

УДК.539.3

Получение уравнений статики, динамики и устойчивости для трехслойных пластин с упруго-присоединенными массами

О.А. Нехаевская

При построении теории трехслойных анизотропных пластин с присоединенными массами учтены допущения для пластин средней толщины. Разрешающая система дифференциальных уравнений движения получена с использованием смешанного вариационного принципа Хеллингера – Рейсснера. Проведен анализ зависимостей собственных частот и форм колебаний пластины от способа присоединения масс и жесткости упругих элементов. Решены тестовые задачи.

Ключевые слова: многослойные пластины, сосредоточенные массы, массы конечных размеров, смешанный вариационный принцип.

A set of equations in the normal form is based on the theory of thick shells taking into account the effect of transverse shear deformations. The resolving system of differential equations of motion for multilayered plates has been obtained by use of the Hellinger-Reissner mixed variational principle. The analysis of the dependencies of the plate eigenfrequencies and mode shapes from the body attachment method and resilient members rigidity has been performed.

Keywords: multilayered plates, material points, finite sized bodies, mixed variational principle.

В настоящее время многослойные конструкции находят широкое применение в различных отраслях современной техники. Для полной реализации возможностей, заложенных в самой идее многослойных конструкций, необходимы надежные методы расчета, позволяющие прогнозировать свойства и поведение будущей конструкции. Применение сотовых панелей в конструкциях корпусов приборных и агрегатных отсеков космических кораблей вызывает необходимость решения задач статики и динамики многослойных панелей, несущих элементы, присоединенные в дискретных точках. В данной статье проведен анализ динамического поведения трехслойных пластин с различными способами присоединения масс: точечные массы, жестко связанные с пластиной; точечные массы, связанные с пластиной с помощью упругих элементов; массы конечных размеров, дискретно присоединенные к пластине с помощью упругих элементов.

Основные соотношения для трехслойной ортотропной пластины с учетом деформаций поперечных сдвигов. Получение системы разрешающих уравнений

Теория многослойных оболочек и пластин (рис. 1), в которой при выводе уравнений равновесия для каждого слоя принимается кинема-



НЕХАЕВСКАЯ
Ольга Алексеевна
ассистент кафедры
«Аэрокосмические
системы»
(МГТУ им. Н.Э. Баумана)

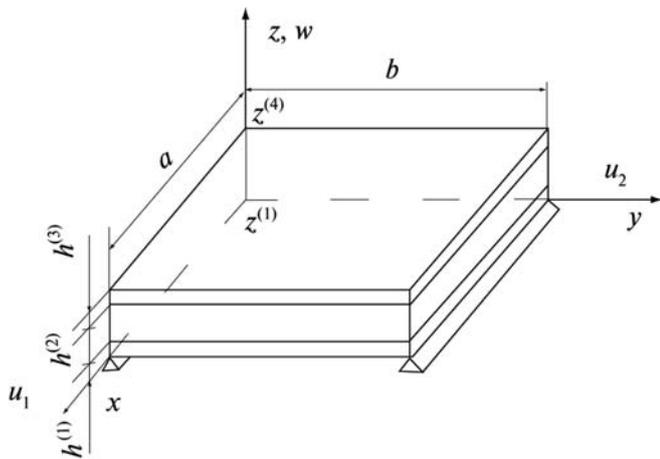


Рис. 1. Система координат и обозначения для трехслойной пластины

тическая гипотеза Тимошенко (гипотеза ломаной линии), разработана Э.И. Григолюком и Г.М. Куликовым [1]. С точки зрения этой теории все слои равноценны, что дает возможность максимально алгоритмизировать задачу. Кинематические, геометрические и физические соотношения приведены в работе [2].

Разрешающая система уравнений получена с использованием смешанного вариационного принципа Хеллингера—Рейсснера [3]. На его основе строится непротиворечивый геометрически нелинейный вариант теории многослойных пластин и оболочек, в котором за независимые варьируемые величины принимаются не только перемещения, но и поперечные компоненты тензора напряжений, являющиеся непрерывными функциями координаты z всюду в теле оболочки, в том числе и на поверхности разделения слоев. При этом на граничных поверхностях они принимают заданные значения p_i^+, p_i^- .

