

# Машиностроение и машиноведение

УДК 534.014.4

doi: 10.18698/0536-1044-2020-11-3-12

## Динамическая устойчивость трубопровода с протекающей по нему жидкостью

В.П. Радин, В.П. Чирков, А.В. Щугорев,  
В.Н. Щугорев, О.В. Новикова

НИУ «МЭИ»

## Dynamic Stability of Pipelines with Fluid Flow

V.P. Radin, V.P. Chirkov, A.V. Shchugorev,  
V.N. Shchugorev, O.V. Novikova

National Research University — Moscow Power Engineering Institute

Рассмотрена классическая задача об устойчивости участка трубопровода с протекающей в нем жидкостью. Уравнение возмущенного движения получено методом разложения по формам собственных колебаний с дальнейшим применением процедуры метода Бубнова — Галеркина. Граница области устойчивости на плоскости параметров потока жидкости найдена с использованием критерия Рауса — Гурвица применительно к неконсервативным задачам устойчивости. При фиксированных значениях относительной массы построены траектории характеристических показателей как параметрически зависимые функции от скорости протекающей жидкости с определением частоты колебаний трубопровода при потере устойчивости по типу флаттера. Изучены формы флаттера в разных точках границы области устойчивости. Формы флаттера изображены пучком изогнутых осей трубопровода в дискретные моменты времени на протяжении одного периода.

**Ключевые слова:** устойчивость трубопровода, метод разложения по формам, граница и частота флаттера, формы колебаний трубопровода

The classical problem of stability of a pipeline section with fluid flow is considered in this paper. The equation of perturbed motion is solved by a method of expansion by forms of natural oscillations with further application of the Bubnov — Galerkin method. The boundary of the stability domain on the plane of fluid flow parameters is determined using the Raus — Hurwitz criterion for non-conservative stability problems. For fixed values of the relative mass, the trajectories of characteristic indicators are constructed as functions parametrically dependent on the velocity of the fluid flow. The frequency of pipeline oscillations in the event of loss of stability is determined by the flutter type. Flutter modes at various points of the boundary of the stability domain are examined. Flutter modes are represented by a beam of curved axes of the pipeline at discrete points of time throughout one period.

**Keywords:** pipeline stability, method of decomposition by form, boundary and frequency of flutter, pipeline oscillation forms

Среди классических неконсервативных задач теории упругой устойчивости наибольший интерес представляет задача об устойчивости участка трубопровода с протекающей по нему жидкостью [1–10]. Это связано с такими особенностями данной задачи, как двухпараметрическая неконсервативная нагрузка от протекающей по трубопроводу жидкости (масса и скорость), немонотонность границы флаттера и необъяснимое поведение характеристических показателей при изменении параметров неконсервативной нагрузки.

В последние годы интерес к этой задаче вырос в связи с расчетом углеродных нанотрубок [11, 12]. Отметим, что кроме традиционных для механики методов, изложенных в работах [13–16], в зарубежной литературе достаточно часто для решения задач неконсервативной устойчивости применяют метод дифференциальных квадратур [8–12, 17, 18].

Суть этого метода состоит в аппроксимации производных искомой функции взвешенной суммой значений этой функции в точках дискретизации области, в которой ищут решение. Весовые коэффициенты рассчитывают с помощью интерполяционных многочленов Лангранжа [19, 20]. Такой метод позволяет получить решение с достаточной точностью на сетке с меньшим количеством узлов, чем у методов конечных разностей и конечных элементов.

Однако для дополнительных исследований указанной задачи применим классический метод разложения ее решения по формам собственных колебаний с дальнейшим использованием процедуры метода Бубнова — Галеркина.

Цель работы — построение траекторий характеристических показателей и наглядные изображения форм флаттера в различных точках границы области устойчивости.

Рассмотрим прямолинейный участок трубопровода, наполненный невязкой жидкостью, которая движется с невозмущенной скоростью  $U$  (рис. 1). Расчетную схему трубопровода представим в виде заземленного на одном конце стержня с изгибной жесткостью  $EI$ , погонной массой  $m_0$  и длиной  $l$ . Массу жидкости,

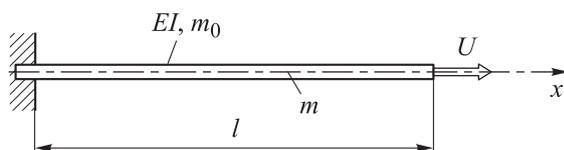


Рис. 1. Участок трубопровода с протекающей по нему жидкостью

приходящуюся на единицу длины трубопровода, обозначим через  $m$ , а перемещения сечений стержня при отклонении от прямолинейной формы — через  $w(x, t)$ , где  $x$  — продольная координата;  $t$  — время.

Будем считать движение жидкости одномерным, а условия на выходе из трубопровода такими, что осевые усилия от потока отсутствуют. При этом можно трактовать жидкость как подвижную нагрузку с интенсивностью сил инерции, равной  $-m d^2 w / dt^2$ , где  $d^2 / dt^2$  — полная производная по времени. С учетом того, что  $w = w[x(t), t]$ , а  $U = dx / dt$ , получаем следующие выражения:

- для первой производной

$$\frac{dw[x(t), t]}{dt} = \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} = \frac{\partial w}{\partial t} + U \frac{\partial w}{\partial x};$$

- для второй производной

$$\frac{d^2 w}{dt^2} = \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + 2U \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} + U^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}. \quad (1)$$

Первый член в правой части выражения (1) учитывает обычную нормальную даламберову силу. Второй член соответствует кориолисовому ускорению из-за поворота потока частиц жидкости. Третий член связан с центробежными силами, определяемыми кривизной потока при колебаниях трубопровода. Тогда уравнение малых колебаний около невозмущенной формы равновесия можно записать в виде

$$EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + (m_0 + m) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + 2mU \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} + mU^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0. \quad (2)$$

Уравнение (2) необходимо дополнить граничными условиями

$$w = \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \quad \text{при} \quad x = 0; \quad (3)$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} = 0 \quad \text{при} \quad x = l.$$

Введем безразмерные параметры:

$$\xi = \frac{x}{l}; \quad \tau = \omega_0 t; \quad \omega_0 = \frac{1}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{m_0 + m}};$$

$$\alpha = U \sqrt{\frac{ml^2}{EI}}; \quad \beta = \frac{m}{m_0 + m},$$

где  $\xi$  — безразмерная продольная координата;  $\tau$  — безразмерное время;  $\omega_0$  — характерная

частота;  $\alpha$  — параметр, характеризующий скорость протекания жидкости и ее расход;  $\beta$  — погонная масса протекающей по трубопроводу жидкости, отнесенная к их суммарной погонной массе.

