

Машиностроение и машиноведение

УДК 539.313; 621.875

doi: 10.18698/0536-1044-2021-8-3-11

Большие упругие деформации эластомерной торовой оболочки (резиновой муфты) при совместном действии крутящих моментов и центробежных сил

А.Е. Белкин, В.Ю. Дураджи

МГТУ им. Н.Э. Баумана

Large Elastic Strain of the Elastomeric Torus Shell (Rubber Coupling) under the Combined Action of Torques and Centrifugal Forces

A.E. Belkin, V.Yu. Duradzhi

Bauman Moscow State Technical University

Приведено решение задачи о больших осесимметричных деформациях торовых оболочек вращения из неогуковского материала, нагруженных крутящими моментами, осевыми и центробежными силами. Задача поставлена в связи с расчетом резиновых элементов соединительных муфт. Расчеты выполнены по безмоментной теории оболочек путем решения нелинейной одномерной краевой задачи методом стрельбы, а также в трехмерной постановке методом конечных элементов. Приведены результаты расчета для выпуклых и вогнутых эластомерных торовых оболочек. Проведено сравнение их нагрузочных характеристик при свободном и стесненном кручении. Исследована зависимость осевых реакций в опорах от крутящих моментов и центробежных сил.

Ключевые слова: оболочка вращения, стесненное кручение, большие деформации, гиперупругий материал, потенциал Трелоара, упругий элемент муфты

The article considers solving the problem of large axisymmetric deformations of elastomeric torus shells of revolution, loaded with jointly acting torques, axial and centrifugal forces. The task is posed due to the calculation of rubber elements of couplings. The calculations are performed according to the momentless shell theory by solving a nonlinear one-dimensional boundary value problem using the shooting method, as well as in a three-dimensional formulation using the finite element method. The calculation results are presented both for convex and concave torus shells. The load characteristics are compared for free and constrained torsion. The dependence of axial reactions in supports on torque and centrifugal forces has been investigated.

Keywords: shell of revolution, constrained torsion, large strain, hyperelastic material, Treloar potential, elastic coupling element

Задача расчета больших осесимметричных деформаций упругого тела вращения при кручении имеет важное научное и практическое значение. На протяжении длительного периода времени, начиная с пионерских работ Р.С. Ривлина [1, 2], внимание исследователей привлекает задача кручения сплошного цилиндра из гиперупругого (резиноподобного) материала [3–7], так как ее решение можно использовать для идентификации параметров упругого потенциала материала [8].

Кручение оболочек вращения при больших деформациях является менее изученной задачей, представляющей интерес для анализа работоспособности резиновых упругих элементов, в частности торковых муфт. Расчетам таких муфт посвящены фундаментальные работы [9, 10], но задача о больших деформациях в них не рассмотрена.

В статье [11] подробно исследовано свободное кручение торковых оболочек из высокоэластичного материала с применением различных упругих потенциалов: Муни — Ривлина, Огдена, Бартенева — Хазановича. При свободном кручении не учитываются условия закрепления торцов оболочки, поэтому ее расчетная нагрузочная характеристика оказывается мягкой реальной.

Рассмотрим задачу стесненного кручения эластомерной торковой оболочки (резиновой муфты), в формулировке которой учтены геометрические тангенциальные граничные условия, что позволяет повысить точность расчетов. В результате решения этой задачи определяются осевые силы в оболочке, сопровождающие кручение. Анализ осевых сил в резиновых элементах муфт представляет особый интерес, так как они передаются на подшипники валов и наряду с другими факторами определяют их нагруженность.

Цель статьи — разработка метода расчета торкового резинового элемента муфты при стесненном кручении и действии центробежных сил в условиях больших деформаций.

Постановка задачи кручения оболочки. Радиус-векторы произвольной точки срединной поверхности оболочки до и после деформации имеют вид

$$\mathbf{R}(s, \varphi) = r(s) \cos \varphi \mathbf{i} + r(s) \sin \varphi \mathbf{j} + z(s) \mathbf{k};$$

$$\mathbf{R}^+(s, \varphi) = r^+(s) \cos(\varphi + \psi) \mathbf{i} +$$

$$+ r^+(s) \sin(\varphi + \psi) \mathbf{j} + z^+(s) \mathbf{k},$$

где s , φ , r и z — меридиональная (длина дуги), окружная (угол), радиальная и осевая координаты точки на недеформированной поверхности; здесь и далее знаком «+» помечены координаты точки на деформированной поверхности; \mathbf{i} , \mathbf{j} , \mathbf{k} — орты декартовой системы координат; ψ — функция углов закручивания, $\psi = \psi(s)$.