Распределение поперечных касательных напряжений в n -м слое (имеет вид рис. 2)

$$\begin{bmatrix} \sigma_{31}^{(n)} \\ \sigma_{32}^{(n)} \end{bmatrix} = \sigma_2^{(n)} = p^- + \frac{z}{h}(p^+ - p^-) + f_0(z)\mu^0 + f_n(z)\mu^{(n)},$$

где
$$\mu^{(0)} = \begin{Bmatrix} \mu_1^{(0)} \\ \mu_2^{(0)} \end{Bmatrix}; \mu^{(n)} = \begin{Bmatrix} \mu_1^{(n)} \\ \mu_2^{(n)} \end{Bmatrix};$$

$$f_0(z) = \frac{6}{h^3} z(h-z), z \in [0, h]; \quad (1)$$

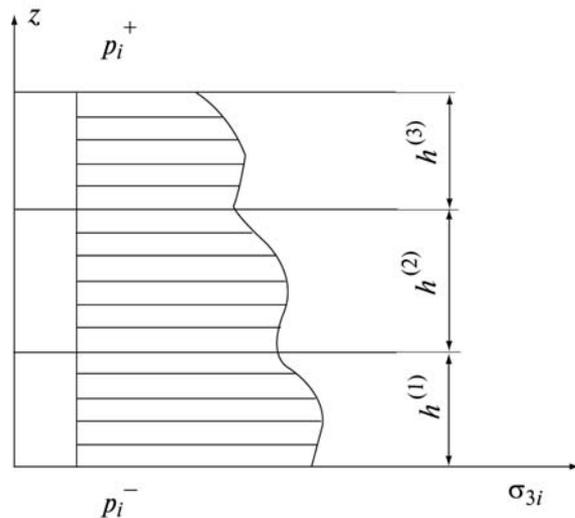


Рис. 2. Распределение касательных напряжений по толщине многослойной пластины

$$f_n(z) = \frac{6}{(h^{(n)})^3} (z - z^{(n)})(z^{(n+1)} - z),$$

$$z \in [z^{(n)}, z^{(n+1)}]$$

Будем считать, что пластина шарнирно-оперта при $y = 0$ и $y = b$ и обладает произвольными граничными условиями при $x = 0$ и $x = a$. Выполним разложение нагрузок и искомым функций в ряды Фурье по координате y :

$$V(x, y) = \sum_{k=1}^M S_k(y) V_k(x), \quad (V, P), \quad (2)$$

где $S_k(y)$ — диагональная матрица: $S_k(y) = [\cos \alpha_k y, \sin \alpha_k y, \cos \alpha_k y, \sin \alpha_k y, \dots,$

$$\cos \alpha_k y, \sin \alpha_k y, \cos \alpha_k y], \quad \alpha_k = \frac{k\pi}{b};$$

$V = [u_1^{(1)} u_2^{(1)} \theta_1^{(1)} \theta_2^{(1)} \theta_1^{(2)} \theta_2^{(2)} \dots \theta_1^{(n)} \theta_2^{(n)} \dots \dots \theta_1^{(N)} \theta_2^{(N)} w]^T$ — вектор состояния сечения, где

в качестве обобщенных перемещений приняты тангенциальные перемещения на поверхности первого слоя, углы поворота сечений слоев и прогиб, что позволяет применить автоматизированный алгоритм при построении разрешающих уравнений в канонической форме, $u_1^{(n)}(x, y), (1,2)$ — касательные перемещения вдоль координат x, y на нижней поверхности n -го слоя, $\theta_1^{(n)}, \theta_2^{(n)}$ — углы поворота сечений n -го слоя; P — вектор обобщенных силовых

факторов, входящих в вектор состояния сечения пластины.

С помощью смешанного вариационного принципа [2] и разложения компонент вектора состояния сечения в ряд по координате y (2) получена система дифференциальных уравнений, разрешенных относительно первых производных по координате x от вектора состояния сечения:

$$\frac{d}{dx} \mathbf{Y}_k^*(x) = \mathbf{A}_k(x) \mathbf{Y}_k^*(x) - \omega_k^2 \mathbf{B}_k(x) \mathbf{Y}_k^*(x) - \mathbf{Q}_k, \quad (3)$$

где $\mathbf{Y}_k^*(x, t) = \mathbf{Y}_k^*(x) \cos(\omega t)$; $\mathbf{Y}_k^* = [(\mathbf{V}_k)^T, (\mathbf{P}_k)^T]^T$ — вектор состояния сечения, включающий обобщенные перемещения и силовые факторы в глобальной системе координат; $\mathbf{A}_k^* = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11}^* & \mathbf{A}_{12}^* \\ \mathbf{A}_{21}^* & \mathbf{A}_{22}^* \end{bmatrix}$, $\mathbf{A}_k, \mathbf{B}_k$ — матрицы коэффициентов системы дифференциальных уравнений; \mathbf{Q}_k — вектор внешней распределенной нагрузки.