С учетом безразмерных параметров уравнение (2) и граничные условия (3) запишутся следующим образом:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial \xi^4} + 2\alpha\sqrt{\beta} \frac{\partial^2 w}{\partial \xi \partial \tau} + \alpha^2 \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial \tau^2} = 0; \quad (4)$$

$$w = \frac{\partial w}{\partial \xi} = 0 \text{ при } \xi = 0;$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} = 0, \quad \frac{\partial^3 w}{\partial \xi^3} = 0 \text{ при } \xi = 1.$$

Представим решение уравнения (4) в виде ряда

$$w(\xi, \tau) = \sum_{k=1}^n q_k(\tau) \varphi_k(\xi), \quad (5)$$

где  $n$  — число членов ряда;  $q_k(\tau)$  — обобщенные координаты;  $\varphi_k(\xi)$  — формы собственных колебаний консольного стержня.

Выбор числа членов ряда  $n$  определяется точностью представления решения  $w(\xi, \tau)$ . Как показали многочисленные вычисления для неконсервативных задач подобного рода, достаточная точность достигается уже при  $n = 8$  [15]. Если ввести в рассмотрение вектор обобщенных координат  $\mathbf{q}(\tau)$  и вектор собственных форм  $\boldsymbol{\varphi}(\xi)$ , то разложение (5) может быть переписано в векторной форме

$$w(\xi, \tau) = \mathbf{q}^T(\tau) \boldsymbol{\varphi}(\xi);$$

$$\mathbf{q}(\tau) = \begin{bmatrix} q_1(\tau) \\ q_2(\tau) \\ \vdots \\ q_n(\tau) \end{bmatrix}; \quad \boldsymbol{\varphi}(\xi) = \begin{bmatrix} \varphi_1(\xi) \\ \varphi_2(\xi) \\ \vdots \\ \varphi_n(\xi) \end{bmatrix}.$$

Формы собственных колебаний выразим через функции Крылова

$$S_1(\chi\xi) = \frac{1}{2} [\text{ch}(\chi\xi) + \cos(\chi\xi)];$$

$$S_2(\chi\xi) = \frac{1}{2} [\text{sh}(\chi\xi) + \sin(\chi\xi)];$$

$$S_3(\chi\xi) = \frac{1}{2} [\text{ch}(\chi\xi) - \cos(\chi\xi)];$$

$$S_4(\chi\xi) = \frac{1}{2} [\text{sh}(\chi\xi) - \sin(\chi\xi)].$$

Здесь  $\chi$  — частотный параметр.

Для заземленного на одном конце стержня имеем

$$\varphi_k(\xi) = S_4(\chi_k \xi) - \frac{S_2(\chi_k)}{S_1(\chi_k)} S_3(\chi_k \xi),$$

где частотные параметры  $\chi_k$  определяются из уравнения

$$1 + \cos \chi \text{ch} \chi = 0.$$

Подставим ряд (5) в уравнение (4) и применим процедуру метода Бубнова — Галеркина. Для вектора обобщенных координат  $\mathbf{q}(\tau)$  получим обыкновенное дифференциальное уравнение в матричном виде

$$\mathbf{A}\ddot{\mathbf{q}} + 2\alpha\sqrt{\beta}\mathbf{B}\dot{\mathbf{q}} + [\mathbf{C} + \alpha^2\mathbf{D}]\mathbf{q} = 0, \quad (6)$$

где  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{C}$  и  $\mathbf{D}$  — матрицы размера  $n \times n$ ,

$$\mathbf{A} = \int_0^1 \boldsymbol{\varphi}(\xi) \boldsymbol{\varphi}^T(\xi) d\xi;$$

$$\mathbf{B} = \int_0^1 \boldsymbol{\varphi}(\xi) \left[ \frac{d\boldsymbol{\varphi}(\xi)}{d\xi} \right]^T d\xi;$$

$$\mathbf{C} = \int_0^1 \boldsymbol{\varphi}(\xi) \left[ \frac{d^4 \boldsymbol{\varphi}(\xi)}{d\xi^4} \right]^T d\xi;$$

$$\mathbf{D} = \int_0^1 \boldsymbol{\varphi}(\xi) \left[ \frac{d^2 \boldsymbol{\varphi}(\xi)}{d\xi^2} \right]^T d\xi.$$

Представляя вектор обобщенных координат  $\mathbf{q}(t)$  как

$$\mathbf{q}(t) = \mathbf{q}_0 \exp(\lambda t),$$

для характеристических показателей  $\lambda$  имеем проблему собственных значений в виде матричного полинома

$$\mathbf{P}_2 \lambda^2 + \mathbf{P}_1 \lambda + \mathbf{P}_0 = 0.$$

Здесь  $\mathbf{P}_2$ ,  $\mathbf{P}_1$ ,  $\mathbf{P}_0$  — матрицы-коэффициенты характеристического полинома,

$$\mathbf{P}_2 = \mathbf{A}; \quad \mathbf{P}_1 = 2\alpha\sqrt{\beta}\mathbf{B}; \quad \mathbf{P}_0 = \mathbf{C} + \alpha^2\mathbf{D}.$$

В качестве варьируемых параметров системы примем относительную массу жидкости  $\beta$  и безразмерную скорость ее течения  $\alpha$ . Совокупность значений параметров  $\beta$  и  $\alpha$ , содержащихся в элементах этих матриц и соответствующих характеристическим показателям с отрицательными действительными частями, определяет область устойчивости тривиального положения равновесия.