Через основные искомые функции r^+ , z^+ , ψ выразим компоненты базисных векторов деформированной срединной поверхности

$$\mathbf{t}_1^+ = \frac{\partial \mathbf{R}^+}{\partial s} = \left(\frac{dr^+}{ds} \cos \varphi^+ - r^+ \sin \varphi^+ \frac{d\psi}{ds} \right) \mathbf{i} + \left(\frac{dr^+}{ds} \sin \varphi^+ + r^+ \cos \varphi^+ \frac{d\psi}{ds} \right) \mathbf{j} + \frac{dz^+}{ds} \mathbf{k},$$

$$\mathbf{t}_2^+ = \frac{\partial \mathbf{R}^+}{r \partial \varphi} = \frac{r^+}{r} (-\sin \varphi^+ \mathbf{i} + \cos \varphi^+ \mathbf{j}), \quad \varphi^+ = \varphi + \psi$$

и ее меры деформации Коши — Грина [12]

$$C_{11} = \left(\frac{\partial \mathbf{R}^+}{\partial s} \right)^2 = \left(\frac{dr^+}{ds} \right)^2 + \left(\frac{dz^+}{ds} \right)^2 + \left(r^+ \frac{d\psi}{ds} \right)^2;$$

$$C_{12} = C_{21} = \frac{\partial \mathbf{R}^+}{\partial s} \cdot \frac{\partial \mathbf{R}^+}{r \partial \varphi} = \frac{(r^+)^2}{r} \frac{d\psi}{ds}; \quad (1)$$

$$C_{22} = \left(\frac{\partial \mathbf{R}^+}{r \partial \varphi} \right)^2 = \left(\frac{r^+}{r} \right)^2.$$

Рассмотрим безмоментное состояние оболочки, в котором деформации равномерно распределены по толщине, поэтому для слоев, эквидистантных срединной поверхности, также справедливы формулы (1). Поперечные сдвиги отсутствуют, т. е. $C_{13} = C_{31} = 0$, $C_{23} = C_{32} = 0$. Мера деформации в направлении нормали к срединной поверхности определяется из условия несжимаемости материала

$$C_{33} = (C_{11} C_{22} - C_{12} C_{21})^{-1}.$$

Из записанного в недеформированной конфигурации уравнения принципа виртуальных работ

$$\begin{aligned} \pi \int_0^L (S_{11} \delta C_{11} + 2S_{12} \delta C_{12} + S_{22} \delta C_{22}) h r ds = \\ = M \delta \psi \Big|_0^L + P \delta z^+ \Big|_0^L \end{aligned}$$

вытекают следующие дифференциальные уравнения равновесия оболочки:

- в осевом направлении

$$[hrS_{11}(z^+)]' = 0; \quad (2)$$

- в радиальном направлении

$$[hrS_{11}(r^+)]' = h\lambda_t [S_{22} + 2S_{12}r\vartheta + S_{11}(r\vartheta)^2]; \quad (3)$$

- в окружном направлении

$$[h(r^+)^2(S_{12} + S_{11}r\vartheta)]' = 0, \quad (4)$$

где L — длина дуги меридиана по срединной поверхности; S_{11} , S_{12} , S_{22} — компоненты второго тензора напряжений Пиолы — Кирхгофа; h — толщина оболочки; M и P — крутящий момент и осевая сила, действующие на оболочку; λ_t — кратность удлинения в окружном направлении, $\lambda_t = r^+ / r$; ϑ — крутка, $\vartheta = \psi'$; штрихи над функциями обозначают дифференцирование по дуге s недеформированного меридиана; символ δ обозначает вариацию следующей за ним переменной.

На рис. 1 показаны напряжения S_{11} , S_{12} , S_{21} , S_{22} и соответствующие им элементарные силы в сечениях оболочки.

Уравнения (2)–(4) дополняются геометрическими граничными условиями

- при $s = 0$

$$r^+ = r_1, \quad z^+ = 0, \quad \psi = 0;$$

- при $s = L$

$$r^+ = r_2, \quad z^+ = b, \quad \psi = \alpha, \quad (5)$$

где r_1, r_2, b — известные фиксированные размеры оболочки; α — заданный угол ее закручивания.

Если угол закручивания оболочки α заранее неизвестен, но задан крутящий момент, то со-

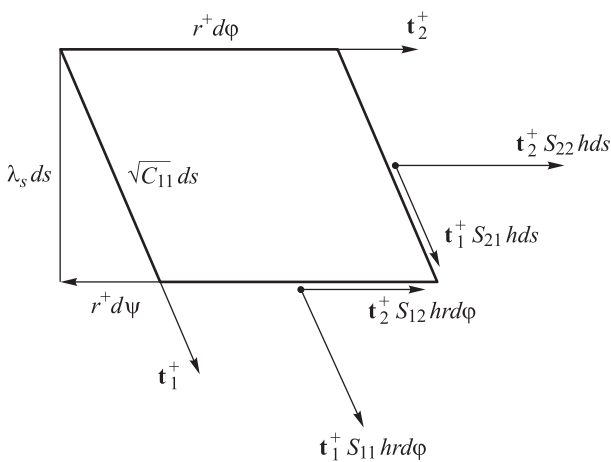


Рис. 1. Схема действия внутренних сил в элементе оболочки

ответствующее геометрическое условие заменяется естественным граничным условием

$$s = L, \quad 2\pi h(r^+)^2(S_{12} + S_{11}r\vartheta) = M. \quad (6)$$

При свободном сближении торцов оболочки и заданной осевой силе P вместо условия $z^+ = b$ формулируется естественное граничное условие

$$s = L, \quad 2\pi h r S_{11}(z^+)' = P.$$

Закон связи напряжений и деформаций для гиперупругого материала устанавливается на основе вида функции удельной энергии деформации (упругого потенциала). Согласно данным работы [13], для резины при деформации, не превышающей 50 %, высокую точность обеспечивает двухпараметрический потенциал Муни — Ривлина. Однако часто оказывается достаточным однопараметрический потенциал Трелоара, который можно вывести теоретическим путем из статистической теории упругости резины [14].