Интегрирование по второй пространственной координате осуществляется методом последовательных приближений Пикара в матричной формулировке. Математические основы метода изложены в работе [4]. Пластина разбивается на несколько расчетных участков линиями, параллельными оси y , таким образом, чтобы места присоединения грузов к пластине располагались на границах участков. На каждом из участков находится нормированное решение исходного дифференциального уравнения. Длины участков выбирают такими, чтобы в пределах i -го участка решения однородного уравнения оставались линейно независимыми. Преимуществом рассматриваемого метода по сравнению с методом С.К. Годунова является то, что решения на каждом из участков находятся независимо от предыдущих, поэтому не требуются операции ортонормирования векторов решения. В результате разрешающая система уравнений представляется в виде, принятом в методе конечных элементов:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_0^i &= (\mathbf{K}_{11}^i - \omega^2 \mathbf{M}_{11}^i) \mathbf{V}_0^i + (\mathbf{K}_{12}^i - \omega^2 \mathbf{M}_{12}^i) \mathbf{V}_1^i; \\ \mathbf{P}_1^i &= (\mathbf{K}_{21}^i - \omega^2 \mathbf{M}_{21}^i) \mathbf{V}_0^i + (\mathbf{K}_{22}^i - \omega^2 \mathbf{M}_{22}^i) \mathbf{V}_1^i. \end{aligned} \quad (4)$$

Отметим, что решение (4) относится к i -му участку пластины для k -й гармоники.

Стыковка участков i и $i+1$ на границе которых находятся точечные грузы

Рассмотрено несколько вариантов присоединения масс к пластине: точечные массы, жестко связанные с пластиной; точечные массы, связанные с пластиной с помощью упругих элементов; массы конечных размеров, связанные с пластиной четырьмя упругими элементами.

Для получения условий соединения участков, на границах которых расположены точечно присоединенные грузы (рис. 3), воспользуемся принципом возможных перемещений

$$\int_0^b \delta \mathbf{V}^T(x_{i+1}, y) (\mathbf{P}_1^i - \mathbf{P}_0^{i+1}) dy + \sum_{j=1}^J \left\{ \begin{aligned} & [\delta \mathbf{V}^T(x_{i+1}, y_j) - \delta \mathbf{U}_m^T(y_j)] \times \\ & \times \mathbf{C}_j [\mathbf{V}(x_{i+1}, y_j) - \mathbf{U}_m(y_j)] - \\ & - \omega^2 \delta \mathbf{U}_{c,j}^T \mathbf{B}_j \mathbf{U}_{c,j} \end{aligned} \right\} = 0, \quad (5)$$

$$\mathbf{C}_j = \begin{bmatrix} C_{11,j} & 0 & 0 \\ 0 & C_{22,j} & 0 \\ 0 & 0 & C_{33,j} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{B}_j = \begin{bmatrix} m_j & 0 & 0 \\ 0 & I_{y,j} & 0 \\ 0 & 0 & I_{x,j} \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{U}_m(y_j) = \mathbf{T}_j \mathbf{U}_{c,j}; \quad \mathbf{T}_j = \begin{bmatrix} 1 & 0 & y_j - y_{c,j} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

где $\mathbf{V}(x_{i+1}, y)$ — вектор перемещений пластины в $(i+1)$ -м сечении по оси x ; \mathbf{C}_j — матрица жесткости пружины; \mathbf{B}_j — матрица массовых инерционных характеристик груза; $\mathbf{U}_m(y_j)$ — вектор перемещений точки соединения груза и пружины; $\mathbf{U}_{c,j}$ — вектор перемещений центра тяжести j -го груза; J — количество грузов в сечении.