Для трубопроводов — заземленного на одном конце и свободного на другом — потеря

устойчивости происходит только колебательным образом по типу флаттера. Границу флаттера удобно построить с использованием одного из критериев отрицательности действительных частей характеристических показателей — критерия Рауса — Гурвица. Для этого составим характеристический полином Гурвица  $H(\alpha, \beta)$  из элементов матрицы

$$\mathbf{G}(\alpha, \beta) = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{E} \\ -\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{C} + \alpha^2 \mathbf{D}) & -2\alpha\sqrt{\beta}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B} \end{bmatrix}.$$

где  $\mathbf{0}$  и  $\mathbf{E}$  — нулевая и единичная матрицы размера  $n \times n$ .

Матрица  $\mathbf{G}(\alpha, \beta)$  получена в результате преобразования уравнения (6) к нормальной форме Коши. Равенство нулю главного минора матрицы Гурвица порядка  $2n-1$ , т. е.  $\Delta_{2n-1}(\alpha, \beta) = 0$ , определяет границу области флаттера на плоскости параметров нагружения  $\alpha, \beta$  [14, 15].

Отметим, что в неконсервативных системах, где возможен квазистатический тип потери устойчивости — дивергенция, соответствующая граница ее области может быть найдена из условия равенства нулю определителя матрицы Гурвица или (что то же самое) равенства нулю свободного члена характеристического полинома.

На рис. 2 сплошная линия есть граница области устойчивости прямолинейной формы равновесия трубопровода, полученная при удержании восьми членов ряда в разложении решения возмущенного движения в ряд по формам собственных колебаний. Пунктирная линия определяет частоту флаттера  $\omega_f$ , отне-

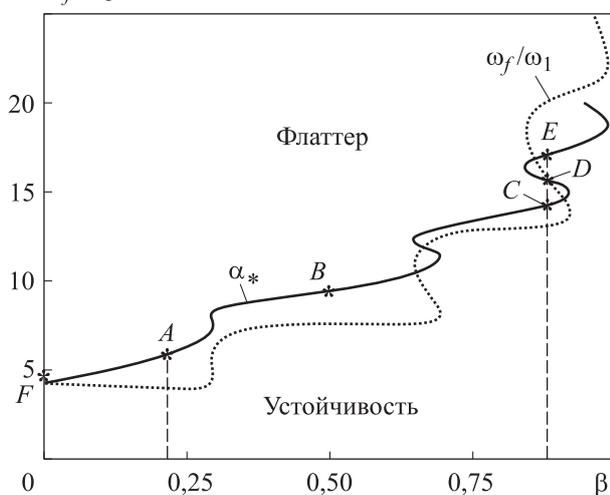


Рис. 2. Граница области устойчивости и частота флаттера

сенную к первой собственной частоте трубопровода  $\omega_1$ .

Такая кривая, впервые построенная М.П. Пайдуссисом [1] в 1966 г., встречается во многих работах, посвященных устойчивости трубопроводов. Граница флаттера при  $\beta \rightarrow 0$  исходит из окрестности точки  $F$  при критическом значении скорости потока  $\alpha_* = \sqrt{20,05} = 4,48$ , а точнее несколько ниже этой точки. Вычисления показали, что при  $\beta \rightarrow 0$  параметр  $\alpha_* \rightarrow 4,20$ .

Этот факт иллюстрирует известный парадокс Циглера, показывающий снижение параметров неконсервативных нагрузок при исчезающе малом демпфировании [13–15]. Действительно, если масса протекающей по трубопроводу жидкости весьма мала, то уравнение (6) совпадает по структуре с уравнением возмущенного движения для известной задачи Бека — сжатия консольного стержня следящей силой  $P$ . Решение этой задачи дает  $Pl^2/EI = 20,05$ .

Обсуждаемая точка  $F$  также соответствует классическому поведению характеристических показателей. Здесь имеет место явное взаимодействие первой и второй собственных форм и частот. С увеличением параметра  $\alpha$  первая собственная частота  $\omega_1$  как мнимая часть первого характеристического показателя  $\lambda_1$  увеличивается, а вторая  $\omega_2$  уменьшается (рис. 3). Действительные части характеристических показателей  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  равны нулю.

Такая ситуация сохраняется вплоть до достижения параметром  $\alpha$  критического значения  $\alpha_*$ , при котором происходит слияние частот  $\omega_1 = \omega_2 = \omega_f$  и превращение их в частоту флаттера  $\omega_f$ , а один из характеристических показателей получает положительную действительную часть, что свидетельствует о возрастании амплитуд колебаний трубопровода.

Аналогично ведут себя характеристические показатели и в других классических задачах неконсервативной устойчивости (задача Реута, флаттер пластин и оболочек в потоке газа и др.). Безусловно, наличие в системе демпфирования вносит коррективы в зависимости характеристических показателей от параметров неконсервативной нагрузки [13–15].

Однако наиболее замысловато  $\lambda_k$  ведут себя в рассматриваемой системе при изменении параметров протекающей по трубопроводу жидкости. Проведем исследование траекторий характеристических показателей на комплексной

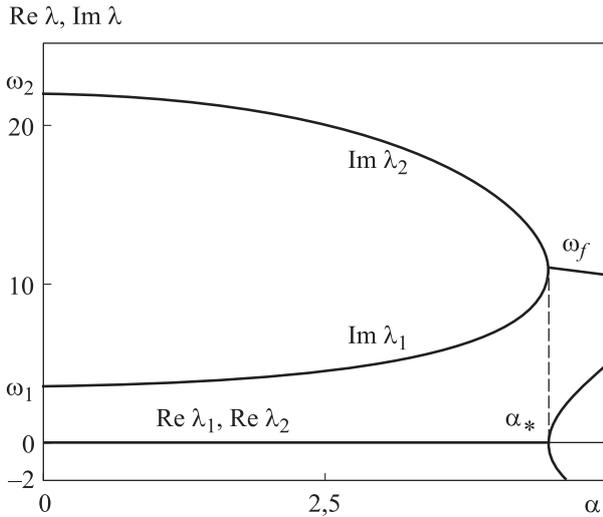


Рис. 3. Зависимость действительных и мнимых частей характеристических показателей от скорости потока  $\alpha$  при  $\beta \rightarrow 0$

плоскости  $Re\lambda, Im\lambda$  при фиксированной относительной массе  $\beta$  и увеличении параметра  $\alpha$  до значения  $\alpha_*$ , при которых происходит пересечение одним (первым по очереди) из характеристических показателей мнимой оси и  $\lambda$  переходит в правую полуплоскость, а его действительная часть становится положительной.

