

Машиностроение и машиноведение

УДК 621.822.831, 004.942

doi: 10.18698/0536-1044-2018-11-4-13

Анализ контактного взаимодействия цилиндрического ролика с кольцами подшипника на основании конечно-элементного моделирования

Ф.Д. Сорокин, Хао Чжан

МГТУ им. Н.Э. Баумана

An Analysis of Contact Interaction of the Cylinder Roller with the Bearing Races Using the Finite Element Method

F.D. Sorokin, Hao Zhang

Bauman Moscow State Technical University

Для уточнения зависимостей, применяемых при описании контактного взаимодействия в цилиндрическом подшипнике, проведена большая серия численных экспериментов для ролика конечной длины, сжатого упругими плитами, имитирующими кольца подшипника. На основании анализа результатов численных экспериментов методом наименьших квадратов получена уточненная зависимость поджатия от нагрузки с учетом влияния диаметра, длины ролика и толщины плит. Верификация разработанной зависимости по известным результатам натуральных экспериментов продемонстрировала ее хорошую точность. Выполнено сопоставление предложенной формулы с аналогичными зависимостями, полученными другими авторами. Влияние кривизны дорожек качения учтено корректирующим множителем.

Ключевые слова: контактное взаимодействие, цилиндрический подшипник, метод конечных элементов, метод наименьших квадратов

In order to clarify the relationships used to describe contact interaction in a cylindrical bearing, a large series of numerical experiments was performed for a roller of finite length compressed by elastic plates imitating bearing rings. Based on the analysis of the results of numerical experiments, a load-displacement relationship is obtained that takes into account the influence of the diameter, length of the roller, and thickness of the plates. Verification of the developed relationship against the known experimental results demonstrated its accuracy. The proposed formula is compared with similar dependencies obtained by other authors. Using the correction factor, the developed formula is refined taking into account the influence of the curvature of the raceways.

Keywords: contact interaction, cylindrical bearing, finite element method, least square method

Подшипниковые узлы — важнейшие структурные элементы машин и приборов. Одним из самых распространенных элементов подшипниковых узлов является цилиндрический подшипник. При решении задач роторной динамики вращающихся машин большое значение имеет расчет упругих характеристик такого подшипника. Специфика моделирования упругих свойств роликовых подшипников в первую очередь связана с контактными явлениями между роликами и кольцами. Схема цилиндрического роликового подшипника показана на рис. 1, где L и D — длина и диаметр ролика; T — толщина плиты.

По расчету роликовых подшипников существует множество работ, в которых проанализированы различные аспекты контактного взаимодействия элементов подшипника [1–8]. Ранние исследования линейного контакта выполнены Т.А. Харрисом (Т.А. Harris) [1], А. Палмгреном (А. Palmgren) [2] и многими другими учеными. В этих работах обобщены результаты натурных экспериментов об обжатии цилиндра плитами и получены простые эмпирические формулы для сближения плит в зависимости от прикладываемой к ним нагрузки. Большинство из этих формул нелинейные и содержат длину цилиндра (ролика) в качестве параметра.

Другой подход к той же проблеме основан на аналитических вычислениях с использованием теории упругости и теории Герца [3–6] и приводит к замкнутым выражениям лишь в простейших случаях.

Главным недостатком теоретических разработок является то, что они построены на решении двумерных контактных задач, т. е. не учитывают длину ролика и краевые эффекты в окрестности его торцевых поверхностей (наличие длины ролика в формуле, выражающей распределенную нагрузку q через внешнюю силу Q ($q = Q/L$), не является существенным).

Некоторые из широко используемых на практике формул получены в работах М.Р. Хеприча (М.Р. Hoerich) [3] и Л. Хуперта (L. Houpert) [4]. Эти зависимости приближенно учитывают влияние диаметра цилиндра, толщину колец, кривизну дорожек качения, но являются довольно громоздкими.

Цель работы — получение простых (инженерных), но в то же время достаточно точных зависимостей, в которых на основе анализа методом наименьших квадратов более по-

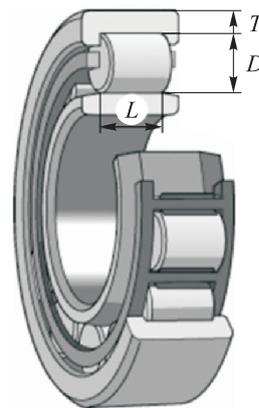


Рис. 1. Схема цилиндрического роликового подшипника

дробно, чем в предыдущих исследованиях, учтены различные аспекты контактного взаимодействия.