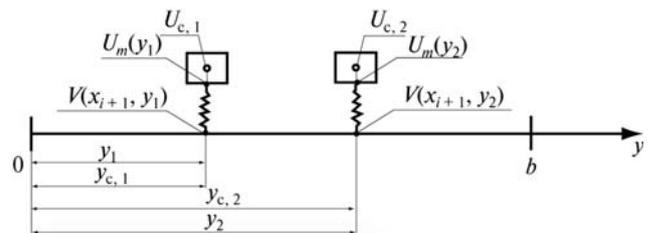


Рис. 3. Схема стыковки i и $i+1$ участков, на границах которых находятся точечные грузы

Используя соотношения для разложения в ряд Фурье по координате y (2) и учитывая независимость векторов $\delta \mathbf{V}^T(x_{i+1}, y)$, $\delta \mathbf{U}_{c,j}$, из выражения (5) получим следующие уравнения:

$$\frac{b}{2} \mathbf{G}_1^{i+1} \mathbf{V}(x_i) + \left[\frac{b}{2} \mathbf{G}_2^{i+1} + \sum_{j=1}^J \mathbf{S}(y_j) \mathbf{C}_j \mathbf{S}^T(y_j) \right] \times$$

$$\times \mathbf{V}(x_{i+1}) + \frac{b}{2} \mathbf{G}_3^{i+1} \mathbf{V}(x_{i+2}) - \sum_{j=1}^J \mathbf{S}(y_j) \mathbf{C}_j \mathbf{T}_j \mathbf{U}_{c,j} = 0;$$

$$\mathbf{T}_j^T \mathbf{C}_j \mathbf{S}^T(y_j) \mathbf{V}(x_{i+1}) + \mathbf{T}_j^T \mathbf{C}_j \mathbf{T}_j \mathbf{U}_{c,j} -$$

$$-\omega^2 \mathbf{B}_j \mathbf{U}_{c,j} = 0, \quad j=1, 2, \dots, J,$$

где $\mathbf{V} = \begin{bmatrix} \mathbf{V}_1 \\ \mathbf{V}_2 \\ \dots \\ \mathbf{V}_k \end{bmatrix}; \quad \mathbf{S}(y) = \begin{bmatrix} \mathbf{S}_1(y) \\ \mathbf{S}_2(y) \\ \dots \\ \mathbf{S}_k(y) \end{bmatrix};$

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} \mathbf{G}_1 & & & \\ & \mathbf{G}_2 & & \\ \dots & \dots & \dots & \\ & & & \mathbf{G}_k \end{bmatrix}; \quad b - \text{ширина пластины}$$

по координате y ;

$$\mathbf{G}_{1,k}^{i+1} = \mathbf{K}_{21,k}^i - \omega^2 \mathbf{M}_{21,k}^i; \quad \mathbf{G}_{3,k}^{i+1} = -(\mathbf{K}_{12,k}^{i+1} - \omega^2 \mathbf{M}_{12,k}^{i+1});$$

$$\mathbf{G}_{2,k}^{i+1} = (\mathbf{K}_{22,k}^i - \mathbf{K}_{11,k}^{i+1}) - \omega^2 (\mathbf{M}_{22,k}^i - \mathbf{M}_{11,k}^{i+1}).$$

При отсутствии грузов слагаемые, содержащие матрицы \mathbf{C}_j и векторы $\mathbf{U}_{c,j}$, следует положить равными нулю. Граничные условия при $x=0$ и $x=a$ вводятся в разрешающую систему уравнений с помощью дополнительных жесткостей.

Колебания пластины с грузами, присоединенными четырьмя упругими элементами

Для получения условий соединения участков, на границах которых находятся грузы, присоединенные четырьмя упругими элементами (рис. 4), воспользуемся принципом возможных перемещений. Для наглядности рассмотрим один груз, присоединенный к пластине четырьмя упругими элементами. Жесткость пружин одинакова.