Предполагаем, что упругое деформирование материала описывается потенциалом Трелоара [14]

$$W = 0,5G(C_{11} + C_{22} + C_{33} - 3), \quad (7)$$

где G — модуль сдвига материала при малых деформациях.

Из выражения (7) в случае плоского напряженного состояния следуют соотношения упругости

$$\begin{aligned} S_{11} &= 2 \frac{\partial W}{\partial C_{11}} = G \left[1 - C_{22} (C_{11} C_{22} - C_{12}^2)^{-2} \right]; \\ S_{12} &= 2 \frac{\partial W}{\partial C_{12}} = G C_{12} (C_{11} C_{22} - C_{12}^2)^{-2}; \\ S_{22} &= 2 \frac{\partial W}{\partial C_{22}} = G \left[1 - C_{11} (C_{11} C_{22} - C_{12}^2)^{-2} \right]. \end{aligned} \quad (8)$$

Подставляя меры деформации (1) в соотношения (8), получаем формулировку закона упругости для задачи стесненного кручения

$$\begin{aligned} S_{11} &= G(1 - \lambda_s^{-4} \lambda_t^{-2}); \\ S_{12} &= G \lambda_s^{-4} \lambda_t^{-2} r \vartheta; \\ S_{22} &= G \left[1 - \lambda_s^{-2} \lambda_t^{-4} - \lambda_s^{-4} \lambda_t^{-2} (r \vartheta)^2 \right], \end{aligned} \quad (9)$$

где λ_s — кратность удлинения в меридиональном направлении при отсутствии закручивания,

$$\lambda_s = \sqrt{(r^+)^2 + (z^+)^2}.$$

Уравнения равновесия (2)–(4) и соотношения упругости (9) образуют полную систему уравнений относительно условных напряжений S_{11} , S_{12} , S_{22} , координат деформированного меридиана r^+ , z^+ и угла закручивания ψ . Вспомогательные переменные ϑ , λ_s , λ_t известным образом выражаются через основные искомые функции.

Решение задачи кручения оболочки. Рассмотрим расчет оболочки при заданном значении крутящего момента. Считаем, что расстояние между торцами оболочки b при кручении не меняется, неизвестная осевая реакция P является искомой величиной.

Из уравнения равновесия моментов (4), граничного условия (6) и соотношений упругости (9) для напряжений S_{12} , S_{11} получаем связь момента и крутки

$$\vartheta = \frac{M}{2\pi\lambda_t^2 Ghr^3}. \quad (10)$$

Для записи разрешающей системы уравнений в канонической форме вводим новые искомые переменные

$$N = hS_{11}(r^+)', \quad F = hS_{11}(z^+)', \quad (11)$$

которые по аналогии с линейной теорией оболочек можно называть интенсивностями радиальных (распорных) и осевых сил соответственно.

С новыми переменными система дифференциальных уравнений принимает вид

$$\begin{aligned} (r^+)' &= \frac{N}{hS_{11}}; & (z^+)' &= \frac{F}{hS_{11}}; \\ (rN)' &= Gh\lambda_t \left[(r\vartheta)^2 + 1 - \lambda_s^{-2} \lambda_t^{-4} \right]; & \psi' &= \vartheta, \end{aligned} \quad (12)$$

где функция крутки определяется по формуле (10).

Систему (12), замыкаемую уравнением для определения напряжения S_{11} , получаем следующим образом. Используя связи (11), находим

$$\lambda_s^2 = (r^+)'^2 + (z^+)'^2 = (N^2 + F^2) / (hS_{11})^2. \quad (13)$$

Подставляя λ_s^2 по формуле (13) в соотношение упругости (9) для напряжения S_{11} , приходим к нелинейному алгебраическому уравнению

$$(hS_{11})^4 + \lambda_t^2 (N^2 + F^2)^2 (G^{-1}S_{11} - 1) = 0. \quad (14)$$

Чтобы представить уравнение (14) в масштабированном виде, выполняем замену переменной

$$hS_{11} = \beta \sqrt{\lambda_t (N^2 + F^2)}.$$

Тогда уравнение относительно безразмерной переменной β приобретает простой вид

$$\beta^4 + t\beta - 1 = 0, \quad (15)$$

где t — переменный вдоль меридиана параметр,

$$t = \sqrt{\lambda_t (N^2 + F^2)} / (Gh).$$

Функция β может принимать как положительные значения при растяжении вдоль меридиана ($S_{11} > 0$), так и отрицательные при сжатии ($S_{11} < 0$). Через эту функцию выражается не только напряжение S_{11} , но и кратность удлинения

$$\lambda_s = 1 / \sqrt{\beta^2 \lambda_t}.$$

При численном интегрировании системы уравнений (12) в каждом обращении к вычислению производных искомых функций приходится решать нелинейное уравнение (15). Для предварительного анализа интервалов возможного нахождения корней удобно использовать графический метод.