Этот факт соответствует динамической потере устойчивости, т. е. флаттеру. Мнимая часть  $\lambda$  определяет частоту флаттера  $\omega_f$ . Значения  $\beta$  и  $\alpha_*$  образуют границу области устойчивости — границу флаттера. С применением метода дифференциальных квадратур такие траектории, построенные в ряде зарубежных работ, носят название диаграмм Арганда [5, 8–11].

На рис. 4 построены траектории характеристических показателей  $\lambda_1, \lambda_2$  и фрагмент траектории  $\lambda_3$  при  $\beta = 0,2$ . Траектории всех характеристических показателей начинаются на мнимой оси  $\lambda$  со значений  $\omega_k$ , соответствующих частотам собственных колебаний консольной трубы с неподвижной жидкостью как корни уравнения  $|C - \omega^2 A| = 0$ . При параметре  $\alpha = 5,6$  и  $Im\lambda_2 = \omega_f = 13,75$  характеристический показатель  $\lambda_2$  в точке А (см. рис. 2) переходит в правую полуплоскость и  $Re\lambda_2 > 0$ , что соответствует флаттеру в системе.

Проведем аналогичное исследование для случая  $\beta = 0,5$  (рис. 5). Здесь неустойчивость в системе обусловлена пересечением мнимой оси в точке В характеристическим показателем  $\lambda_3$  при  $\alpha_* = 9,32$  (см. рис. 2). Частота флаттера составляет  $Im\lambda_3 = \omega_f = 26,6$ .

Для пояснения немонотонности границы флаттера, обусловленной выходом и временным возвращением характеристического показателя в правую полуплоскость, проведем вычисление траекторий  $\lambda_k$  для параметра относительной массы  $\beta = 0,88$  (см. рис. 2 и 6).

Динамическая неустойчивость системы обусловлена поведением характеристического показателя  $\lambda_1$ , который при  $\alpha_* = 14,2$  в точке С переходит в правую полуплоскость, но с ростом  $\alpha$  до значения  $\alpha_* = 15,7$  он возвращается в левую полуплоскость с отрицательной действительной частью в точке D плоскости  $Re\lambda, Im\lambda$ . Дальнейшее увеличение параметра  $\alpha$  приводит к тому, что при  $\alpha_* = 16,9$  в точке E характеристический показатель  $\lambda_1$  опять переходит в правую полуплоскость уже безвозвратно.

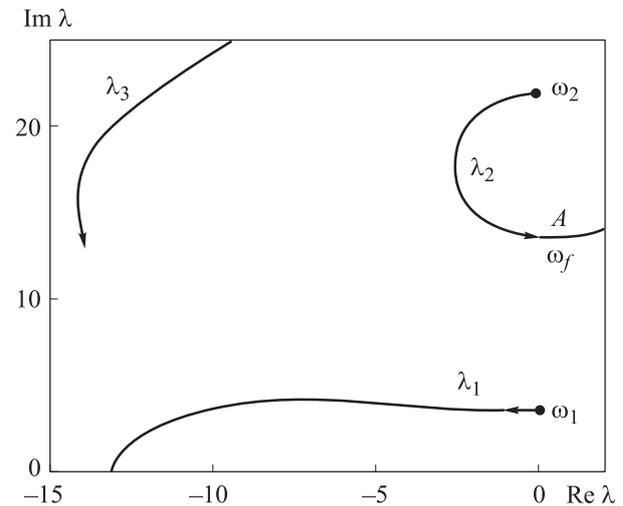


Рис. 4. Траектории характеристических показателей при  $\beta = 0,2$

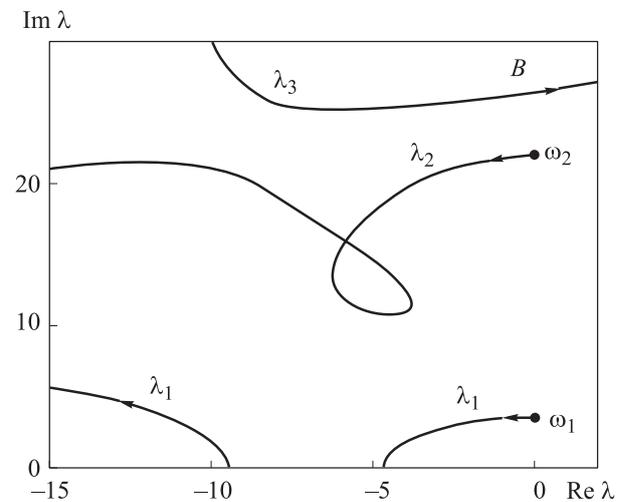


Рис. 5. Траектории характеристических показателей при  $\beta = 0,5$  и  $\alpha = var$

