне взаимодействия эластичной шины с твердым опорным основанием

**М.М. Жилейкин**

МГТУ им. Н.Э. Баумана

## Research of Self-Oscillating Processes in the Zone of Interaction of an Elastic Tire with a Solid Support Base

**M.M. Zhileykin**

Bauman Moscow State Technical University

При контактном взаимодействии двух тел могут возникнуть автоколебания или релаксационные колебания, которые представляют собой колебания частей тел относительно друг друга. Особый интерес представляет изучение процессов, протекающих в зоне взаимодействия эластичной шины с твердым опорным основанием, так как они напрямую влияют на безопасность движения колесных транспортных средств. Рассмотрены условия возникновения автоколебательных процессов в зоне взаимодействия эластичной шины с твердым опорным основанием в тяговом, ведомом и тормозном режимах качения колеса. Установлено, что появление автоколебательного режима в зоне взаимодействия эластичной шины с твердым опорным основанием является полезным диагностическим признаком, обеспечивающим распознавание развития процесса потери сцепления колеса с опорным основанием при заносе задней оси на ранних стадиях.

**Ключевые слова:** автоколебательный процесс, эластичная шина, твердое опорное основание, диагностический признак

When two bodies interact in contact, self-oscillations or relaxation vibrations can occur, which are vibrations of parts of bodies relative to each other. The study of the processes occurring in the zone of an elastic tire interaction with a solid support base is of particular interest, since they directly affect the safety of movement of wheeled vehicles. The aim of the work is to study the conditions for the occurrence of self-oscillating processes in the zone of interaction of an elastic tire with a solid support base in three rolling modes: traction, driven, and braking. It has been established that the appearance of a self-oscillating mode in the zone of interaction of an elastic tire with a solid support base is a useful diagnostic feature providing recognition of the development of the process of losing adhesion of a wheel with a support base when the rear axle skids at early stages.

**Keywords:** self-oscillating process, elastic tire, solid support base, diagnostic feature

При контактном взаимодействии двух тел могут возникнуть автоколебания или релаксационные колебания, представляющие собой колебания частей тел относительно друг друга [1, 2].

Самыми распространенными видами автоколебаний являются колебания, обусловленные трением. Наиболее интересным представляется изучение процессов, протекающих в зоне взаимодействия эластичной шины с твердым опорным основанием (далее зона взаимодействия), так как эти процессы напрямую влияют на безопасность движения колесных транспортных средств [3–6].

Появление автоколебательного режима в зоне взаимодействия может послужить полезным диагностическим признаком развития процесса потери сцепления колеса с опорным основанием. Особый интерес вызывает превентивное распознавание зарождения этого процесса, что позволяет системам активной безопасности (например, системам динамической стабилизации) среагировать на ранней стадии и не допустить развития процесса потери устойчивости или, по крайней мере, свести к минимуму его последствия [7–13].

Цель работы — изучение условий возникновения автоколебательных процессов в зоне взаимодействия и установление возможности использования этих условий в качестве диагностических признаков потери сцепления шины с опорным основанием.

**Критерий возникновения автоколебательного режима.** Для выявления условий возникновения автоколебательного режима в некоторой области, где поведение объекта описывается системой дифференциальных уравнений с нелинейной правой частью

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = f_1(y_1, y_2, \dots, y_n); \\ \dot{y}_2 = f_2(y_1, y_2, \dots, y_n), \end{cases} \quad (1)$$

воспользуемся критерием Бендиксона [14], согласно которому для рассматриваемых условий, если выражение

$$Q = \sum_{i=1}^2 \frac{\partial f_i}{\partial y_i}$$

не меняет знак и не обращается тождественно в ноль, то в этой области система (1) не может иметь предельных циклов и замкнутых фазовых траекторий (т. е. автоколебательные режимы возникнуть не могут).

Различают случаи мягкого и жесткого возбуждения автоколебаний. В первом случае режим автоколебаний появляется при почти любых начальных условиях движения, во втором — лишь при их определенных сочетаниях.

Критерием  $L$  отнесения колебательной системы к первому или второму случаю возбуждения автоколебаний может служить знак выражения [14] для системы (1) с одной степенью свободы (как будет показано далее при появлении автоколебательного режима в зоне взаимодействия только одно из дифференциальных уравнений системы (1) имеет ненулевую производную правой части):

$$L = \frac{1}{16} \frac{\partial^3 f}{\partial y^3} + \frac{1}{16\omega} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}, \quad (2)$$

где  $\omega$  — частота установившихся автоколебаний,  $\omega > 0$ .

При  $L < 0$  имеет место мягкий режим возникновения автоколебаний, при  $L > 0$  — жесткий.

**Математическая модель фрикционного взаимодействия эластичного колеса с твердым опорным основанием.** Для исследования динамики фрикционных систем применяют теорию нелинейных дифференциальных уравнений, поэтому изучение фрикционных автоколебаний в сложных системах (особенно с несколькими степенями свободы) оказывается сложной и часто неразрешимой аналитическими методами задачей. В связи с этим исследование фрикционных автоколебательных систем разумно начать с рассмотрения автоколебаний в системе с тремя степенями свободы.

Расчетная схема взаимодействия эластичного колеса с твердым опорным основанием приведена на рис. 1. Рассмотрим два тела, первое 3 из которых представляет собой массу  $M$  поддрессоренных частей автомобиля, приходящуюся на колесо. Второе тело 1 массой  $m$  играет роль скользящего колеса. Тела связаны между собой пружиной 4 жесткостью  $s$ .

Второе тело проскальзывает относительно опорного основания 5, при этом на него действует сила трения  $F$ , зависящая от скорости скольжения колеса  $v_{2ск}$  относительно опорного основания. Первое тело может проскальзывать с помощью роликов 2 относительно второго тела без трения в пределах действия упругой силы, развиваемой пружиной жесткостью  $s$ .

Опорное основание представим в виде нерастяжимой и невесомой ленты. Вращение колеса  $b$  с угловой скоростью  $\omega_k$  вызывает движение опорного основания с линейной скоростью  $\omega_k r_k$  (где  $r_k$  — расстояние от центра колеса до опорного основания), т. е. взаимодействие колеса  $b$  и ленты опорного основания происходит без относительного скольжения. Тогда скорость  $v_{2ск} = v_2 - \omega_k r_k$ , где  $v_2$  — линейная скорость второго тела в неподвижной системе координат.

Движение обоих тел имеет поступательный характер. Введем координаты для перемещений тел. Пусть  $x_1$  и  $x_2$  — перемещение первого и второго тела в неподвижной системе координат. Будем полагать, что при  $x_1 = x_2 = 0$  пружина является недеформированной и нет проскальзывания массы второго тела относительно опорного основания. При этом сила трения  $F = 0$ .

Разработанная расчетная схема взаимодействия эластичного колеса с твердым опорным основанием позволяет проводить исследование процессов, протекающих в зоне взаимодействия при трех режимах качения колеса — тяговом, ведомом и тормозном.

**Модель трения.** Наиболее распространенной является модель сухого трения Кулона, когда сила трения покоя превосходит силу трения скольжения (рис. 2, а). Такая модель трения не имеет производных при нулевой скорости скольжения, что приводит к появлению зон застоя и потере единственности решений, вызванных переменной структурой правых частей дифференциальных уравнений.