Вместо натурных экспериментов проведена серия численных экспериментов в программном комплексе ANSYS с использованием трехмерных конечных элементов [9–12]. Большой объем результатов численного моделирования обработан по той же методике, что и результаты натурных экспериментов, т. е. методом наименьших квадратов, и получена уточненная зависимость поджатия от нагрузки.

Сопоставление показало, что найденная зависимость значительно лучше согласована с результатами натурных экспериментов, чем аналогичные разработки других авторов.

Численные эксперименты с использованием трехмерной конечно-элементной модели. Целью численных экспериментов являлось построение уточненной инженерной зависимости поджатия от нагрузки. Для достижения поставленной цели выполнена большая серия численных экспериментов с роликом, сжатым упругими плитами, имитирующими кольца подшипника при различных значениях толщины плит T , длины L и диаметра D ролика (рис. 2).

Вследствие симметрии рассматривали 1/8 часть исходной модели. Диаметр ролика D варьировали от 10 до 50 мм, длину ролика L от 20 до 100 мм, толщину плит T от 10 до 25 мм. Ролик и плиты разбивали на гексаэдральные восьмиузловые конечные элементы SOLID185. Сетка сгущалась в окрестности места контакта. Для учета контактного взаимодействия использовали элементы TARGE170 и CONTA174.

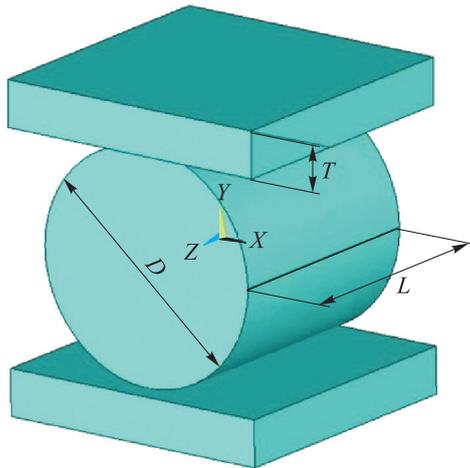


Рис. 2. Физическая модель исследуемого сопряжения

Трехмерная конечно-элементная модель и заданные граничные условия показаны на рис. 3. Нагрузку прикладывали кинематическим способом, т. е. задавали перемещения внешней поверхности плиты. Для всех численных экспериментов на поверхности 2 задавали перемещение $\delta = 0,01$ мм вдоль оси Y , а в плоскостях симметрии — условия симметрии. Упругие постоянные для плит и цилиндра принимали одинаковыми: модуль упругости $E = 2,06 \cdot 10^5$ МПа; коэффициент Пуассона $\nu = 0,3$.

Как известно, количество элементов является важным параметром и влияет на время расчета и точность результатов. Для получения уточненных результатов в приемлемое время первоначально выясняли необходимое количество элементов. С этой целью рассматривали четыре варианта разбиения на различное количество элементов при одних и тех же параметрах: $\delta = 0,01$ мм, $D = 50$ мм, $L = 100$ мм и $T = 25$ мм. В табл. 1 показана связь между количеством элементов N и вычисленной с помощью метода конечных элементов нагрузкой Q .

Из табл. 1 следует, что значение нагрузки для вариантов 2, 3 и 4 различается только в четвертом знаке (для варианта 1 решение получить не удалось), при этом время расчета для варианта 4 гораздо больше, чем для вариантов 2 и 3. Поэтому для всех последующих расчетов было выбрано количество элементов такое же, как в варианте 3.

Результаты моделирования при $D = 30$ мм, $L = 40$ мм и $T = 10$ мм представлены в графиче-

ском виде на рис. 4, а–в. На рис. 4, а показаны перемещения по оси Y (с увеличением $\times 125$), где штриховая линия указывает форму до деформации. На рис. 4, б приведены нормальные напряжения σ_Y (в сечениях, перпендикулярных оси Y). На рис. 4, а и 4, б заметны краевые эффекты, возникающие у торцов ролика, которые влияют на значение поджатия. Кроме того, максимальные напряжения наблюдаются у торцов ролика.