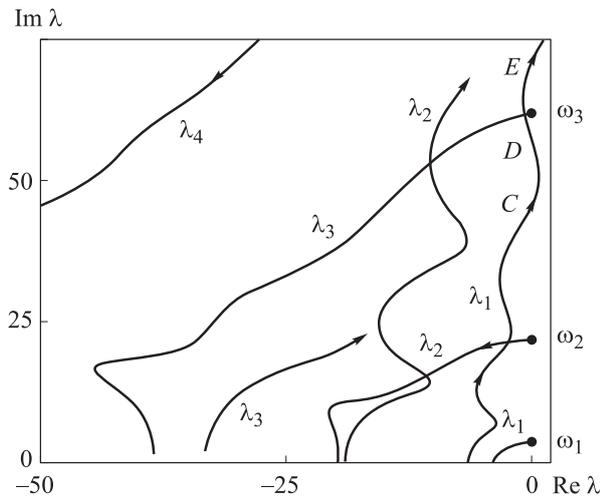


Рис. 6. Траектории характеристических показателей при  $\beta = 0,88$

Таким образом, граница области устойчивости в зависимости от параметра, характеризующего относительную массу протекающей жидкости, определяется выходом различных характеристических показателей в правую полуплоскость. Так, если параметр  $\beta \in [0; 0,384]$ , то мнимую ось слева направо пересекает характеристический показатель  $\lambda_2$ , определяя при этом значения параметра  $\alpha_*$ , т. е. границу области устойчивости, а также частоту флаттера  $\omega_f = \text{Im} \lambda_2$ .

Для параметра  $\beta \in [0,384; 0,530]$  границу и частоту флаттера определяет показатель  $\lambda_3$ . В диапазоне параметра  $\beta \in [0,530; 0,614]$  вновь инициатива по смене устойчивости на неустойчивость принадлежит показателю  $\lambda_2$ . И, наконец, при  $\beta \in [0,614; 1,000]$  кривую  $\alpha_*(\beta)$  определяет характеристический показатель  $\lambda_1$ .

Аналогичные результаты с применением метода дифференциальных квадратур для определения характерных участков на плоскости параметров  $\beta, \alpha$  получены в работе [17] и сделаны выводы о преобладающих модах в колебательном движении трубопровода при потере устойчивости. Влияние скорости потока жидкости на изменение модовых форм рассмотрено в статье [10].

Проведем исследование формы флаттера на основе метода разложения решения уравнения возмущенного движения по формам собственных колебаний трубопровода.

Зависимость частоты флаттера, отнесенная к первой собственной частоте пустого трубопровода, показана на рис. 2 пунктирной линией. Из рисунка следует, что характеры кривой  $\omega_f(\beta)$  и

границы области устойчивости  $\alpha_*(\beta)$  вполне согласованы. Поведение характеристических показателей, а точнее их расположение в момент динамической потери устойчивости трубопровода, определяют форму флаттера.

Наглядную картину этих форм флаттера дают фигуры, построенные на рис. 7, а–в. Здесь для трех характерных точек на границе флаттера и для  $p = 30$  моментов времени, на которые поделен период колебаний трубопровода  $T = 2\pi/\omega_f$ , построены формы изгиба оси трубопровода для моментов времени  $\tau_k = k\Delta T$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots, 30$ , где  $\Delta T = T/p$ .

Причем выбран фрагмент движения, соответствующий установившимся колебаниям трубопровода, возникающим после некоторых весьма малых начальных условий для обобщенных координат  $q_k(\tau)$ . Деформации трубопровода при безразмерной продольной координате  $\xi = 0 \dots 1$  в каждый момент времени определяются выражением (6).

На рис. 7, а на границе области устойчивости для  $\alpha_* = 5,6$  и  $\beta = 0,2$ , где при малых начальных возмущениях реализуется флаттер с частотой  $\omega_f = 13,72$ , изображены формы изгиба трубопровода в течение одного периода. Здесь основной вклад в форму флаттера вносят первая и вторая собственные формы, что наблюдается визуально по рисунку, а также подтверждено соотношениями между обобщенными координатами.

Потеря устойчивости связана с выходом в правую полуплоскость характеристического показателя  $\lambda_2$  (см. рис. 4). Увеличение относительной массы жидкости  $\beta$  повышает критическое значение  $\alpha_*$ , частоту флаттера  $\omega_f$ , а также инициирует смену характеристического показателя с  $\lambda_2$  на  $\lambda_3$  (см. рис. 5), ответственного за потерю устойчивости, действительная часть которого становится положительной.

На рис. 7, б для точки на границе флаттера с параметрами  $\alpha_* = 9,32$  и  $\beta = 0,5$  с траекториями  $\lambda_k$ , изображенными на рис. 5, построена форма изгиба трубопровода при динамической потере устойчивости. Здесь уже явно проявляется вклад третьей собственной формы в форму флаттера с частотой  $\omega_f = 26,55$ . Наиболее любопытными и неожиданными являются случаи значений  $\beta$ , близких к единице. Эта область характеризуется сложными траекториями характеристических показателей.

На рис. 7, в показана форма флаттера при  $\alpha_* = 13,53$  и  $\beta = 0,8$ . Здесь наступление флатте-