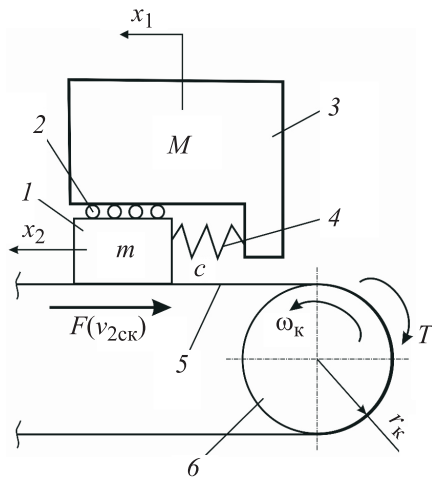


Рис. 1. Расчетная схема взаимодействия эластичного колеса с твердым опорным основанием

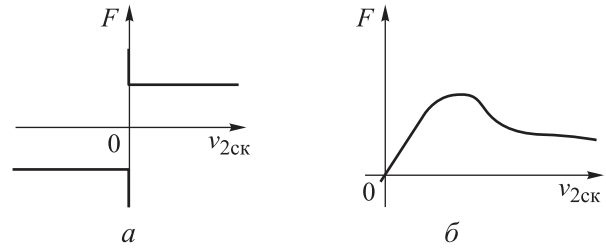


Рис. 2. Зависимости силы трения  $F$  от относительной скорости скольжения  $v_{2ск}$  для модели сухого трения Кулона (а) и магической формулы Пасейки (б)

Динамику колесных машин часто описывают с помощью модели взаимодействия шин с опорным основанием, называемую магической формулой Пасейки (рис. 2, б) [15]. С математической точки зрения использование законов трения подобного рода приводит к сложности аналитического исследования, вследствие чего применяют численные методы исследования динамики систем с нелинейным трением [14].

В данной задаче использованы две разные модели трения для частичного и полного скольжения колеса в зоне взаимодействия.

При частичном скольжении колеса будем использовать модель, аналогичную магической формуле Пасейки, но в более удобном для аналитического исследования виде [16]. Силу трения в зоне взаимодействия определяем по формуле

$$F = \mu(s) F_z, \tag{3}$$

где  $\mu$  — коэффициент сцепления;  $s$  — скольжение колеса;  $F_z$  — вертикальная реакция в зоне взаимодействия.

Скольжение колеса  $s$  вычисляем следующим образом:

- для тормозного режима качения колеса

$$s = \frac{v_2 - \omega_k r_k}{v_2}; \tag{4}$$

- для тягового и ведомого режимов качения колеса

$$s = \frac{v_2 - \omega_k r_k}{\omega_k r_k}. \tag{5}$$

Коэффициент сцепления [16]

$$\mu(s) = 2\mu_p s_p \left( \frac{s}{s_p^2} + s^2 \right), \tag{6}$$

где  $\mu_p$ ,  $s_p$  — константы.

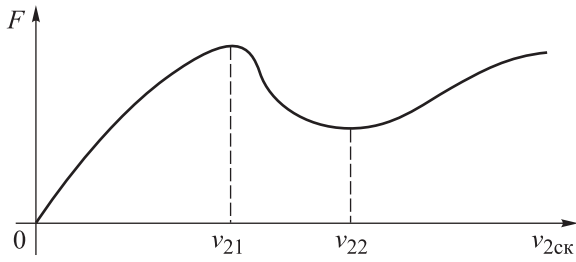


Рис. 3. Зависимость силы трения  $F$  от относительной скорости скольжения  $v_{2ck}$  для модели (7)

При полном скольжении колеса будем использовать модель трения (рис. 3), которая зависит от относительной скорости  $v_{2ck}$  как многочлен пятой степени [1]

$$F(v_{2ck}) = kv_{2ck}(1 - g_1v_{2ck}^2 + g_2v_{2ck}^4), \quad (7)$$

где  $k, g_1, g_2$  — постоянные положительные коэффициенты.

Примем

$$g_1 = \frac{v_{21}^2 + v_{22}^2}{v_{21}^2 v_{22}^2}; \quad g_2 = \frac{1}{5v_{21}^2 v_{22}^2}; \quad v_{22} > v_{21} > 0. \quad (8)$$

Тогда сила трения  $F$  в области положительных значений аргумента  $v_{2ck}$  имеет локальный максимум в точке  $v_{21}$  и локальный минимум в точке  $v_{22}$ , убывая в интервале  $(v_{21}, v_{22})$ . Допустим, что при  $v_{2ck} > 0$  сила трения  $F > 0$ . Это условие будет выполнено, если ее локальный минимум в точке  $v_{22}$  окажется больше нуля, что будет справедливо в случае соблюдения неравенства

$$15v_{21}^2 v_{22}^2 - 5(v_{21}^2 + v_{22}^2)v_{22}^2 + 3v_{22}^4 > 0 \rightarrow \\ \rightarrow 5v_{21}^2 > v_{22}^2 \quad (9)$$

или

$$g_1^2 - 4g_2 < 0.$$

В дальнейшем будем считать, что функция  $F(v_{2ck})$  удовлетворяет условиям (8) и (9).

Предложенную модель трения, являющуюся простейшей аппроксимацией модели трения Кулона, следует применять в тех случаях, когда сила трения покоя превосходит силу трения скольжения. Использование этой модели, как будет показано далее, позволит провести аналитическое исследование возникновения автоколебаний.

**Тяговый и ведомый режимы качения колеса.** Для расчетной схемы, приведенной на рис. 1,

рассмотрим тяговый и ведомый режимы качения колеса.

*Частичное скольжение колеса.* На основании теорем о сохранении количества движения и момента количества движения запишем следующие дифференциальные уравнения:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = v_1; \\ \dot{v}_1 = \frac{c}{M}(x_1 - x_2); \\ \dot{x}_2 = v_2; \\ \dot{v}_2 = \frac{1}{m}(F - cx_1 + cx_2); \\ \dot{\phi}_k = \omega_k; \\ \dot{\omega}_k = \frac{1}{J_k}(T - Fr_k), \end{cases} \quad (10)$$

где  $J_k$  — момент инерции колеса относительно оси его вращения;  $T$  — крутящий или тормозной момент, приложенный к колесу (см. рис. 1).

Сила трения  $F$  определяется по формуле (3), коэффициент сцепления  $\mu(s)$  — по выражению (6), скольжение  $s$  — по формуле (5).

Рассмотрим возможность возникновения автоколебаний в рассматриваемом режиме качения колеса с помощью критерия Бендиксона. Для поступательного перемещения первого тела (см. рис. 1) запишем

$$Q = \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial v_1} \equiv 0. \quad (11)$$

Тождественное равенство нулю функции  $Q$  означает возможность возникновения автоколебаний поступательного перемещения первого тела.