Графическое решение уравнения (15) — определение двух его вещественных корней β_1 , β_2 как точек пересечения графиков функций $y_1 = \beta^4$ и $y_2 = 1 - t\beta$ — проиллюстрировано на рис. 2. Очевидно, что отрицательные корни удовлетворяют неравенству $\beta \leq -1$, а положительные — $0 < \beta \leq 1$. При итерационном методе нахождения корней в качестве начальных приближений, как правило, могут быть приняты значения $\beta_0 = -1$ и $\beta_0 = 1$.

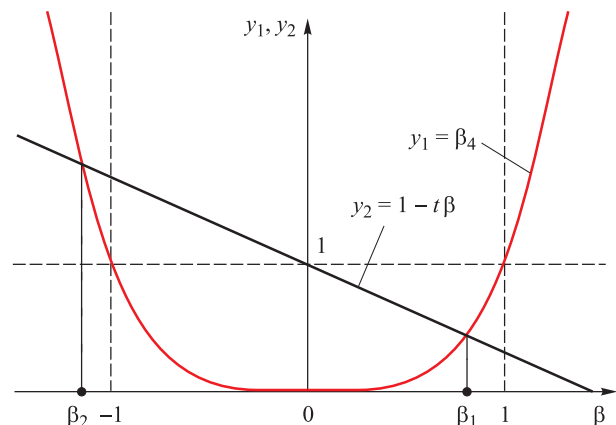


Рис. 2. Графическое решение уравнения (15)

Решение сформулированной краевой задачи для системы дифференциальных уравнений (12) сводится к поиску начальных параметров $N_0 = N|_{s=0}$, $F_0 = F|_{s=0}$, обеспечивающих выполнение двух первых граничных условий (5). Этот поиск эффективно реализуется методом стрельбы [15].

После решения краевой задачи осуществляется переход от напряжений Пиолы — Кирхгофа к истинным напряжениям Коши σ_{ij} по формулам

$$\sigma_{12} = \lambda_s \lambda_t (S_{12} + S_{11} r \vartheta); \quad \sigma_{11} = \lambda_s^2 S_{11};$$

$$\sigma_{22} = \lambda_t^2 [S_{22} + 2S_{12} r \vartheta + S_{11} (r \vartheta)^2].$$

Задача о свободном кручении оболочки решается несколько проще. При свободном кручении отсутствует осевая сила ($P = 0$), поэтому $S_{11} = 0$ и $F = N = 0$. Из соотношения упругости для напряжения S_{11} следует связь кратностей удлинения

$$\lambda_s = 1 / \sqrt{\lambda_t}.$$

Уравнение равновесия в радиальном направлении (3) приобретает вид

$$\lambda_t^4 - \lambda_t + \left(\frac{M}{2\pi G h r^2} \right)^2 = 0. \quad (16)$$

Решением уравнения (16) для произвольной параллели оболочки с координатой s определяем кратность удлинения λ_t и новый радиус $r^+ = \lambda_t r$. Затем интегрированием крутки (10) вычисляем функцию углов поворота

$$\psi(s) = \frac{M}{2\pi G} \int_0^s \frac{1}{\lambda_t^2 h r^3} ds.$$

Результаты расчета торовых оболочек (упругих элементов муфт). Рассмотрим выпуклые и вогнутые полуторовые оболочки, схемы которых с определяющими размерами показаны на рис. 3. В качестве примера приведены результаты расчета для оболочек с параметрами $R_{\max}/R = 4$, $h/R = 0,2$, где для выпуклого упругого элемента $R_{\max} = a + R$, для вогнутого $R_{\max} = a$.

Графические зависимости крутящего момента m от угла закручивания оболочки при стесненном и свободном кручении показаны на рис. 4, зависимости осевой силы от крутящего момента при стесненном кручении — на рис. 5.

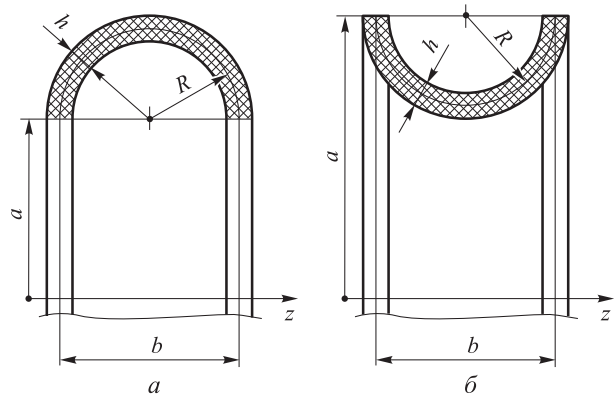


Рис. 3. Схемы выпуклой (а) и вогнутой (б) полуторовых оболочек с определяющими размерами