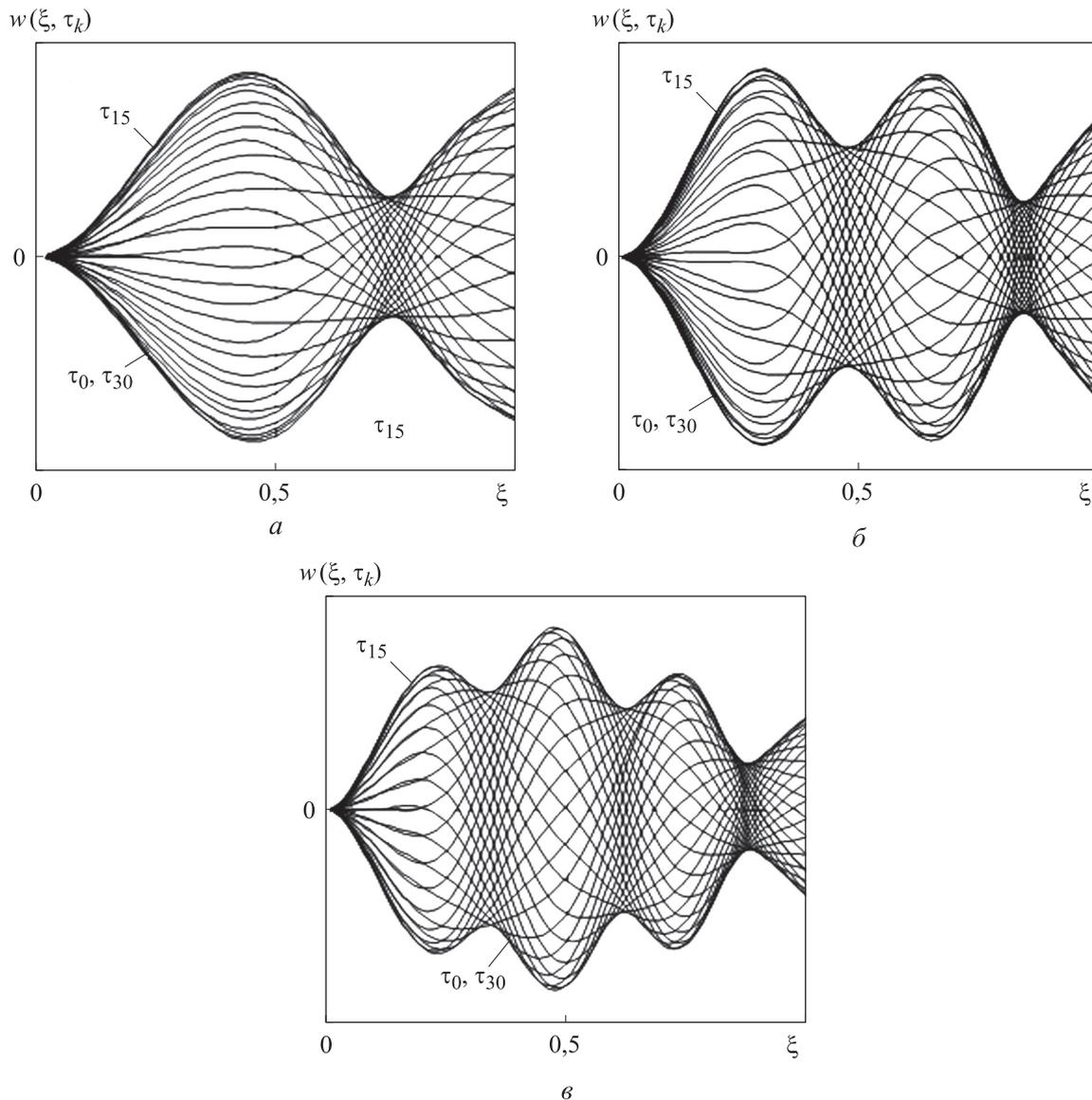


Рис. 7. Формы флаттера на границе области устойчивости при различных значениях безразмерных параметров:  
 $a$  —  $\alpha=5,60$ ,  $\beta=0,2$ ;  $b$  —  $\alpha=9,32$ ,  $\beta=0,5$ ;  $v$  —  $\alpha=13,53$ ,  $\beta=0,8$

ра связано с увеличением  $\text{Im}\lambda_1$  и выходом  $\lambda_1$  в правую полуплоскость. Причем этот выход происходит при значениях, близких к  $\omega_3$ , при существенном снижении  $\lambda_4$ . Видимо эти причины и приводят к тому, что формы изгиба трубопровода (форма флаттера) содержат формы собственных колебаний с первой по четвертую.

## Выводы

1. Полученные данные существенно дополняют результаты в области расчета устойчивости упругих систем, находящихся в условиях некон-

сервативного нагружения. В частности, на основе метода разложения решения уравнения возмущенного движения по формам собственных колебаний построены траектории характеристических показателей в зависимости от параметров нагружения, определены частоты динамической потери устойчивости. Получены наглядные рисунки, характеризующие формы флаттера на границе области устойчивости.

2. Результаты работы могут быть использованы при проектировании и расчете на устойчивость технических объектов, содержащих трубопроводы с протекающей по ним жидкостью.