Для поступательного перемещения второго тела (см. рис. 1)

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_2} = 0; \\ \frac{\partial f_2}{\partial v_2} = \frac{2F_z}{m} \left[ \frac{\mu_p}{s_p} \frac{1}{\omega_k r_k} + 4\mu_p s_p \left( \frac{v_2}{\omega_k r_k} - 1 \right) \right] > 0.$$

Для вращательного движения колеса

$$\frac{\partial f_1}{\partial \phi_k} = 0; \\ \frac{\partial f_2}{\partial \omega_k} = \frac{2F_z}{J_k} \frac{v_2}{\omega_k^2} \left[ \frac{\mu_p}{s_p} + 2\mu_p s_p \left( \frac{v_2}{\omega_k r_k} - 1 \right) \right] > 0.$$

Получаем  $Q > 0$  как для поступательного перемещения второго тела, так и для вращатель-

ного движения колеса, т. е. функция является знакопостоянной и в ноль тождественно не обращается. Следовательно, можно сделать вывод, что в тяговом и ведомом режимах качения колеса при его частичном скольжении в зоне взаимодействия автоколебательные процессы возникнуть не могут.

*Полное скольжение колеса.* Для системы уравнений (10) силу трения  $F$  будем определять по формулам (7)–(9). Тогда для поступательного перемещения первого тела (см. рис. 1) снова получаем выражение (11) для функции  $Q$ , что также означает возможность возникновения автоколебаний поступательного перемещения первого тела.

Для поступательного перемещения второго тела

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_1}{\partial x_2} &= 0; \\ \frac{\partial f_2}{\partial v_2} &= \frac{k}{m} [1 - 3g_1 v_{2\text{ск}}^2 + 5g_2 v_{2\text{ск}}^4]. \end{aligned} \quad (12)$$

Чтобы сделать заключение о знакопеременности функции  $Q$ , проведем исследование корней уравнения

$$5g_2 v_{2\text{ск}}^4 - 3g_1 v_{2\text{ск}}^2 + 1 = 0. \quad (13)$$

Введем замену переменных  $z = v_{2\text{ск}}^2$ . Тогда уравнение (13) примет вид

$$5g_2 z^2 - 3g_1 z + 1 = 0. \quad (14)$$

Найдем дискриминант уравнения (14)

$$D = 9g_1^2 - 20g_2. \quad (15)$$

Если дискриминант  $D > 0$ , то уравнение (14) будет иметь два действительных корня, а функция  $Q$  станет знакопеременной. Если  $D = 0$ , то уравнение (14) будет иметь один действительный корень, а функция  $Q$  станет знакопостоянной. Если  $D < 0$ , то уравнение (14) не будет иметь действительных корней, а функция  $Q$  станет знакопостоянной.

Из выражения (15) с учетом формул (8) и (9) следует

$$D = (v_{21} - v_{22})^2 > 0. \quad (16)$$

Следовательно, функция  $Q$  знакопеременна, что указывает на возникновение автоколебаний для поступательного перемещения центра колеса в тяговом и ведомом режимах качения при его полном скольжении.

Проведем исследование режима возникновения автоколебаний по критерию (2) для поступательного перемещения центра колеса:

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{16} \left( \frac{6k}{m} g_1 - \frac{60k}{m} v_{2\text{ск}}^2 \right) + \\ &+ \frac{1}{16\omega_k} \left( \frac{6k}{m} g_1 v_{2\text{ск}} - \frac{20k}{m} v_{2\text{ск}}^3 \right) < 0. \end{aligned}$$

Таким образом, в тяговом и ведомом режимах имеем мягкий режим возникновения автоколебаний для поступательного перемещения центра колеса. В этом случае условия появления мягкого возбуждения автоколебаний возникают в процессе движения автомобиля, когда скорость скольжения колес попадает в область, характеризуемую увеличением силы трения при уменьшении скорости скольжения, т. е. когда  $v_{21} < v_2 < v_{22}$  (см. рис. 3). В дальнейшем при снижении скорости автомобиля автоколебания пропадают.

Для вращательного движения колеса

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_1}{\partial \varphi_k} &= 0; \\ \frac{\partial f_2}{\partial \omega_k} &= -\frac{kr_k}{m} [1 - 3g_1 v_{2\text{ск}}^2 + 5g_2 v_{2\text{ск}}^4]. \end{aligned}$$

Далее выкладки (13)–(16) и вывод о возникновении автоколебаний для вращательного движения колеса в тяговом и ведомом режимах качения колеса при его полном скольжении полностью соответствуют предыдущему случаю.

Проведем исследование режима возникновения автоколебаний по критерию (2) для вращательного движения колеса:

$$\begin{aligned} L &= \frac{r_k^3}{16} \left( \frac{6k}{m} g_1 - \frac{60k}{m} v_{2\text{ск}}^2 \right) + \\ &+ \frac{r_k^2}{16\omega_k} \left( -\frac{6k}{m} g_1 v_{2\text{ск}} + \frac{20k}{m} v_{2\text{ск}}^3 \right) < 0, \end{aligned}$$

что свидетельствует о мягком режиме возникновения автоколебаний.

**Тормозной режим качения колеса.** Для расчетной схемы, приведенной на рис. 1, рассмотрим тормозной режим качения колеса.

*Частичное скольжение колеса (без блокировки).* На основании теорем о сохранении количества движения и момента количества движе-

ния запишем следующие дифференциальные уравнения:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = v_1; \\ \dot{v}_1 = \frac{c}{M}(-x_1 + x_2); \\ \dot{x}_2 = v_2; \\ \dot{v}_2 = \frac{1}{m}(-F + cx_1 - cx_2); \\ \dot{\varphi}_k = \omega_k; \\ \dot{\omega}_k = \frac{1}{J_k}(Fr_k - T). \end{cases}$$

Сила трения  $F$  определяется по формуле (3), коэффициент сцепления  $\mu(s)$  — по выражению (6), скольжение  $s$  — по формуле (5).

Рассмотрим возможность возникновения автоколебаний в рассматриваемом режиме качения колеса с помощью критерия Бендиксона.

Для поступательного перемещения первого тела (см. рис. 1) снова получаем выражение (11) для функции  $Q$ , что также означает возможность возникновения автоколебаний поступательного перемещения первого тела.

Для поступательного перемещения второго тела

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_1}{\partial x_2} &= 0; \\ \frac{\partial f_2}{\partial v_2} &= \frac{2F_z}{m} \frac{\omega_k r_k}{v_2^2} \mu_p \left[ \frac{1}{s_p} + 2s_p \left( 1 - \frac{\omega_k r_k}{v_2} \right) \right] > 0. \end{aligned}$$

Для вращательного движения колеса

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_1}{\partial \varphi_k} &= 0; \\ \frac{\partial f_2}{\partial \omega_k} &= -\frac{2F_z}{J_k} \frac{r_k^2}{v_2} \mu_p \left[ \frac{1}{s_p} + 2s_p \left( 1 - \frac{\omega_k r_k}{v_2} \right) \right] < 0. \end{aligned}$$

В последних двух случаях функция  $Q$  знакопостоянна и в ноль тождественно не обращается. Следовательно, можно сделать вывод, что в тормозном режиме качения колеса при его частичном скольжении в зоне взаимодействия автоколебательные процессы возникнуть не могут.

*Полное скольжение колеса (заблокировано).* На основании теорем о сохранении количества движения и момента количества движения запишем следующие дифференциальные уравнения:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = v_1; \\ \dot{v}_1 = \frac{c}{M}(-x_1 + x_2); \\ \dot{x}_2 = v_2; \\ \dot{v}_2 = \frac{1}{m}(-F + cx_1 - cx_2). \end{cases}$$

Для системы уравнений (10) силу трения  $F$  будем определять по формулам (7)–(9). Тогда снова приходим к системе уравнений (12) с выводом о том, что функция  $Q$  знакопеременна, что указывает на возникновение автоколебаний для поступательного перемещения второго тела (см. рис. 1) в зоне взаимодействия в тормозном режиме качения колеса при его блокировке.