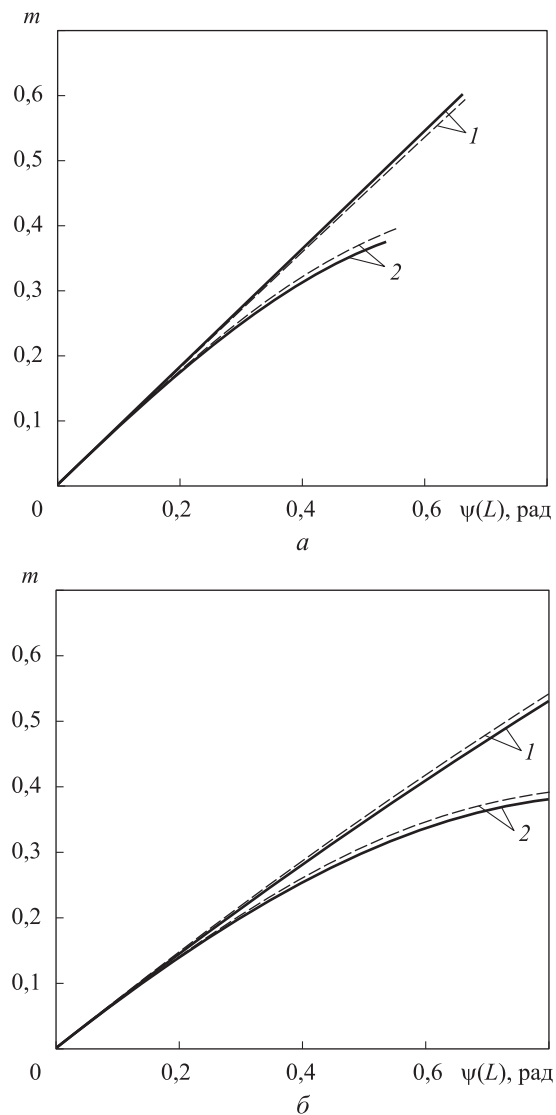


Рис. 4. Зависимости крутящего момента m от угла закручивания $\psi(L)$ выпуклой (а) и вогнутой (б) полуторовых оболочек при стесненном (1) и свободном (2) кручении, полученные разными методами расчета:
 — по безмоментной теории оболочек;
 - - - в трехмерной постановке МКЭ

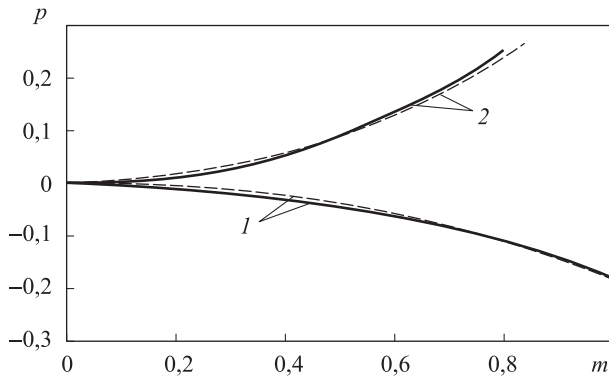


Рис. 5. Зависимости осевой силы p от крутящего момента m для выпуклой (1) и вогнутой (2) полуторовых оболочек, полученные разными методами расчета:

— по безмоментной теории оболочек;
 - - - в трехмерной постановке МКЭ

Силовые факторы на графиках указаны в масштабированном безразмерном виде:

$$m = M / (2\pi h R_{\max}^2 G), \quad p = P / (2\pi h R_{\max} G).$$

Для контроля достоверности результатов, полученных интегрированием уравнений (12), выполнен расчет оболочек методом конечных элементов (МКЭ) в среде ANSYS. Решение МКЭ получено с помощью плоских элементов PLANE182, которые могут быть настроены для расчета осесимметричной деформации тел вращения при кручении.

Как и ожидалось, при стесненном кручении нагрузочная характеристика (см. рис. 4) более жесткая, чем при свободном. Однако различие в жесткости становится заметным лишь при больших углах закручивания: $\psi(L) \geq 0,3$ рад. При одинаковом определяющем размере R_{\max} крутильная жесткость выпуклой муфты выше, чем у вогнутой. В случае стесненного кручения нагрузочная характеристика муфты практически линейна даже при больших деформациях сдвига.

При стесненном кручении в выпуклой оболочке возникает осевая сила сжатия, а в вогнутой — сила растяжения (см. рис. 5), причем при одинаковых крутящих моментах осевая сила по абсолютному значению больше у вогнутой оболочки.

Влияние центробежной нагрузки на напряженное состояние оболочки. В линейной постановке эта задача решена в работе [16]. Выполним нелинейный анализ. Для вывода уравнений квазистатического равновесия оболочки составим выражение виртуальной работы цен-

тробежной нагрузки δW_{ext} . Для малого элемента оболочки массой $d\mu$ имеем

$$d(\delta W_{ext}) = d\mu \omega^2 r^+ \mathbf{i}_r^+ \delta \mathbf{R}^+,$$

где ω — угловая скорость вращения муфты, \mathbf{i}_r^+ — единичный вектор радиального направления деформированной оболочки; $\delta \mathbf{R}^+$ — возможное перемещение центра тяжести элемента.