Сохраняя предыдущие обозначения, можно записать

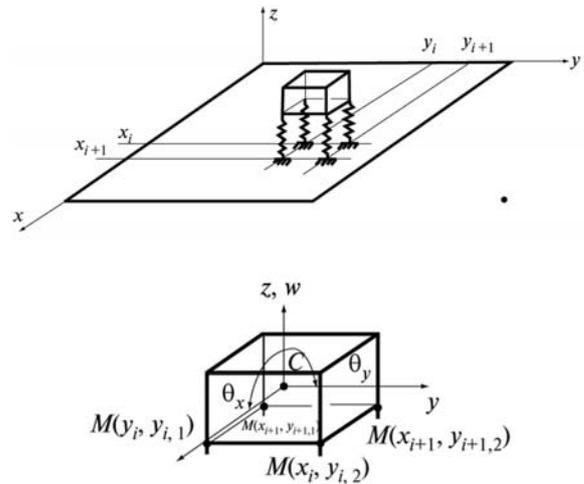


Рис. 4. Пластина с грузом, присоединенным четырьмя упругими элементами

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} \int_0^b \delta \mathbf{V}^T(x, y) (\mathbf{P}_1^i - \mathbf{P}_0^{i+1}) dy +$$

$$+ \sum_{n=1}^2 \left\{ \begin{aligned} & \left[\delta \mathbf{V}^T(x_i, y_{i,n}) - \delta \mathbf{U}_{m,n}^T(x_i, y_{i,n}) \right] \mathbf{C} \times \\ & \left[\mathbf{V}(x_i, y_{i,n}) - \mathbf{U}_{m,n}(x_i, y_{i,n}) \right] + \\ & \left[\delta \mathbf{V}^T(x_{i+1}, y_{i+1,n}) - \delta \mathbf{U}_{m,n}^T(x_{i+1}, y_{i+1,n}) \right] \mathbf{C} \times \\ & \left[\mathbf{V}(x_{i+1}, y_{i+1,n}) - \mathbf{U}_{m,n}(x_{i+1}, y_{i+1,n}) \right] \end{aligned} \right\} -$$

$$-\omega^2 \delta \mathbf{U}_c^T \mathbf{B} \mathbf{U}_c = 0; \tag{6}$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} C_{11} & 0 & 0 \\ 0 & C_{22} & 0 \\ 0 & 0 & C_{33} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{I}_y & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{I}_x \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{U}_{m,n}(x_i, y_{i,n}) = \mathbf{T}_{i,n} \mathbf{U}_c, \quad (i, i+1);$$

$$\mathbf{T}_{i,n} = \begin{bmatrix} 1 & x_i - x_c & y_{i,n} - y_c \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{T}_{i+1,n} = \begin{bmatrix} 1 & x_{i+1} - x_c & y_{i+1,n} - y_c \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Используя соотношения для разложения в ряд Фурье по координате y (2) и учитывая независимость векторов $\delta \mathbf{V}^T(x_i, y_{i,n})$, $\delta \mathbf{V}^T(x_{i+1}, y_{i+1,n})$, $\delta \mathbf{U}_c$, из выражения (6) получим следующие уравнения:

• для сечения x_i

$$\frac{b}{2} \mathbf{G}_1^i \mathbf{V}(x_{i-1}) + \left[\frac{b}{2} \mathbf{G}_2^i + \sum_{n=1}^2 \mathbf{S}(y_n) \mathbf{C} \mathbf{S}^T(y_n) \right] \mathbf{V}(x_i) + \frac{b}{2} \mathbf{G}_3^i \mathbf{V}(x_{i+1}) - \left[\sum_{n=1}^2 \mathbf{S}(y_n) \mathbf{C} \mathbf{T}_{i,n} \right] \mathbf{U}_c = 0;$$

• для сечения x_{i+1}

$$\frac{b}{2} \mathbf{G}_1^{i+1} \mathbf{V}(x_i) + \left[\frac{b}{2} \mathbf{G}_2^{i+1} + \sum_{n=1}^2 \mathbf{S}(y_n) \mathbf{C} \mathbf{S}^T(y_n) \right] \mathbf{V}(x_{i+1}) + \frac{b}{2} \mathbf{G}_3^{i+1} \mathbf{V}(x_{i+2}) - \left[\sum_{n=1}^2 \mathbf{S}(y_n) \mathbf{C} \mathbf{T}_{i+1,n} \right] \mathbf{U}_c = 0;$$