Проведем исследование режима возникновения автоколебаний по критерию (2) для поступательного перемещения второго тела:

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{16} \left( -\frac{6k}{m} g_1 + \frac{60k}{m} v_{2\text{ск}}^2 \right) + \\ &+ \frac{1}{16\omega} \left( -\frac{6k}{m} g_1 v_{2\text{ск}} + \frac{20k}{m} v_{2\text{ск}}^3 \right) > 0. \end{aligned}$$

Таким образом, в тормозном режиме имеем жесткий режим возникновения автоколебаний в зоне взаимодействия. В этом случае условия возникновения жесткого возбуждения автоколебаний появляются в процессе торможения автомобиля, когда скорость скольжения заблокированных колес попадает в область, характеризующую уменьшением силы трения при снижении скорости скольжения, т. е. когда  $0 < v_2 < v_{21}$  (см. рис. 3).

**Диагностический признак выявления автоколебательного режима в зоне взаимодействия.** Основной причиной возникновения автоколебаний в зоне взаимодействия является постоянное изменение знака скольжения  $s$  (формулы (4) и (5)), т. е. изменение режима качения колеса. Смена знака приводит к изменению направления приложения реакции в зоне взаимодействия в горизонтальной плоскости, т. е. к изменению угла скольжения  $\alpha$  (рис. 4).

Оценку угла скольжения можно провести по формуле

$$\alpha = \arccos \left( \frac{\mu_{sx}}{\sqrt{\mu_{sx}^2 + \mu_{sy}^2}} \right), \quad (17)$$

где  $\mu_{sx}$  и  $\mu_{sy}$  — коэффициенты трения частичного скольжения в направлении осей  $X_t$  и  $Y_t$ .

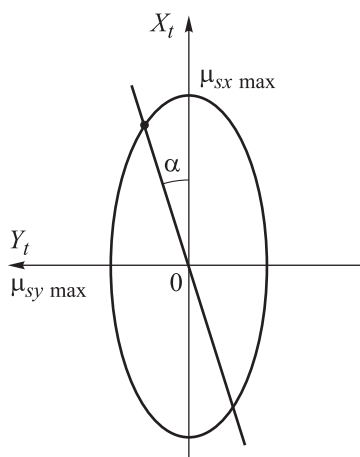


Рис. 4. Схема эллипса трения в зоне взаимодействия:  $\alpha$  — угол между вектором скорости скольжения центра колеса и осью  $X_t$  (угол скольжения);  $\mu_{sx\max}$  и  $\mu_{sy\max}$  — коэффициенты трения полного скольжения в направлении осей  $X_t$  и  $Y_t$

Коэффициенты трения частичного скольжения в направлении осей  $X_t$  и  $Y_t$  можно оценить как

$$\begin{aligned} \mu_{sx} &= \frac{R_x}{R_z} \approx \frac{j_x}{j_z - g}; \\ \mu_{sy} &= \frac{R_y}{R_z} \approx \frac{j_y}{j_z - g}, \end{aligned} \tag{18}$$

где  $R_x$ ,  $R_z$  и  $R_y$  — соответственно продольная, вертикальная и поперечная реакция в зоне взаимодействия;  $j_x$ ,  $j_z$  и  $j_y$  — соответственно продольная, вертикальная и поперечная составляющая линейного ускорения центра колеса;  $g$  — ускорение свободного падения.

Таким образом, выражения (17) и (18) можно считать вычислительной процедурой для оценки угла скольжения  $\alpha$ .

**Проверка реализуемости и оценка практической ценности метода выявления автоколебательного режима в зоне взаимодействия**

**методами имитационного моделирования.** Для исследования процесса зарождения и развития автоколебаний в зоне взаимодействия проведены теоретические исследования движения автомобиля полной массой 2400 кг с помощью имитационного математического моделирования.

Особенности математической модели движения автомобиля изложены в работах [17–22]. Под термином «опорное основание» понимают твердую неровную недеформируемую опорную поверхность, которую можно охарактеризовать как асфальтобетонное шоссе. Смоделированы три режима движения автомобиля, параметры которых приведены в таблице.

В первом и втором режимах движения (см. таблицу) рассмотрим процесс возникновения автоколебаний в зоне взаимодействия совместно с диагностическим признаком  $D_v$  [23], позволяющим распознавать появление заноса задней оси или снос передней оси. Параметр  $D_v = \|\mathbf{v}_{C1}\| - \|\mathbf{v}_{C2}\|$  представляет собой модуль разности оценок векторов линейных скоростей центра масс автомобиля, полученных с использованием линейной скорости центра передней оси (вектор  $\mathbf{v}_{C1}$ ) и линейной скорости центра задней оси (вектор  $\mathbf{v}_{C2}$ ).

При  $D_v = \|\mathbf{v}_{C1}\| - \|\mathbf{v}_{C2}\| > 0$  диагностируют занос передней оси, при  $D_v = \|\mathbf{v}_{C1}\| - \|\mathbf{v}_{C2}\| < 0$  — занос задней оси.

**Вход в поворот с заносом задней оси.** Траектория движения автомобиля в повороте с заносом задней оси изображена на рис. 5. Для колеса, катящегося в ведомом режиме зависимость угла скольжения  $\alpha$  от времени приведена на рис. 6, а, для колеса, катящегося в ведущем режиме, — на рис. 6, б. Зависимость диагностического признака  $D_v$  от времени показана на рис. 7.

**Параметры режимов движения автомобиля**

| Номер режима | Характер движения                     | Режим качения колеса | Сцепные свойства опорного основания                | Начальная скорость движения, км/ч |
|--------------|---------------------------------------|----------------------|--|-----------------------------------|
| 1            | Вход в поворот с заносом задней оси   | Тяговый, ведомый     | Сухой асфальт, $\mu_{sx\max} = \mu_{sy\max} = 0,8$ | 35                                |
| 2            | Вход в поворот со сносом передней оси | То же                | То же  | 35                                |
| 3            | Торможение в повороте                 | Тормозной            | »  | 110                               |

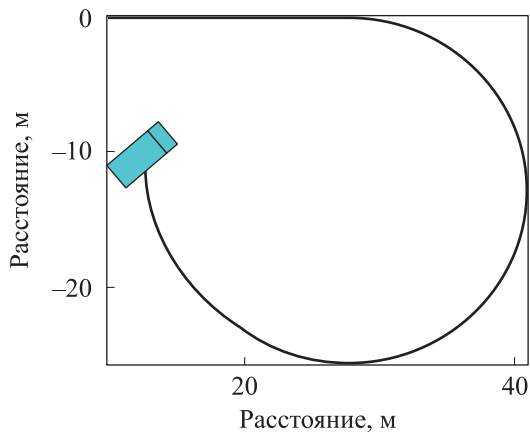


Рис. 5. Траектория движения автомобиля в повороте с заносом задней оси

Анализ рис. 5–7 показывает, что для колеса, катящегося в ведомом режиме, в процессе заноса задней оси (см. рис. 7,  $D_v < 0$ ) угол скольжения  $\alpha = 180^\circ$ , для колеса, катящегося в ведущем режиме, он меняется от 0 до  $180^\circ$ . При этом автоколебательный процесс наблюдается как перед началом процесса заноса, так и после его завершения.