Материал муфты — несжимаемый. Объем и плотность материала ρ_0 не изменяются при деформации, поэтому $d\mu = \rho_0 h r d\vartheta ds$. Проекция возможного перемещения на радиальное направление

$$\mathbf{i}_r^+ \delta \mathbf{R}^+ = \delta r^+.$$

С учетом этих замечаний и осевой симметрии задачи можно записать выражение виртуальной работы

$$\delta W_{ext} = 2\pi \int_0^L \rho_0 h r \omega^2 r^+ \delta r^+ ds.$$

Добавив эту работу в уравнение принципа возможных перемещений, получим вместо выражения (3) новое уравнение равновесия в радиальном направлении

$$\begin{aligned} [hr S_{11}(r^+)]' &= \\ &= h\lambda_t [S_{22} + 2S_{12} r \vartheta + S_{11}(r \vartheta)^2] - \rho_0 h \lambda_t \omega^2 r^2. \end{aligned}$$

Это уравнение с помощью соотношений упругости (9) приведем к виду

$$(rN)' = Gh\lambda_t [(r\vartheta)^2 + 1 - \lambda_s^{-2} \lambda_t^{-4}] - \rho_0 h \lambda_t \omega^2 r^2.$$

Остальные уравнения задачи сохраняют силу. Процедура решения краевой задачи методом стрельбы также остается прежней.

Чтобы оценить возможное влияние центробежной нагрузки на напряженное состояние оболочки, сопоставим нагрузочные слагаемые правой части уравнения равновесия $\rho_0 \omega^2 r^2$ и $G(r\vartheta)^2$. На радиусе R_{\max} имеем

$$\frac{\rho_0 (\omega R_{\max})^2}{G(R_{\max} \vartheta)^2} \sim \frac{\rho_0 (\omega R_{\max})^2}{G m^2}.$$

Таким образом, это влияние может быть значимым, если центробежная нагрузка $q = \rho_0 (\omega R_{\max})^2 / G$ соизмерима с m^2 .

Расчетные зависимости осевой силы p от центробежной нагрузки q при различных значениях крутящего момента приведены на рис. 6.

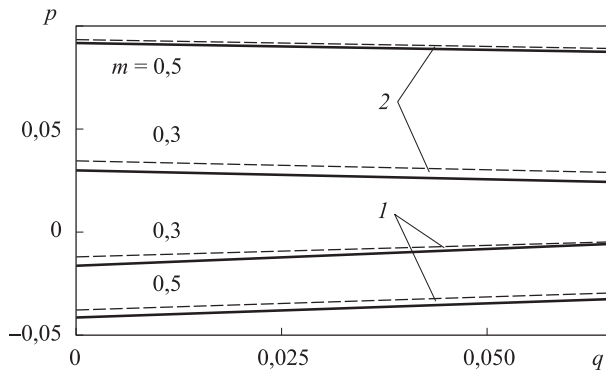


Рис. 6. Зависимости осевой силы p от центробежной нагрузки q при различных значениях крутящего момента m для выпуклой (1) и вогнутой (2) полуторовых оболочек, полученные разными методами расчета:
 — по безмоментной теории оболочек,
 - - - в трехмерной постановке МКЭ

Из графиков видно, что с ростом центробежной нагрузки осевые силы в муфте снижаются по абсолютной величине, причем это относится как к выпуклой, так и к вогнутой оболочкам. Этот эффект объясняется тем, что от действия крутящего момента и центробежной нагрузки в муфте возникают осевые силы различной направленности.

В целом можно утверждать, что результаты расчетов по безмоментной теории оболочек

и в трехмерной постановке МКЭ хорошо согласуются.

Следует отметить, что важный вопрос об устойчивости упругого элемента муфты при кручении рассмотрен в работах [10, 17].

Выводы

1. Приведено решение нелинейной задачи стесненного кручения оболочек вращения из резиноподобного материала (соединительных муфт) на допущениях безмоментной теории. Применение нелинейной теории позволило определить осевые силы, возникающие в оболочке при кручении.

2. Для выпуклой и вогнутой полуторовых оболочек (упругих элементов муфт) получены зависимости угла закручивания и осевой силы от крутящего момента. Приведено сравнение нагрузочных характеристик оболочек при стесненном и свободном кручении.

3. Исследовано влияние центробежной нагрузки, действующей на вращающуюся оболочку (муфту), на осевые силы, что важно для оценки нагруженности опор валов, соединяемых муфтой.