На рис. 4, в приведено распределение контактного давления в модели и площадка контакта на поверхности плиты, т. е. на поверхности XOZ (с увеличением $\times 125$). Два вспомогательных вида на том же рисунке показывают распределение контактного давления в области середины цилиндра, где нет краевого эффекта, и в области торца цилиндра, где краевой эффект присутствует.

Оценка точности решения контактной задачи выполнена по значениям проникновения контактных точек, которые показаны на рис. 5. Из рисунка видно, что максимальное значение проникновения составляет $0,00274$ мкм, что гораздо меньше, чем допускаемая погрешность, равная $0,1$ мкм. Это означает, что контактная задача решена с высокой точностью.

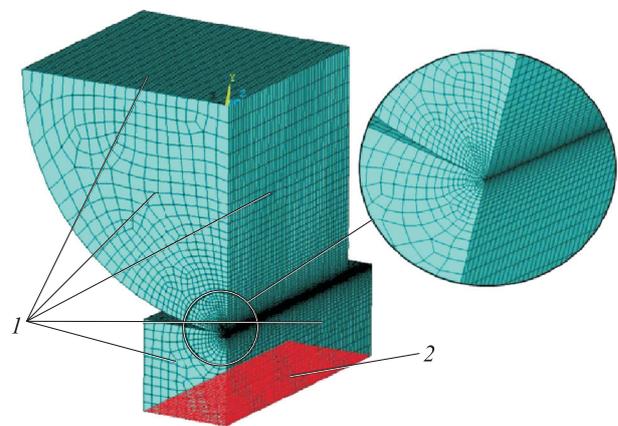


Рис. 3. Конечно-элементная модель и заданные граничные условия: 1 — условия симметрии; 2 — поверхность кинематического нагружения

Таблица 1

Влияние количества элементов на нагрузку

Параметр	Номер варианта			
	1	2	3	4
N	6256	14 985	43 291	86 250
$Q, Н$	–	28 357	28 336	28 346