Особенно ценной является начальная стадия, так как автоколебания возникают раньше, чем диагностический признак  $D_v$  распознает занос задней оси. Это дает системе динамической стабилизации дополнительный запас времени на превентивное реагирование и недопущение развития опасного процесса. Таким образом, выражения (16) и (17) являются качественным диагностическим признаком распознавания заноса задней оси автомобиля.

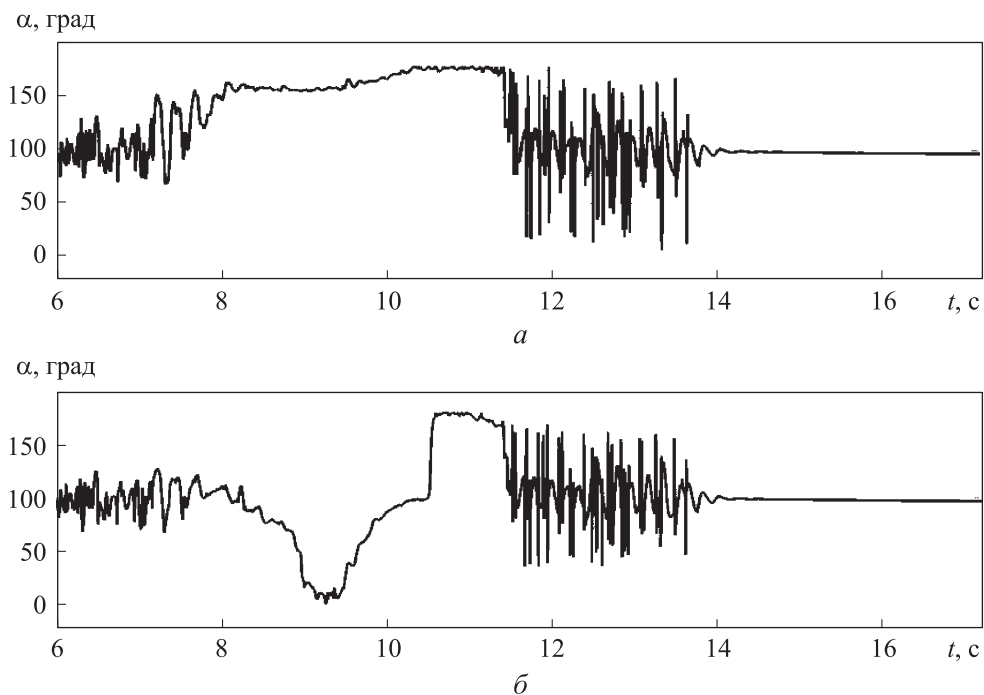


Рис. 6. Зависимости угла скольжения  $\alpha$  от времени  $t$  при движении автомобиля в повороте с заносом задней оси для колеса, катящегося в ведомом (а) и ведущем (б) режимах

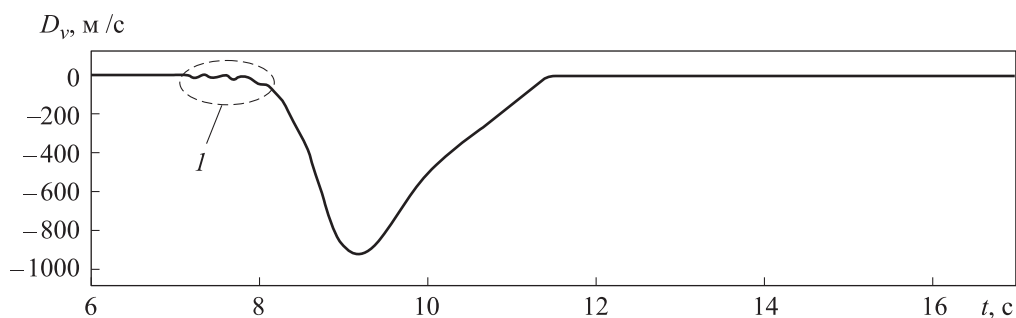


Рис. 7. Зависимость диагностического признака  $D_v$  от времени  $t$  при движении автомобиля в повороте с заносом задней оси (1 — зарождение процесса заноса)



**Вход в поворот со сносом передней оси.** Траектория движения автомобиля в повороте со сносом передней оси изображена на рис. 8. Для колеса, катящегося в ведомом режиме, зависимость угла скольжения  $\alpha$  от времени приведена на рис. 9, а, для колеса, катящегося в ведущем режиме, — на рис. 9, б. Зависимость диагностического признака  $D_v$  от времени показана на рис. 10.

Анализ рис. 8–10 показывает, что в процессе сноса передней оси (см. рис. 10,  $D_v > 0$ ) для колес, катящихся как в ведомом, так и ведущем режиме, периодически возникают автоколебания угла скольжения  $\alpha$ , но какой-либо дополнительной ценной диагностической информации эти процессы в себе не несут.