Литература

- [1] Rivlin R.S. Torsion of a rubber cylinder. *J. Appl. Phys.*, 1947, vol. 18, no. 5, pp. 444–449, doi: <https://doi.org/10.1063/1.1697674>
- [2] Rivlin R.S. A note on the torsion of an incompressible highly-elastic cylinder. *Math. Proc. Camb. Philos. Soc.*, 1949, vol. 45, no. 3, pp. 485–487, doi: <https://doi.org/10.1017/S0305004100025135>
- [3] Gent A.N., Rivlin R.S. Experiments on the mechanics of rubber II: the torsion, inflation and extension of a tube. *Proc. Phys. Soc. B*, 1952, vol. 65, no. 7, pp. 487–501, doi: <https://doi.org/10.1088/0370-1301/65/7/304>
- [4] Ogden R.W., Chadwick P. On the deformation of solid and tubular cylinders of incompressible isotropic elastic materials. *J. Mech. Phys. Solids*, 1972, vol. 20, no. 2, pp. 77–90, doi: [https://doi.org/10.1016/0022-5096\(72\)90032-4](https://doi.org/10.1016/0022-5096(72)90032-4)
- [5] Horgan C.O., Polignone D.A. A note on the pure torsion of a circular cylinder for a compressible nonlinearly elastic material with nonconvex strain-energy. *J. Elasticity*, 1994, vol. 37, no. 2, pp. 167–178.
- [6] Suphadon N., Busfield J.J.C. Elastic behaviour of rubber cylinders under combined torsion and tension loading. *Plast. Rubber Compos.*, 2009, vol. 38, no. 8, pp. 337–342, doi: <https://doi.org/10.1179/146580109X12473409436788>
- [7] Соколова М.Ю., Чиков В.С. Описание конечных деформаций сплошных цилиндров при кручении. *Известия ТулГУ. Естественные науки*, 2013, № 2-1, с. 109–118.
- [8] Белкин А.Е., Даштиев И.З., Костромицких А.В. Определение параметров упругости полиуретана при больших деформациях по результатам испытаний образцов на кручение и растяжение. *Известия высших учебных заведений. Машиностроение*, 2016, № 8, с. 3–10, doi: <http://dx.doi.org/10.18698/0536-1044-2016-8-3-10>

- [9] Ряховский О.А. *Разработка конструкций, исследования, расчеты и стандартизация муфт с неметаллическими упругими элементами*. Дис. ... д-ра техн. наук. Москва, МВТУ им. Н.Э. Баумана, 1985. 302 с.
- [10] Трибельский И.А. *Расчетно-экспериментальные методы проектирования сложных резинокордных конструкций узлов агрегатов и машин*. Дис. ... д-ра техн. наук. Омск, Омский государственный технический университет, 2009. 396 с.
- [11] Бидерман Т.В. Кручение оболочки вращения из высокоэластичного материала при больших деформациях. *Расчеты на прочность*, 1989, № 27, с. 237–244.
- [12] Голованов А.И., Султанов Л.У. *Математические модели вычислительной нелинейной механики деформируемых сред*. Казань, Казанский гос. ун-т, 2009. 464 с.
- [13] Бидерман В.Л. *Расчет резино-металлических и резинокордных элементов машин*. Дис. ... д-ра техн. наук. Москва, НИИ шинной промышленности, 1958. 372 с.
- [14] Трелоар Л. *Физика упругости каучука*. Изд-во Иностранная литература, Москва, 1953. 240 с.
- [15] Валишвили Н.В. *Методы расчета оболочек вращения на ЭЦВМ*. Москва, Машиностроение, 1976. 278 с.
- [16] Михайлов Б.К., Иванов Б.С. *Муфты с неметаллическими элементами: Теория и расчет*. Ленинград, Машиностроение. Ленингр. отд-ние, 1987. 145 с.
- [17] Белкин А.Е., Бидерман Т.В. Численное исследование устойчивости оболочек вращения при кручении. *Расчеты на прочность. Сборник статей*, вып. 24, Москва, Машиностроение, 1983, с. 148–155.

References

- [1] Rivlin R.S. Torsion of a rubber cylinder. *J. Appl. Phys.*, 1947, vol. 18, no. 5, pp. 444–449, doi: <https://doi.org/10.1063/1.1697674>
- [2] Rivlin R.S. A note on the torsion of an incompressible highly-elastic cylinder. *Math. Proc. Camb. Philos. Soc.*, 1949, vol. 45, no. 3, pp. 485–487, doi: <https://doi.org/10.1017/S0305004100025135>
- [3] Gent A.N., Rivlin R.S. Experiments on the mechanics of rubber II: the torsion, inflation and extension of a tube. *Proc. Phys. Soc. B*, 1952, vol. 65, no. 7, pp. 487–501, doi: <https://doi.org/10.1088/0370-1301/65/7/304>
- [4] Ogden R.W., Chadwick P. On the deformation of solid and tubular cylinders of incompressible isotropic elastic materials. *J. Mech. Phys. Solids*, 1972, vol. 20, no. 2, pp. 77–90, doi: [https://doi.org/10.1016/0022-5096\(72\)90032-4](https://doi.org/10.1016/0022-5096(72)90032-4)
- [5] Horgan C.O., Polignone D.A. A note on the pure torsion of a circular cylinder for a compressible nonlinearly elastic material with nonconvex strain-energy. *J. Elasticity*, 1994, vol. 37, no. 2, pp. 167–178.
- [6] Suphadon N., Busfield J.J.C. Elastic behaviour of rubber cylinders under combined torsion and tension loading. *Plast. Rubber Compos.*, 2009, vol. 38, no. 8, pp. 337–342, doi: <https://doi.org/10.1179/146580109X12473409436788>
- [7] Sokolova M.Yu., Chikov V.S. A description of solid cylinders finite strains at torsion. *Izvestiya TulGU. Estestvennye nauki* [News of the Tula State University. Natural Sciences], 2013, no. 2-1, pp. 109–118 (in Russ.).
- [8] Belkin A.E., Dashtiev I.Z., Kostromitskikh A.V. Determining polyurethane elastic parameters at large strains using torsion and tensile test results. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Mashinostroenie* [BMSTU Journal of Mechanical Engineering], 2016, no. 8, pp. 3–10, doi: <http://dx.doi.org/10.18698/0536-1044-2016-8-3-10> (in Russ.).
- [9] Ryakhovskiy O.A. *Razrabotka konstruktsiy, issledovaniya, raschety i standartizatsiya muft s nemetallicheskimimi uprugimi elementami*. Diss. dok. tekhn. nauk [Construction development, study, calculation and standardization of couplings with non-metallic elastic elements. Doc. tech. sci. diss.]. Moscow, Bauman MVTU Publ., 1985. 302 p.
- [10] Tribel'skiy I.A. *Raschetno-eksperimental'nye metody proektirovaniya slozhnykh rezinokordnykh konstruktsiy uzlov agregatov i mashin*. Dis. dok. tekhn. nauk [Computational-experimental design methods for complex rubber-cord structural nodes of aggregates and machines. Doc. tech. sci. diss.]. Omsk, OmGTU Publ., 2009. 396 p.