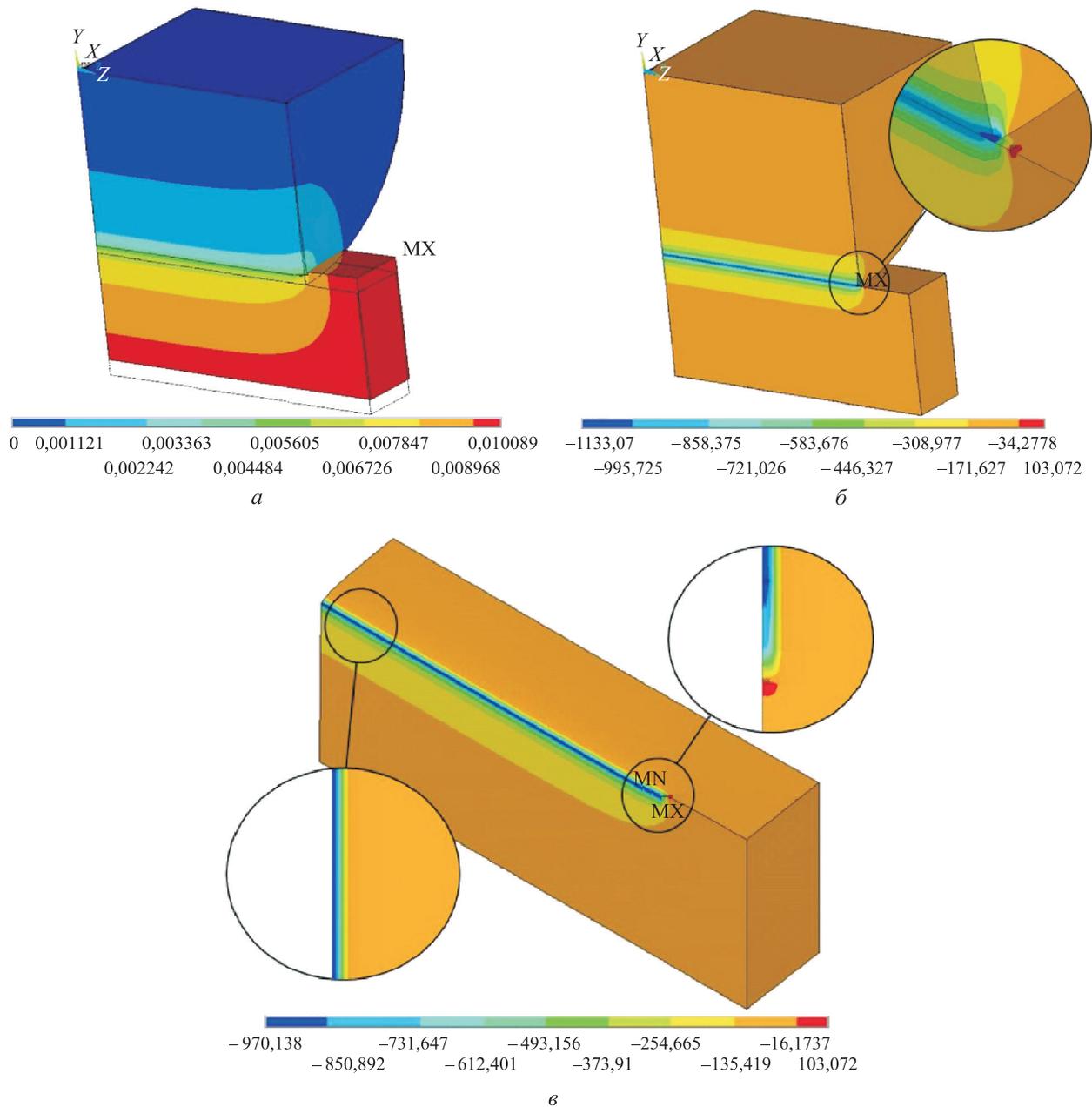


Рис. 4. Результаты моделирования при $D = 30$ мм, $L = 40$ мм и $T = 10$ мм:
 а — перемещения по оси Y, мм; б — нормальные напряжения σ_y , МПа; в — распределение контактного давления, МПа, в модели и площадка контакта на поверхности плиты

Также проведена большая серия численных экспериментов при заданном перемещении внешней поверхности плиты $\delta = 0,01$ мм, результаты которых приведены в табл. 2.

Обработка численных результатов методом наименьших квадратов. При построении различных моделей подшипников самой важной является зависимость поджатия от нагрузки. Обобщить теорию Герца на случай контакта конечной длины пока не удалось, что привело к

возникновению множества эмпирических зависимостей. Среди них сравнительно простыми и в то же время часто используемыми являются зависимости, полученные Т.А. Харрисом [1] и А. Палмгреном [2]. На основании этих зависимостей другие исследователи принимают, что поджатие связано с нагрузкой соотношением $\delta \sim Q^{0,9}$.

Из выполненного численного анализа (см. табл. 2) следует, что поджатие зависит не только от нагрузки, но и от других факторов:

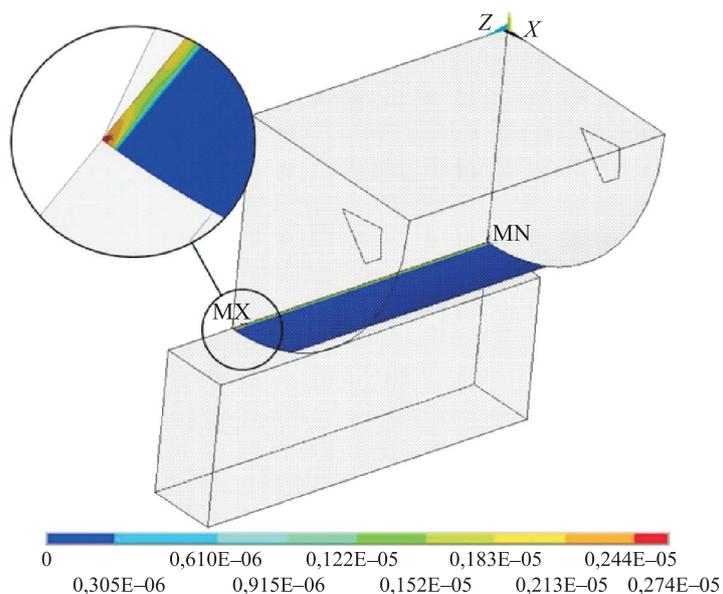


Рис. 5. Распределение проникновений, мм, в модели

Таблица 2

Расчетные значения нагрузки Q при поджатии $\delta = 0,01$ мм и различных параметрах модели