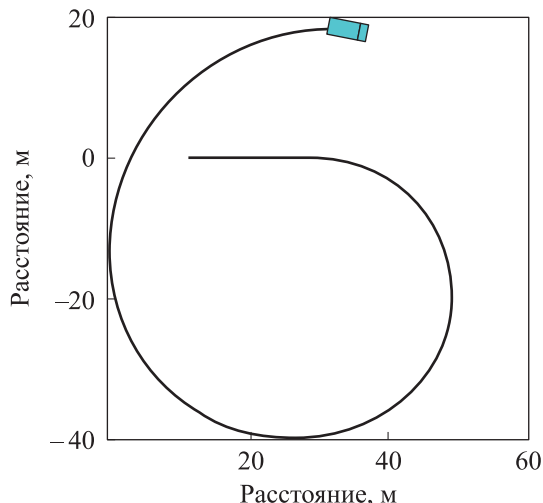


Рис. 8. Траектория движения автомобиля в повороте со сносом передней оси

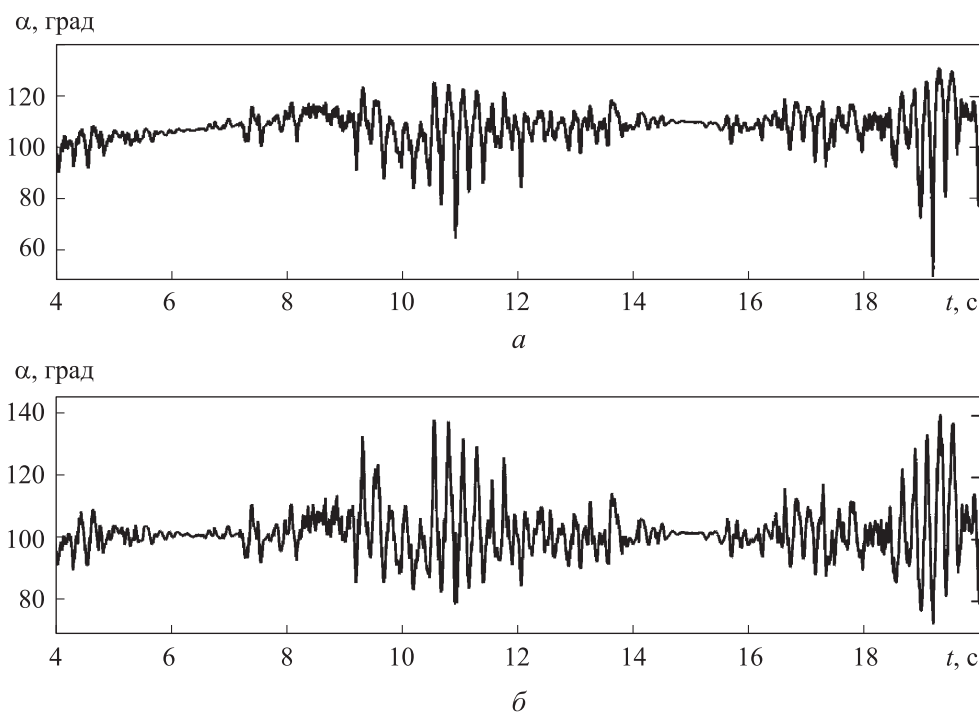


Рис. 9. Зависимость угла скольжения  $\alpha$  от времени  $t$  при движении автомобиля в повороте со сносом передней оси для колеса, катящегося в ведомом (а) и ведущем (б) режимах

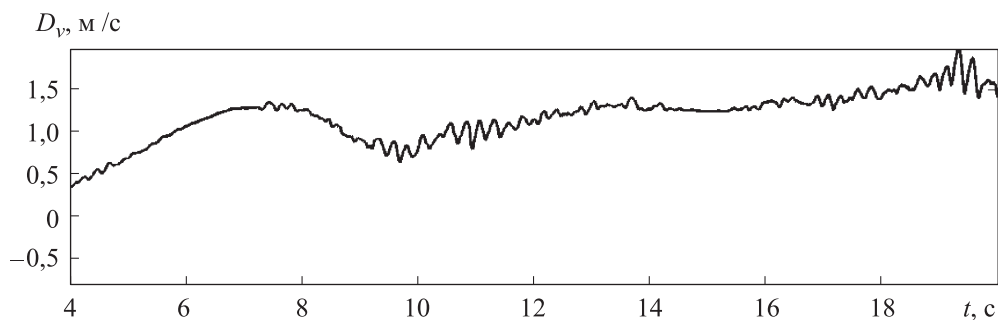


Рис. 10. Зависимость диагностического признака  $D_v$  от времени при движении автомобиля в повороте со сносом передней оси

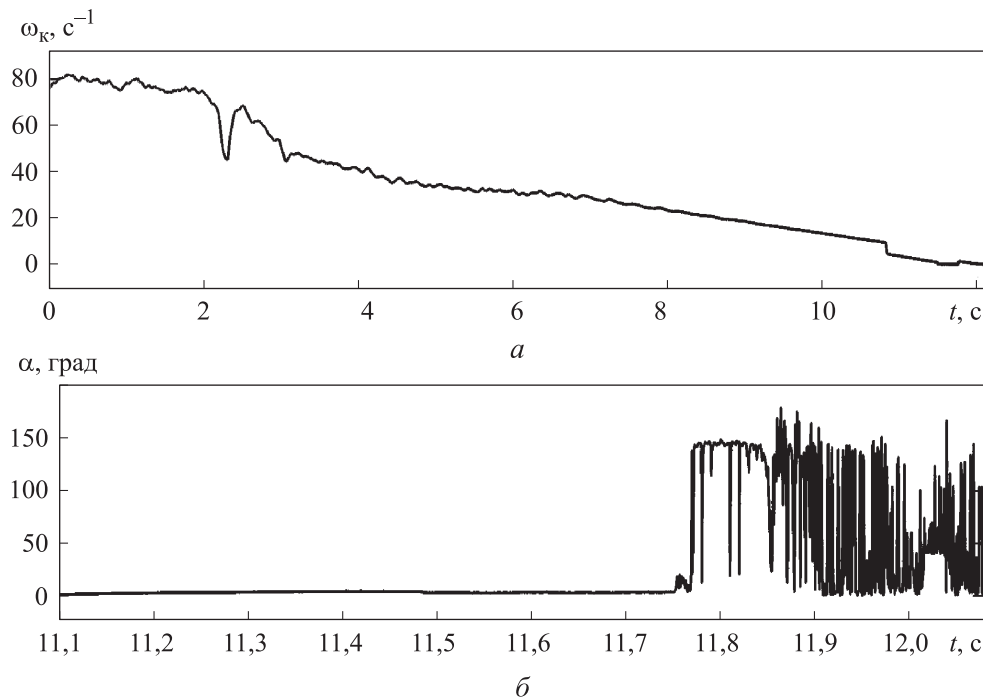


Рис. 11. Зависимости исследуемых параметров от времени  $t$ :  
 $a$  — угловой скорости вращения колеса  $\omega_k$ ;  $b$  — угла скольжения  $\alpha$  колеса, катящегося в тормозном режиме

**Торможение в повороте.** Зависимость угловой скорости вращения колеса от времени показана на рис. 11,  $a$ , а временная зависимость угла скольжения  $\alpha$  того же колеса, катящегося в тормозном режиме, — на рис. 11,  $b$ .

Как видно из рис. 11,  $a$  и  $b$ , автоколебательный процесс возникает при блокировке колеса ( $t = 11,75$  с) в случае уменьшения скорости его скольжения. Однако эта информация не представляет никакой диагностической ценности.

## Выводы

1. Рассмотрены условия возникновения автоколебательных процессов в зоне взаимодействия эластичной шины с твердым опорным основанием при трех режимах качения колеса — тяговом, ведомом и тормозном. Методами аналитических исследований установлено следующее:

- в тяговом, ведомом и тормозном режимах качения колеса при его частичном скольжении

в зоне взаимодействия автоколебательные процессы возникнуть не могут;

- в тяговом и ведомом режимах наблюдается мягкий режим возникновения автоколебаний в зоне взаимодействия, когда скорость скольжения колес попадает в область, где с ее уменьшением увеличивается сила трения;

- в тормозном режиме имеет место жесткий режим возникновения автоколебаний в зоне взаимодействия, когда скорость скольжения заблокированных колес попадает в область, где с ее уменьшением сила трения снижается.

2. Появление автоколебательного режима в зоне взаимодействия является полезным диагностическим признаком, обеспечивающим распознавание развития процесса потери сцепления колеса с опорным основанием при заносе задней оси на ранних стадиях.

3. В качестве количественного выражения диагностического признака предложен угол скольжения, который подлежит оценке в процессе движения.

## Литература

- [1] Вильке В.Г., Шаповалов И.Л. Автоколебания в процессе торможения автомобиля. *Вестник МГУ. Сер. 1. Математика, механика*, 2015, № 4, с. 33–39.
- [2] Светлицкий В.А. *Случайные колебания механических систем*. Москва, Машиностроение, 1976. 216 с.