## Литература

- [1] Gregory R.W., Paidoussis M.P. Unstable Oscillation of Tubular Cantilever Fluid. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Series*, 1966, vol. 293, iss. 1435, pp. 528–542.
- [2] Феодосьев В.И. *Избранные задачи и вопросы по сопротивлению материалов*. Москва, Наука, 1973. 400 с.
- [3] Elishakoff I., Vittori P. A paradox of non-monotonicity in stability of pipes conveying fluid. *Theoretical and Applied Mechanics*, 2005, vol. 32, pp. 235–282.
- [4] Каган-Розенцвейг Л.М. О механизме потери устойчивости равновесия консольной трубы с протекающей жидкостью. *Вестник гражданских инженеров*, 2012, № 1(30), с. 102–107.
- [5] Marzani A., Mazzotti M., Viola E., Vittori P., Elishakoff I. FEM Formulation for Dynamic Instability of Fluid-Conveying Pipe on No uniform Elastic Foundation. *Mechanics Based Design of Structures and Machines: An International Journal*, 2012, vol. 40(1), pp. 83–95, doi: 10.1080/15397734.2011.618443
- [6] Bahaadini, R., Hosseini, M. Flow-induced and mechanical stability of cantilever carbon nanotubes subjected to an axial compressive load. *Applied Mathematical Modelling*, 2018, vol. 59, pp. 597–613, doi: <https://doi.org/10.1016/j.apm.2018.02.015>
- [7] Paidoussis M.P. The canonical problem of the fluid-conveying pipe and radiation of the knowledge gained to other dynamics problems across. *Journal of Sound and Vibration*, 2008, vol. 310, pp. 462–492, doi: <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2007.03.065>
- [8] Bellman R.E., Kashef B.G., Casti J. Differential quadrature: A technique for the rapid solution of nonlinear partial differential equations. *Journal of Computational Physics*, 1972, vol. 10, iss. 1, pp. 40–52, doi: 10.1016/0021-9991(72)90089-7
- [9] Shu C. *Differential Quadrature and Its Application in Engineering*. Springer-Verlag, 2000. 340 p.
- [10] Wang L., Dai H.L., Ni Q. Nonconservative pipes conveying fluid: evolution of mode shapes with increasing flow velocity. *Journal of Vibration and Control*, 2015, vol. 21(16), pp. 3359–3367, doi: 10.1177/1077546314522490
- [11] Bahaadini R., Mohammad H. Flow-induced and mechanical stability of cantilever carbon nanotubes subjected to an axial compressive load. *Applied Mathematical Modelling*, 2018, vol. 59, pp. 597–613, doi: 10.1016/j.apm.2018.02.015
- [12] Bahaadini R., Mohammad R. D., Mohammad H., Zahra K. Stability analysis of composite thin-walled pipes conveying fluid. *Ocean Engineering*, 2018, vol. 160, pp. 311–323, doi: 10.1016/j.oceaneng.2018.04.061
- [13] Болотин В.В. *Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости*. Москва, Физматгиз, 1961. 339 с.
- [14] Радин В.П., Чирков В.П., Щугорев А.В., Щугорев В.Н. Методы определения критических значений неконсервативных нагрузок в задачах устойчивости механических систем. *Известия высших учебных заведений. Машиностроение*, 2019, № 10, с. 3–13, doi: 10.18698/0536-1044-2019-10-3-13
- [15] Радин В.П., Самогин Ю.Н., Чирков В.П., Щугорев А.В. *Решение неконсервативных задач теории устойчивости*. Москва, Физматлит, 2017. 240 с.
- [16] Seyranian A.R., Elishakoff I. *Modern problem of structural stability*. New York, Springer-Verlag Wien, 2002. 394 p.
- [17] Tornabene F., Marzani A., Viola E., Elishakoff I. Critical Flow Speeds of Pipes Conveying Fluid Using the Generalized Differential Quadrature Method. *Advances in Theoretical and Applied Mechanics*, 2010, vol. 3, no. 3, pp. 121–138.
- [18] Marzani A., Tornabene F., Viola E. Nonconservative stability problems via Generalized Differential Quadrature method. *Journal of Sound and Vibration*, 2008, vol. 315, pp. 176–196, doi:10.1016/j.jsv.2008.01.056
- [19] Барулина М.А. Применение обобщенного метода дифференциальных квадратур к решению двумерных задач механики. *Известия Саратовского университета. Новая сер. Сер. Математика. Механика. Информатика*, 2018, т. 18, вып. 2, с. 206–216, doi: 10.18500/1816-9791-2018-18-2-206-216
- [20] Вержбицкий В.М. *Численные методы (математический анализ и обыкновенные дифференциальные уравнения)*. Москва, Директ-Медиа, 2013. 400 с.

## References

- [1] Gregory R.W., Paidoussis M.P. Unstable Oscillation of Tubular Cantilever Fluid. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Series*, 1966, vol. 293, iss. 1435, pp. 528–542.
- [2] Feodos'yev V.I. *Izbrannyye zadachi i voprosy po soprotivleniyu materialov* [Selected tasks and questions on the resistance of materials]. Moscow, Nauka publ., 1973. 400 p.
- [3] Elishakoff I., Vittori P. A paradox of non-monotonicity in stability of pipes conveying fluid. *Theoretical and Applied Mechanics*, 2005, vol. 32, pp. 235–282.
- [4] Kagan-Rozentsveyg L.M. On the stability loss mechanism of tubular cantilever conveying fluid. *Vestnik grazhdanskikh inzhenerov*, 2012, no. 1(30), pp. 102–107 (in Russ.).
- [5] Marzani A., Mazzotti M., Viola E., Vittori P., Elishakoff I. FEM Formulation for Dynamic Instability of Fluid-Conveying Pipe on No uniform Elastic Foundation. *Mechanics Based Design of Structures and Machines: An International Journal*, 2012, vol. 40(1), pp. 83–95, doi: 10.1080/15397734.2011.618443
- [6] Bahaadini, R., Hosseini, M. Flow-induced and mechanical stability of cantilever carbon nanotubes subjected to an axial compressive load. *Applied Mathematical Modelling*, 2018, vol. 59, pp. 597–613, doi: <https://doi.org/10.1016/j.apm.2018.02.015>
- [7] Paidoussis M.P. The canonical problem of the fluid-conveying pipe and radiation of the knowledge gained to other dynamics problems across. *Journal of Sound and Vibration*, 2008, vol. 310, pp. 462–492, doi: <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2007.03.065>
- [8] Bellman R.E., Kashef B.G., Casti J. Differential quadrature: A technique for the rapid solution of nonlinear partial differential equations. *Journal of Computational Physics*, 1972, vol. 10, iss. 1, pp. 40–52, doi: 10.1016/0021-9991(72)90089-7
- [9] Shu C. *Differential Quadrature and Its Application in Engineering*. Springer-Verlag, 2000. 340 p.
- [10] Wang L., Dai H.L., Ni Q. Nonconservative pipes conveying fluid: evolution of mode shapes with increasing flow velocity. *Journal of Vibration and Control*, 2015, vol. 21(16), pp. 3359–3367, doi: 10.1177/1077546314522490
- [11] Bahaadini R., Mohammad H. Flow-induced and mechanical stability of cantilever carbon nanotubes subjected to an axial compressive load. *Applied Mathematical Modelling*, 2018, vol. 59, pp. 597–613, doi: 10.1016/j.apm.2018.02.015
- [12] Bahaadini R., Mohammad R. D., Mohammad H., Zahra K. Stability analysis of composite thin-walled pipes conveying fluid. *Ocean Engineering*, 2018, vol. 160, pp. 311–323, doi: 10.1016/j.oceaneng.2018.04.061
- [13] Bolotin V.V. *Nekonservativnyye zadachi teorii uprugoy ustoychivosti* [Non-conservative problems of the theory of elastic stability]. Moscow, Fizmatgiz publ., 1961. 339 p.
- [14] Radin V.P., Chirkov V.P., Shchugorev A.V., Shchugorev V.N. Methods for Determining Critical Values of Nonconservative Loads in Problems of Stability of Mechanical Systems. *Proceedings of Higher Educational Institutions. Machine Building*, 2019, no. 10, pp. 3–13 (in Russ.), doi: 10.18698/0536-1044-2019-10-3-13
- [15] Radin V.P., Samogin Yu.N., Chirkov V.P., Shchugorev A.V. *Resheniye nekonservativnykh zadach teorii ustoychivosti* [Solution of non-conservative problems of stability theory]. Moscow, Fizmatlit publ., 2017. 240 p.
- [16] Seyranian A.R., Elishakoff I. *Modern problem of structural stability*. New York, Springer-Verlag Wien, 2002. 394 p.
- [17] Tornabene F., Marzani A., Viola E., Elishakoff I. Critical Flow Speeds of Pipes Conveying Fluid Using the Generalized Differential Quadrature Method. *Advances in Theoretical and Applied Mechanics*, 2010, vol. 3, no. 3, pp. 121–138.
- [18] Marzani A., Tornabene F., Viola E. Nonconservative stability problems via Generalized Differential Quadrature method. *Journal of Sound and Vibration*, 2008, vol. 315, pp. 176–196, doi:10.1016/j.jsv.2008.01.056
- [19] Barulina M.A. Application of Generalized Differential Quadrature Method to Two-dimensional Problems of Mechanics. *Izvestiya Saratovskogo universiteta. Novaya ser. Ser. Matematika. Mekhanika. Informatika*, 2018, vol. 18, iss. 2, pp. 206–216, doi: 10.18500/1816-9791-2018-18-2-206-216