Диаметр цилиндра D , мм	Нагрузка Q , Н, при длине цилиндра L , мм				
	20	40	60	80	100
$T = 10$ мм					
10	7450	14 542	21 809	29 040	36 355
20	7424	14 537	21 768	28 951	36 276
30	7366	14 452	21 752	28 944	36 224
40	7308	14 417	21 698	28 937	36 172
50	7270	14 376	21 601	28 932	36 156
$T = 15$ мм					
10	6879	13 466	20 039	26 613	33 152
20	6841	13 382	20 023	26 586	33 077
30	6786	13 312	19 960	26 534	33 069
40	6779	13 280	19 916	26 460	33 040
50	6770	13 246	19 863	26 418	33 017
$T = 20$ мм					
10	6475	12 512	18 513	24 592	30 653
20	6416	12 440	18 490	24 547	30 614
30	6394	12 387	18 471	24 515	30 582
40	6387	12 351	18 434	24 470	30 563
50	6370	12 344	18 398	24 447	30 533
$T = 25$ мм					
10	6124	11 729	17 295	22 868	28 500
20	6072	11 650	17 272	22 847	28 463
30	6056	11 604	17 221	22 809	28 440
40	6032	11 562	17 180	22 779	28 378
50	6020	11 549	17 150	22 746	28 336

толщины плит T , длины L и диаметра D ролика, влияние которых довольно существенно. Таким образом, уточненная зависимость поджатия от нагрузки должна иметь следующий вид:

$$Q = K\delta^{10/9}L^aD^bT^c, \quad (1)$$

где K , a , b и c — неизвестные константы.

Для определения указанных констант по данным, представленным в табл. 2, формула (1) была преобразована в линейное соотношение

$$\ln Q = \ln(K\delta^{10/9}) + a \ln L + b \ln D + c \ln T. \quad (2)$$

С учетом линейности формулы (1) константы K , a , b и c были найдены методом наименьших квадратов [13, 14], суть которого состоит в минимизации суммы квадратов отклонений фактических значений от расчетных (теоретических). С использованием данных, приведенных в табл. 2, определение коэффициентов в формуле (2) выполнено встроенными процедурами математического пакета MATLAB [15].

После подстановки найденных коэффициентов в формулу (1) и преобразований выражение для вычисления поджатия приобретает вид

$$\delta = 2,7124 \cdot 10^{-5} \frac{Q^{0,9} D^{0,0054} T^{0,2182}}{L^{0,8797}}. \quad (3)$$

При этом все размеры должны задаваться в мм, а нагрузка в Н.

Верификация полученной зависимости и ее сопоставление с другими формулами. В работе [3] кроме теоретического анализа контактного взаимодействия представлены результаты натуральных экспериментов. Экспериментально исследовали контактное взаимодействие между стальным роликом и двумя пластинами. Диаметр ролика варьировали от 3,2 до 25,4 мм, а его длину от 21,8 до 50,3 мм. Размеры пластин составляли 51×76×19 мм.

Для верификации предложенной зависимости (3) выполнено ее сопоставление с результатами натуральных экспериментов, приведенных в работе [3]. Так как в экспериментах измерялось полное поджатие (сближение плит), результаты, полученные по формуле (3), были удвоены:

$$\delta = \delta_e + \delta_i = 2 \cdot 2,7124 \cdot 10^{-5} \frac{Q^{0,9} D^{0,0054} T^{0,2182}}{L^{0,8797}}, \quad (4)$$

где δ_e , δ_i — составляющие полного поджатия; здесь и далее индекс «e» помечает наружное кольцо, индекс «i» — внутреннее.

Результаты сопоставления разработанного соотношения (4) с результатами натуральных экспериментов приведены на рис. 6 в виде расчетных и экспериментальных зависимостей поджатия δ от нагрузки Q .

Как видно из рис. 6, формула (4) очень хорошо описывает результаты экспериментов. Кроме того, в работе [3] М.Р. Хеприч сделал вывод о том, что при его допущениях диаметр ролика не влияет на поджатие δ , а длина ролика связана с поджатием соотношением $\delta \sim 1/L^{0,88}$.

Анализ формулы (4) позволяет сделать аналогичные заключения. Показатель степени у диаметра ролика D равен 0,0054, следовательно, даже с учетом краевого эффекта этот параметр очень слабо влияет на поджатие. А зависимость между поджатием и длиной в формуле (4) имеет очень близкий к указанному в работе [3] вид $\delta \sim 1/L^{0,8797}$.