- [3] Кручинин П.А., Магомедов М.Х., Новожилов И.В. Математическая модель автомобильного колеса на антиблокировочных режимах движения. *Изв. РАН. МТТ*, 2001, № 6, с. 63–69.
- [4] Awrejcewicz J., Dzyubak L., Grehori C. Estimation of chaotic and regular (stick-slip and ship-slip) oscillations exhibited by coupled oscillations with dry friction. *Nonlinear Dyn.*, 2005, vol. 42, no. 2, pp. 383–394, doi: <https://doi.org/10.1007/s11071-005-7183-0>
- [5] Pascal M. Dynamics and stability of a two degrees of freedom oscillator with an elastic stop. *J. Comput. Nonlinear Dynam.*, 2006, vol. 1, no. 1, pp. 94–102, doi: <https://doi.org/10.1115/1.1961873>
- [6] Shin K., Brennan M.J., Oh J.-E., et al. Analysis of disk brake noise using a two-degrees-of-freedom model. *J. Sound Vib.*, 2002, vol. 254, no. 5, pp. 837–848, doi: <https://doi.org/10.1006/jsvi.2001.4127>
- [7] Kotiev G.O., Padalkin B.V., Kartashov A.B., et al. Designs and development of Russian scientific schools in the field of cross-country ground vehicles building. *ARNP JEAS*, 2017, vol. 12, no. 4, pp. 1064–1071.
- [8] Ергин А.А., Коломейцева М.Б., Котиев Г.О. Антиблокировочная система управления тормозным приводом колеса автомобиля. *Приборы и системы. Управление, контроль, диагностика*, 2004, № 9, с. 11–13.
- [9] Soliman A., Kaldas M. An investigation of anti-lock braking system for automobiles. *SAE Tech. Paper*, 2012, no. 2012-01-0209, doi: <https://doi.org/10.4271/2012-01-0209>
- [10] Sun C., Pei X. Development of ABS ECU with hard ware-in-the-loop simulation based on labcar system. *SAE Int. J. Passeng. Cars – Electron. Electr. Syst.*, 2015, vol. 8, no. 1, pp. 14–21, doi: <https://doi.org/10.4271/2014-01-2524>
- [11] Sabbioni E., Cheli F., d’Alessandro V. Analysis of ABS/ESP control logics using a HIL test bench. *SAE Tech. Paper*, 2011, no. 2011-01-0032, doi: <https://doi.org/10.4271/2011-01-0032>
- [12] Hart P.M. *Review of heavy vehicle braking systems requirements (PBS requirements)*. Draft report, 2003.
- [13] Marshek K.M., Guderman J.F.II., Jonson M.J. Performance of anti-lock braking system equipped passenger vehicles part I: braking as a function of brake pedal application force. *SAE Tech. Paper*, 2002, no. 2002-01-0304, doi: <https://doi.org/10.4271/2002-01-0304>
- [14] Кузнецов А.П., Кузнецов С.П., Рыскин Н.М. *Нелинейные колебания*. Москва, Физматлит, 2002. 292 с.
- [15] Pacejka H.B. *Tyre and vehicle dynamics*. Oxford, Butterworth Heinemann, 2006. 642 p.
- [16] Wellstead P.E., Pettit N.B.O.L. Analysis and redesign of an antilock brake system controller. *IEE Proc. Control Theory Appl.*, 1997, vol. 144, no. 5, pp. 413–426, doi: <https://doi.org/10.1049/ip-cta:19971441>
- [17] Gorelov V.A., Komissarov A.I., Miroshnichenko A.V. 8×8 wheeled vehicle modeling in a multibody dynamics simulation software. *Procedia Eng.*, 2015, vol. 129, pp. 300–307, doi: <https://doi.org/10.1016/j.proeng.2015.12.066>
- [18] Keller A.V., Gorelov V.A., Anchukov V.V. Modeling truck driveline dynamic loads at differential locking unit engagement. *Procedia Eng.*, 2015, vol. 129, pp. 280–287, doi: <https://doi.org/10.1016/j.proeng.2015.12.063>
- [19] Volskaya N.S., Zhileykin M.M., Zakharov A.Y. Mathematical model of rolling an elastic wheel over deformable support base. *IOP Conf. Ser.: Mater. Sci. Eng.*, 2018, vol. 315, art. 012028, doi: <https://doi.org/10.1088/1757-899X/315/1/012028>
- [20] Belousov B., Ksenevich T.I., Vantsevich V., et al. 8×8 platform for studing terrain mobility and traction performance of unmanned articulated ground vehicles with steered wheels. *SAE Tech. Paper*, 2013, no. 2013-01-2356, doi: <https://doi.org/10.4271/2013-01-2356>
- [21] Belousov B.N., Shelomkov S.A., Ksenevich T.I., et al. Experimental verification of a mathematical model of the wheel-supporting surface interaction during nonstationary rolling motion. *J. Mach. Manuf. Reliab.*, 2009, vol. 38, no. 5, pp. 501–505, doi: <https://doi.org/10.3103/S1052618809050161>
- [22] Wong J.Y. *Theory of ground vehicles*. New York, Wiley, 2001. 592 p.
- [23] Antonyan A., Zhileykin M., Eranosyan A. The algorithm of diagnosing the development of a skid when driving a two-axle vehicle. *IOP Conf. Ser.: Mater. Sci. Eng.*, 2019, vol. 820, art. 012003, doi: <https://doi.org/10.1088/1757-899X/820/1/012003>