- [11] Biderman T.V. Rotation of rotary shell from high-elasticity material at strong deformations. *Raschety na prochnost'*, 1989, no. 27, pp. 237–244 (in Russ.).
- [12] Golovanov A.I., Sultanov L.U. *Matematicheskie modeli vychislitel'noy nelineynoy mekhaniki deformiruemykh sred* [Mathematical models of computational nonlinear mechanics of deformable medium]. Kazan', Kazanskiy gos. un-t Publ., 2009. 464 p.
- [13] Biderman V.L. *Raschet rezino-metallicheskih i rezinokordnykh elementov mashin*. Diss. dok. tekhn. nauk [Calculation of rubber-metallic and rubber-cord machine elements. Doc. tech. sci. diss.]. Moscow, NII shinnoy promyshlennosti Publ., 1958. 372 p.
- [14] Treloar L.R.G. *The physics of rubber elasticity*. Oxford, 1949. (Russ. ed.: *Fizika uprugosti kauchuka*. Moscow, IL Publ., 1953. 240 p.)
- [15] Valishvili N.V. *Metody rascheta obolochek vrashcheniya na ETsVM* [Computer calculation methods for rotation shells]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1976. 278 p.
- [16] Mikhaylov Yu.K., Ivanov B.S. *Mufty s nemetallicheskimimi elementami* [Couplings with non-metallic elements]. Leningrad, Mashinostroenie Publ., 1987. 145 p.
- [17] Belkin A.E., Biderman T.V. Numerical study on torsion durability of rotation shells. *Raschety na prochnost'*, 1983, no. 24, pp. 148–155 (in Russ.).

Статья поступила в редакцию 15.02.2021

Информация об авторах

БЕЛКИН Александр Ефимович — доктор технических наук, профессор кафедры «Прикладная механика». МГТУ им. Н.Э. Баумана (105005, Москва, Российская Федерация, 2-я Бауманская ул., д. 5, к. 1, e-mail: aefbelkin@gmail.com).

ДУРАДЖИ Виталий Юрьевич — ассистент кафедры «Прикладная механика». МГТУ им. Н.Э. Баумана (105005, Москва, Российская Федерация, 2-я Бауманская ул., д. 5, к. 1, e-mail: viduradji@gmail.com).

Information about the authors

BELKIN Aleksandr Efimovich — Doctor of Science (Eng.), Professor, Department of Applied Mechanics. Bauman Moscow State Technical University (105005, Moscow, Russian Federation, 2nd Baumanskaya St., Bldg. 5, Block 1, e-mail: aefbelkin@gmail.com).

DURADZHI Vitaliy Yuryevich — Assistant Lecturer, Department of Applied Mechanics. Bauman Moscow State Technical University (105005, Moscow, Russian Federation, 2nd Bauman-skaya St., Bldg. 5, Block 1, e-mail: viduradji@gmail.com).

Просьба ссылаться на эту статью следующим образом:

Belkin A.E., Duradzi V.Yu. Большие упругие деформации эластомерной торовой оболочки (резиновой муфты) при совместном действии крутящих моментов и центробежных сил. *Известия высших учебных заведений. Машиностроение*, 2021, № 8, с. 3–11, doi: 10.18698/0536-1044-2021-8-3-11

Please cite this article in English as:

Belkin A.E., Duradzi V.Yu. Large Elastic Strain of the Elastomeric Torus Shell (Rubber Coupling) under the Combined Action of Torques and Centrifugal Forces. *BMSTU Journal of Mechanical Engineering*, 2021, no. 8, pp. 3–11, doi: 10.18698/0536-1044-2021-8-3-11