Как уже отмечалось, для решения контактной задачи в случае ролика конечной длины используется множество эмпирических и приближенных аналитических зависимостей. Самые известные из них:

- формула Палмгрена [2]

$$\delta = \delta_e + \delta_i = 2 \cdot 3,84 \cdot 10^{-5} \frac{Q^{0,9}}{L^{0,8}} \quad (5)$$

(δ и L выражены в мм, Q в Н);

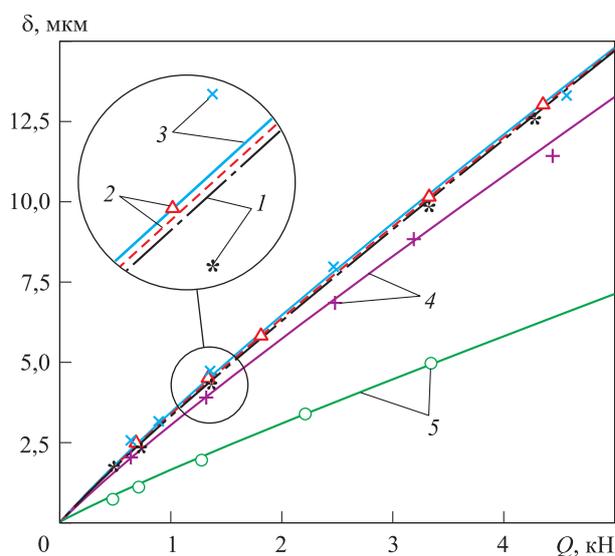


Рис. 6. Расчетные (кривые) и экспериментальные (точки) зависимости поджатия δ от нагрузки Q :

- 1 — $D = 3,15$ мм, $L = 21,8$ мм;
- 2 — $D = 6,32$ мм, $L = 21,8$ мм;
- 3 — $D = 12,7$ мм, $L = 21,8$ мм;
- 4 — $D = 25,4$ мм, $L = 24,9$ мм;
- 5 — $D = 25,4$ мм, $L = 50,3$ мм

- формула Хеприча [3]

$$\delta = \delta_e + \delta_i = \Lambda \ln \frac{4Te^{-1/[2(1-v^2)]}}{\Lambda}, \Lambda = \frac{4(1-v^2)Q}{\pi EL}; \quad (6)$$

- формулы Хуперта [4]

$$\begin{aligned} \delta_e &= \frac{2Q(1-v^2)}{\pi EL} \left[\ln \frac{4}{(1+\gamma_e)\sqrt{8A_e/\pi}} - \frac{1}{2} + \right. \\ &\quad \left. + \ln \frac{4T}{\gamma_e D_e \sqrt{8A_e/\pi}} - \frac{0,3}{1,4} \right]; \\ \delta_i &= \frac{2Q(1-v^2)}{\pi EL} \left[\ln \frac{4}{(1-\gamma_i)\sqrt{8A_i/\pi}} - \frac{1}{2} + \right. \\ &\quad \left. + \ln \frac{4}{\gamma_i \sqrt{8A_i/\pi}} - \frac{1}{2} \right]; \end{aligned} \quad (7)$$

$$\delta = \delta_e + \delta_i,$$

$$A_e = \frac{2Q(1-v^2)}{\gamma_e ED_e L}; A_i = \frac{2Q(1-v^2)}{\gamma_i ED_i L};$$

$$\gamma_e = \frac{D}{D_e - D}; \gamma_i = \frac{D}{D_i + D}.$$

Здесь γ_e , γ_i и D_e , D_i — коэффициенты кривизны и диаметры дорожек качения соответственно; A_e , A_i — безразмерные коэффициенты.

Сопоставление значений поджатий $\delta_{(4)}-\delta_{(7)}$, рассчитанных по формулам (4)–(7), с экспериментальными данными $\delta_{\text{экс}}$ выполнено при различных параметрах модели (табл. 3).

Как видно из табл. 3, формулы (4) и (5) при равных условиях дают результаты, хорошо совпадающие с экспериментальными данными.

Таблица 3

Сопоставление значений поджатий, рассчитанных по формулам (4)–(7), с экспериментальными данными

Нагрузка Q, Н	Поджатия, мкм				
	$\delta_{\text{экс}}$	$\delta_{(4)}$	$\delta_{(5)}$	$\delta_{(6)}$	$\delta_{(7)}$
$D = 6,32 \text{ мм}, L = 21,8 \text{ мм}, T = 19 \text{ мм}$					
697	2,50	2,51	2,36	2,20	2,17
1801	5,86	5,89	5,55	5,25	5,24
4360	13,03	13,06	12,31	11,71	11,91
$D = 25,4 \text{ мм}, L = 50,3 \text{ мм}, T = 19 \text{ мм}$					
448	0,80	0,81	0,81	0,68	0,66
1258	1,96	2,05	2,06	1,76	1,73
3349	5,00	4,97	4,97	4,31	4,29

Однако формула (3) получена с учетом большего количества параметров и поэтому имеет более широкую область применения.