## References

- [1] Vil'ke V.G., Shapovalov I.L. Self-oscillations in the braking process of a vehicle. *Vestnik MGU. Ser. 1. Matematika, mekhanika*, 2015, no. 4, pp. 33–39. (In Russ.). (Eng. version: *Moscow Univ. Mech. Bull.*, 2015, vol. 70, no. 4, pp. 79–85, doi: <https://doi.org/10.3103/S0027133015040019>)
- [2] Svetlitskiy V.A. *Sluchaynye kolebaniya mekhanicheskikh system* [Random vibrations of mechanical systems]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1976. 216 p.
- [3] Kruchinin P.A., Magomedov M.Kh., Novozhilov I.V. Mathematical model of an automobile wheel for antilock modes of motion. *Izv. RAN. MTT*, 2001, no. 6, pp. 63–69. (In Russ.). (Eng. version: *Mech. Solids.*, 2001, vol. 36, no. 6, pp. 52–57).
- [4] Awrejcewicz J., Dzyubak L., Grehori C. Estimation of chaotic and regular (stick-slip and ship-slip) oscillations exhibited by coupled oscillations with dry friction. *Nonlinear Dyn.*, 2005, vol. 42, no. 2, pp. 383–394, doi: <https://doi.org/10.1007/s11071-005-7183-0>
- [5] Pascal M. Dynamics and stability of a two degrees of freedom oscillator with an elastic stop. *J. Comput. Nonlinear Dynam.*, 2006, vol. 1, no. 1, pp. 94–102, doi: <https://doi.org/10.1115/1.1961873>
- [6] Shin K., Brennan M.J., Oh J.-E., et al. Analysis of disk brake noise using a two-degrees-of-freedom model. *J. Sound Vib.*, 2002, vol. 254, no. 5, pp. 837–848, doi: <https://doi.org/10.1006/jsvi.2001.4127>
- [7] Kotiev G.O., Padalkin B.V., Kartashov A.B., et al. Designs and development of Russian scientific schools in the field of cross-country ground vehicles building. *ARPN JEAS*, 2017, vol. 12, no. 4, pp. 1064–1071.
- [8] Ergin A.A., Kolomeytseva M.B., Kotiev G.O. Antiblocking control system of the brake drive of automobile wheel. *Pribory i sistemy. Upravlenie, kontrol', diagnostika* [Instruments and Systems. Monitoring, Control and Diagnostics], 2004, no. 9, pp. 11–13. (In Russ.).
- [9] Soliman A., Kaldas M. An investigation of anti-lock braking system for automobiles. *SAE Tech. Paper*, 2012, no. 2012-01-0209, doi: <https://doi.org/10.4271/2012-01-0209>
- [10] Sun C., Pei X. Development of ABS ECU with hard ware-in-the-loop simulation based on labcar system. *SAE Int. J. Passeng. Cars – Electron. Electr. Syst.*, 2015, vol. 8, no. 1, pp. 14–21, doi: <https://doi.org/10.4271/2014-01-2524>
- [11] Sabbioni E., Cheli F., d'Alessandro V. Analysis of ABS/ESP control logics using a HIL test bench. *SAE Tech. Paper*, 2011, no. 2011-01-0032, doi: <https://doi.org/10.4271/2011-01-0032>
- [12] Hart P.M. *Review of heavy vehicle braking systems requirements (PBS requirements)*. Draft report, 2003.
- [13] Marshak K.M., Guderman J.F. II., Jonson M.J. Performance of anti-lock braking system equipped passenger vehicles part I: braking as a function of brake pedal application force. *SAE Tech. Paper*, 2002, no. 2002-01-0304, doi: <https://doi.org/10.4271/2002-01-0304>
- [14] Kuznetsov A.P., Kuznetsov S.P., Ryskin N.M. *Nelineynye kolebaniya* [Nonlinear oscillations]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2002. 292 p.
- [15] Pacejka H.B. *Tyre and vehicle dynamics*. Oxford, Butterworth Heinemann, 2006. 642 p.
- [16] Wellstead P.E., Pettit N.B.O.L. Analysis and redesign of an antilock brake system controller. *IEE Proc. Control Theory Appl.*, 1997, vol. 144, no. 5, pp. 413–426, doi: <https://doi.org/10.1049/ip-cta:19971441>
- [17] Gorelov V.A., Komissarov A.I., Miroshnichenko A.V. 8×8 wheeled vehicle modeling in a multibody dynamics simulation software. *Procedia Eng.*, 2015, vol. 129, pp. 300–307, doi: <https://doi.org/10.1016/j.proeng.2015.12.066>
- [18] Keller A.V., Gorelov V.A., Anchukov V.V. Modeling truck driveline dynamic loads at differential locking unit engagement. *Procedia Eng.*, 2015, vol. 129, pp. 280–287, doi: <https://doi.org/10.1016/j.proeng.2015.12.063>
- [19] Volskaya N.S., Zhileykin M.M., Zakharov A.Y. Mathematical model of rolling an elastic wheel over deformable support base. *IOP Conf. Ser.: Mater. Sci. Eng.*, 2018, vol. 315, art. 012028, doi: <https://doi.org/10.1088/1757-899X/315/1/012028>
- [20] Belousov B., Ksenevich T.I., Vantsevich V., et al. 8×8 platform for studing terrain mobility and traction performance of unmanned articulated ground vehicles with steered wheels. *SAE Tech. Paper*, 2013, no. 2013-01-2356, doi: <https://doi.org/10.4271/2013-01-2356>

- [21] Belousov B.N., Shelomkov S.A., Ksenevich T.I., et al. Experimental verification of a mathematical model of the wheel-supporting surface interaction during nonstationary rolling motion. *J. Mach. Manuf. Reliab.*, 2009, vol. 38, no. 5, pp. 501–505, doi: <https://doi.org/10.3103/S1052618809050161>
- [22] Wong J.Y. *Theory of ground vehicles*. New York, Wiley, 2001. 592 p.
- [23] Antonyan A., Zhileykin M., Eranosyan A. The algorithm of diagnosing the development of a skid when driving a two-axle vehicle. *IOP Conf. Ser.: Mater. Sci. Eng.*, 2019, vol. 820, art. 012003, doi: <https://doi.org/10.1088/1757-899X/820/1/012003>

Статья поступила в редакцию 12.04.2021

## Информация об авторе

**ЖИЛЕЙКИН Михаил Михайлович** — доктор технических наук, профессор кафедры «Колесные машины». МГТУ им. Н.Э. Баумана (105005, Москва, Российская Федерация, 2-я Бауманская ул., д. 5, к. 1, e-mail: [jileykin\\_m@mail.ru](mailto:jileykin_m@mail.ru)).

## Information about the author

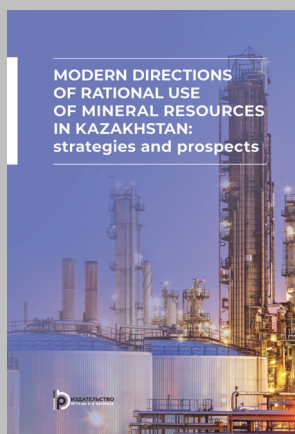
**ZHILEYKIN Mikhail Mikhailovich** — Doctor of Science (Eng.), Professor, Department of Wheeled Vehicles. Bauman Moscow State Technical University (105005, Moscow, Russian Federation, 2<sup>nd</sup> Baumanskaya St., 5, Bld. 1, e-mail: [jileykin\\_m@mail.ru](mailto:jileykin_m@mail.ru)).

### Просьба ссылаться на эту статью следующим образом:

Жилейкин М.М. Исследование автоколебательных процессов в зоне взаимодействия эластичной шины с твердым опорным основанием. *Известия высших учебных заведений. Машиностроение*, 2021, № 10, с. 3–15, doi: 10.18698/0536-1044-2021-10-3-15

### Please cite this article in English as:

Zhileykin M.M. Research of Self-Oscillating Processes in the Zone of Interaction of an Elastic Tire with a Solid Support Base. *BMSTU Journal of Mechanical Engineering*, 2021, no. 10, pp. 3–15, doi: 10.18698/0536-1044-2021-10-3-15



Издательство МГТУ им. Н.Э. Баумана  
предлагает читателям монографию

### «Modern directions of rational use of mineral resources in Kazakhstan: strategies and prospects»

Авторы: М.Р. Сихимбаев, Е.А. Старожук,  
Р.И. Мынжасаров, Д.Р. Сихимбаева

The monograph is devoted to the study of the fuel and energy complex innovative development problem in Kazakhstan. Theoretical and methodological foundations of innovative development of fuel and energy complex of the country are disclosed, an analysis and prospects of use of innovations and the innovation process in the fuel and energy complex are presented, the necessity of transformation of innovation system in the fuel and energy complex of Kazakhstan is proven and directions of the fuel and energy complex innovative development of Kazakhstan, including specific mechanisms to improve the innovation system of subsoil use of the Republic are offered. The book is intended for researchers, teachers, graduate students, specialists of public services and enterprises dealing with the problems of the fuel and energy complex of Kazakhstan.

### По вопросам приобретения обращайтесь:

105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1.  
Тел.: +7 499 263-60-45, факс: +7 499 261-45-97;  
[press@baumanpress.ru](mailto:press@baumanpress.ru); <https://bmstu.press>