• для массы В

$$-\left[\sum_{n=1}^2 \mathbf{T}_{i,n}^T \mathbf{C} \mathbf{S}^T(y_n) \right] \mathbf{V}(x_i) - \left[\sum_{n=1}^2 \mathbf{T}_{i+1,n}^T \mathbf{C} \mathbf{S}^T(y_n) \right] \mathbf{V}(x_{i+1}) + \sum_{n=1}^2 (\mathbf{T}_{i,n}^T \mathbf{C} \mathbf{T}_{i,n} + \mathbf{T}_{i+1,n}^T \mathbf{C} \mathbf{T}_{i+1,n}) \mathbf{U}_c - \omega^2 \mathbf{B} \mathbf{U}_c = 0.$$

Результаты расчета

При расчете трехслойных пластин будем рассматривать сотовый наполнитель как некоторый условный, однородный по объему ортотропный наполнитель, приведенные упругие характеристики которого определяются по принципу эквивалентности работы реального и заменяющего его условного наполнителя. На основании упрощенной математической модели деформирования для сотовых конструкций получены приведенные механические характеристики наполнителя, выполненного из металла с ячейкой в форме шестиугольника.

Для сравнения с результатами, полученными разложением в двойные тригонометрические ряды, исследованию подверглась шарнирно опертая прямоугольная пластина с параметрами:

$$a = 2 \text{ м}, b = 1 \text{ м}, h^{(1),(3)} = 0,005 \text{ м}, h^{(2)} = 0,04 \text{ м}, E = 2 \cdot 10^{11} \text{ Па}, G = 7,69 \cdot 10^{10} \text{ Па}, \rho = 7800 \text{ кг / м}^3.$$

Параметры грузов:

$$m = 7,8 \text{ кг}, I_x = 0,52 \text{ кг} \cdot \text{м}^2, I_y = 0,52 \text{ кг} \cdot \text{м}^2.$$

Жесткости пружин варьировались.

Количество грузов — 4. Места крепления:

$$x_1 = 0,5 \text{ м}, y_1 = 0,25 \text{ м}, x_2 = 0,5 \text{ м}, y_2 = 0,75 \text{ м}, x_3 = 1,5 \text{ м}, y_3 = 0,25 \text{ м}, x_4 = 1,5 \text{ м}, y_4 = 0,75 \text{ м}.$$

Результаты, полученные предложенным методом, полностью совпадают с результатами решения методом разложения в двойные тригонометрические ряды. Зависимость изменения собственных частот колебаний пластины от жесткости упругих элементов при точечном присоединении грузов и при присоединении грузов по четырем дискретным точкам

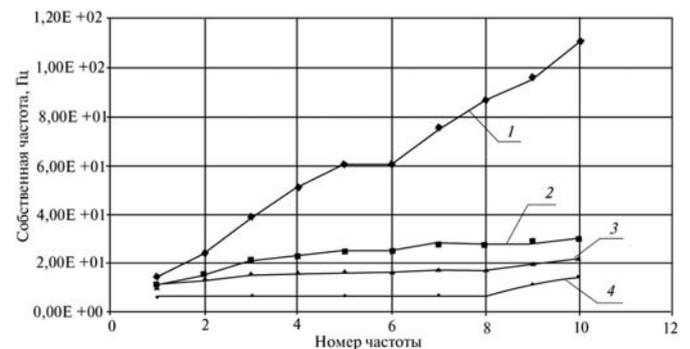


Рис. 5. Частоты собственных колебаний [Гц] шарнирно опертой трехслойной пластины с четырьмя точечными грузами:

- 1 — пластина без грузов; 2 — абсолютно жесткие пружины;
- 3 — $k_{11} = 10^8 \text{ Н/м}$, $k_{22} = 10^4 \text{ Н/м}$, $k_{33} = 10^4 \text{ Н/м}$;
- 4 — $k_{11} = 10^3 \text{ Н/м}$, $k_{22} = 10^3 \text{ Н/м}$, $k_{33} = 10^3 \text{ Н/м}$

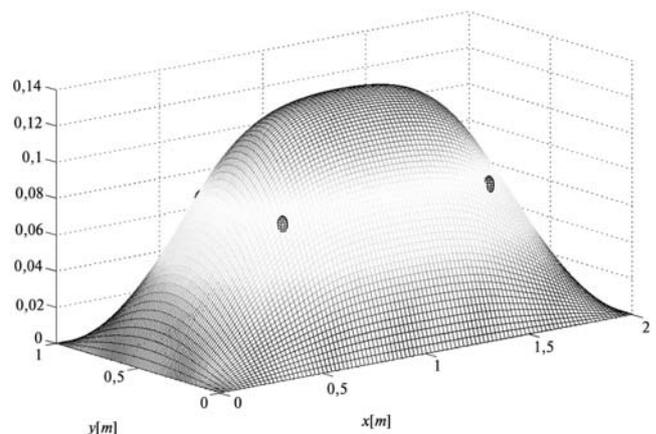


Рис. 6. Первая форма колебаний шарнирно опертой трехслойной пластины с четырьмя точечными грузами