Учет кривизны дорожек качения. Некоторым недостатком формулы (3) является то, что она не учитывает влияние кривизны дорожек качения. Во всех описанных численных экспериментах ролик контактировал с плоскими границами плит. Непосредственный учет кривизны дорожек качения путем проведения дополнительных численных экспериментов привел бы к неоправданно большим вычислительным затратам. Однако почти все авторы работ [1–5] отмечают, что указанное влияние невелико.

В связи с этим предлагается учитывать влияние кривизны дорожек качения аналогично приближенной зависимости из работы [5]:

$$\delta = \frac{2Q(1-v^2)}{\pi EL} \ln \frac{\pi EL^2}{Q(1-v^2)(1 \mp \gamma)}, \quad (8)$$

где γ — коэффициент кривизны дорожек качения, $\gamma = D/(D_e - D)$ или $\gamma = D/(D_i + D)$, при этом для контакта ролика с наружным кольцом использован знак «+», а с внутренним — знак «-».

Введем выражение, связывающее значения поджатия с учетом и без учета кривизны дорожек качения на основе соотношения (8):

$$\begin{aligned} \lambda = \frac{\delta}{\delta|_{\gamma=0}} &= 1 + \frac{\ln(1 \mp \gamma)}{\ln \tilde{Q}}; \\ \tilde{Q} &= \frac{Q(1-v^2)}{\pi EL^2}, \end{aligned} \quad (9)$$

где λ — корректирующий множитель; \tilde{Q} — безразмерная нагрузка.

Разумно предположить, что множитель λ может быть распространен и на другие приближенные формулы. То есть, чтобы учесть кривизну дорожки качения, достаточно вычислить δ для плоских контактных поверхностей и затем умножить полученный результат на коэффициент λ из формулы (9).

Таким образом, окончательный вариант уточненного соотношения для поджатия с учетом кривизны дорожки качения имеет вид

$$\delta = 2,7124 \cdot 10^{-5} \lambda \frac{Q^{0,9} D^{0,0054} T^{0,2182}}{L^{0,8797}}, \quad (10)$$

где все размеры заданы в мм, а сила в Н.

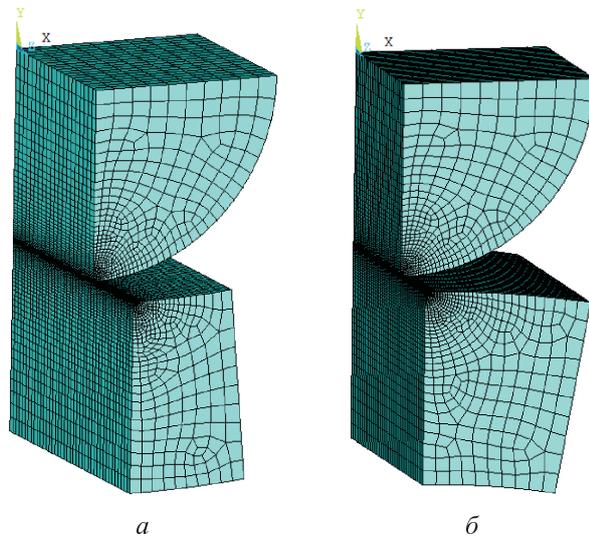


Рис. 7. Конечно-элементная модель, учитывающая реальную геометрию дорожек качения:
 а — $\gamma_e = 0,19$; б — $\gamma_i = 0,167$

Для контроля соотношения (10) выполнен дополнительный численный эксперимент с реальной геометрией дорожек качения. В этом исследовании цилиндр ($D = 20$ мм, $L = 20$ мм) обжимается на наружное кольцо ($T = 10$ мм, $D_e = 250$ мм и $D_e = 125$ мм, что соответствует $\gamma_e = 0,087$ и $\gamma_e = 0,19$) и внутреннее кольцо ($T = 10$ мм, $D_i = 200$ мм и $D_i = 100$ мм, что соответствует $\gamma_i = 0,091$ и $\gamma_i = 0,167$). Модифицированная конечно-элементная модель с сеткой показана на рис. 7. Граничные условия и условия нагружения заданы такими же, как и в ранее представленных расчетах.