- [20] Verzhbitskiy V.M. *Chislennyye metody (matematicheskiy analiz i obyknovennyye differentsial'nyye uravneniya)* [Numerical methods (mathematical analysis and ordinary differential equations)]. Moscow, Direkt-Media publ., 2013. 400 p.

Статья поступила в редакцию 28.06.2020

## Информация об авторах

**РАДИН Владимир Павлович** — кандидат технических наук, профессор кафедры «Робототехника, мехатроника, динамика и прочность машин». НИУ «МЭИ» (111250, Москва, Российская Федерация, Красноказарменная ул., д. 14, e-mail: radinvp@gmail.com).

**ЧИРКОВ Виктор Петрович** — доктор технических наук, профессор кафедры «Робототехника, мехатроника, динамика и прочность машин». НИУ «МЭИ» (111250, Москва, Российская Федерация, Красноказарменная ул., д. 14, e-mail: victor.p.chirkov@gmail.com).

**ЩУГОРЕВ Алексей Владимирович** — кандидат технических наук, ассистент кафедры «Робототехника, мехатроника, динамика и прочность машин». НИУ МЭИ (111250, Москва, Российская Федерация, Красноказарменная ул., д. 14, e-mail: alexey.salut@gmail.com).

**ЩУГОРЕВ Владимир Николаевич** — кандидат технических наук, доцент кафедры «Робототехника, мехатроника, динамика и прочность машин». НИУ «МЭИ» (111250, Москва, Российская Федерация, Красноказарменная ул., д. 14, e-mail: shchugorev.vn@gmail.com).

**НОВИКОВА Ольга Валерьевна** — кандидат технических наук, доцент кафедры «Робототехника, мехатроника, динамика и прочность машин». НИУ «МЭИ» (111250, Москва, Российская Федерация, Красноказарменная ул., д. 14, e-mail: NovicovaOV@mpei.ru).

## Information about the authors

**RADIN Vladimir Pavlovich** — Candidate of Science (Eng.), Professor, Department of Robotics, Mechatronics, Dynamics and Strength of Machines. National Research University — Moscow Power Engineering Institute (111250, Moscow, Russian Federation, Krasnokazarmennaya St., Bldg. 14, e-mail: radinvp@gmail.com).

**CHIRKOV Victor Petrovich** — Doctor of Science (Eng.), Professor, Department of Robotics, Mechatronics, Dynamics and Strength of Machines. National Research University — Moscow Power Engineering Institute (111250, Moscow, Russian Federation, Krasnokazarmennaya St., Bldg. 14, e-mail: victor.p.chirkov@gmail.com).

**SHCHUGOREV Aleksei Vladimirovich** — Candidate of Sciences (Eng.), Teaching Assistant, Department of Robotics, Mechatronics, Dynamics and Strength of Machines. National Research University — Moscow Power Engineering Institute (111250, Moscow, Russian Federation, Krasnokazarmennaya St., Bldg. 14, e-mail: alexey.salut@gmail.com).

**SHCHUGOREV Vladimir Nikolaevich** — Candidate of Sciences (Eng.), Associate Professor, Department of Robotics, Mechatronics, Dynamics and Strength of Machines. National Research University — Moscow Power Engineering Institute (111250, Moscow, Russian Federation, Krasnokazarmennaya St., Bldg. 14, e-mail: shchugorev.vn@gmail.com).

**NOVIKOVA Olga Valerievna** — Candidate of Sciences (Eng.), Associate Professor, Department of Robotics, Mechatronics, Dynamics and Strength of Machines. National Research University — Moscow Power Engineering Institute (111250, Moscow, Russian Federation, Krasnokazarmennaya St., Bldg. 14, e-mail: NovicovaOV@mpei.ru).

### Просьба ссылаться на эту статью следующим образом:

Радин В.П., Чирков В.П., Щугорев А.В., Щугорев В.Н., Новикова О.В. Динамическая устойчивость трубопровода с протекающей по нему жидкостью. *Известия высших учебных заведений. Машиностроение*, 2020, № 11, с. 3–12, doi: 10.18698/0536-1044-2020-11-3-12

### Please cite this article in English as:

Radin V.P., Chirkov V.P., Shchugorev A.V., Shchugorev V.N., Novikova O.V. Dynamic Stability of Pipelines with Fluid Flow. *BMSTU Journal of Mechanical Engineering*, 2020, no. 11, pp. 3–12, doi: 10.18698/0536-1044-2020-11-3-12