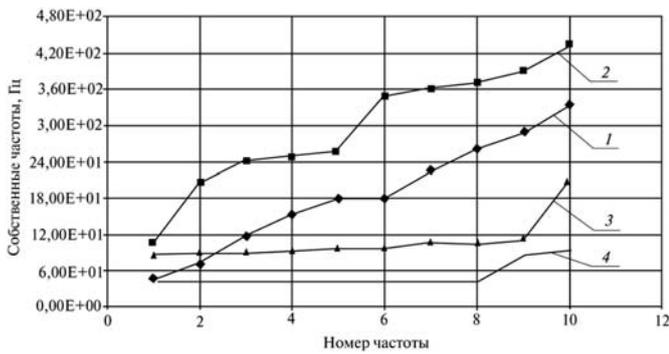


Рис. 7. Частоты собственных колебаний [Гц] шарнирно опертой трехслойной пластины с четырьмя грузами, соединенными с пластиной в четырех точках:

- 1 — пластина без грузов;
- 2 — $k_{11} = 10^7 \text{ Н/м}$, $k_{22} = 10^7 \text{ Н/м}$, $k_{33} = 10^7 \text{ Н/м}$;
- 3 — $k_{11} = 10^7 \text{ Н/м}$, $k_{22} = 10^4 \text{ Н/м}$, $k_{33} = 10^4 \text{ Н/м}$;
- 4 — $k_{11} = 10^3 \text{ Н/м}$, $k_{22} = 10^3 \text{ Н/м}$, $k_{33} = 10^3 \text{ Н/м}$

показаны соответственно на рис. 5. На рисунках 6 и 8 представлены первые формы собственных колебаний пластины при точечном присоединении грузов и при присоединении грузов по четырем дискретным точкам.

Литература

1. Строительная механика конструкций космической техники: Учебник для студентов вузов. М. Машиностроение. 1988. 392 с.
2. Клюев Ю.И., Нехаевская О.А. Исследование переходных процессов при вынужденных колебаниях панели приборно-агрегатного отсека с присоединенными массами // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Машиностроение. 2008. № 4. С. 31—41.
3. Васидзу К. Вариационные методы в теории упругости и пластичности. М.: Мир. 1987. 542 с.

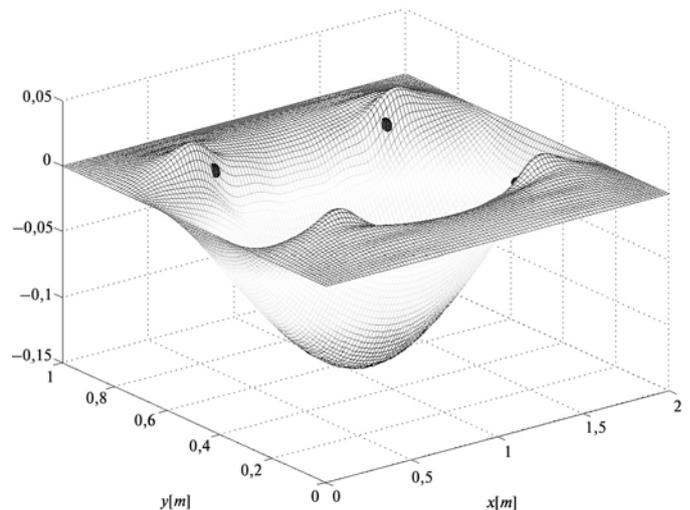


Рис. 8. Первая форма колебаний шарнирно опертой трехслойной пластины с четырьмя грузами, соединенными с пластиной в четырех точках

4. Виноградов Ю.И., Клюев Ю.И., Образцов И.Ф. Метод решения краевых задач механики деформирования тонкостенных конструкций // Известия РАН. Механика твердого тела. 2001. № 1. С. 159—166.

Статья поступила в редакцию 29.09.2011