Результаты расчета перемещений в проекции на ось Y для модели с параметрами $D = 20$ мм, $L = 20$ мм, $T = 10$ мм приведены на рис. 8.

Сопоставление значений поджатий $\delta_{(3)}$ и $\delta_{(10)}$, рассчитанных по формулам (3) и (10), с результатами моделирования в среде ANSYS δ_{ANSYS} , приведено в табл. 4.

Как видно из табл. 4, формула (3) дает в худшем случае погрешность около 2 %, что еще раз подтверждает незначительное влияние кривизны дорожек качения на поджатие. При учете этой кривизны с помощью множителя λ (формула (10) и последний столбец в табл. 4) результат отличается от ANSYS не более чем на 0,5 %. Численные эксперименты показали, что формула (10) тем точнее, чем меньше значение γ . Для реального подшипника кривизна дорожки качения обычно не превышает 0,19, и при таких γ формула (10) дает практически точный результат.

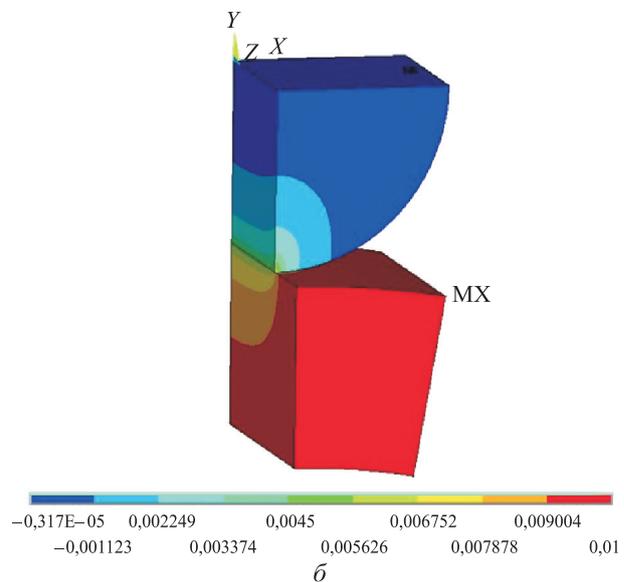
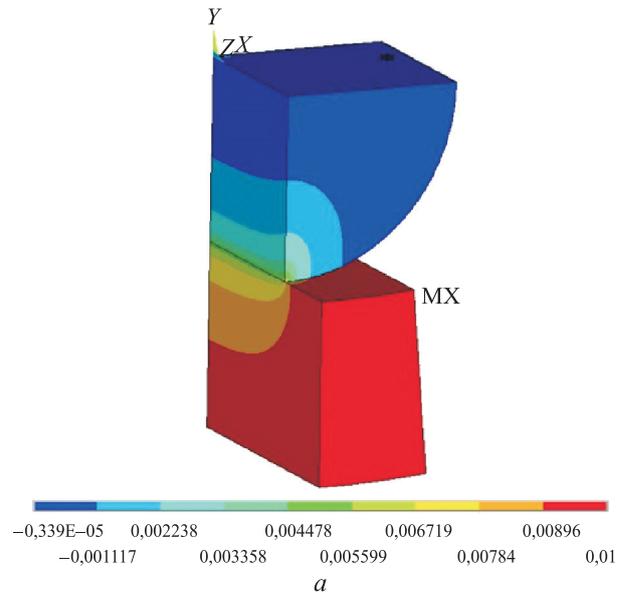


Рис. 8. Вертикальные перемещения, мм, в модели, учитывающей реальную геометрию дорожек качения:
 а — $\gamma_e = 0,19$; б — $\gamma_i = 0,167$

Таблица 4

Сопоставление значений поджатий, рассчитанных по формулам (3) и (10), с результатами моделирования в среде ANSYS

Коэффициент кривизны дорожек качения	Нагрузка Q, Н	Поджатия, мкм			
		δ_{ANSYS}	$\delta_{(3)}$	$\delta_{(10)}$	
γ_e	0,087	7564	0,01	0,01011	0,01003
	0,190	7596	0,01	0,01015	0,00999
γ_i	0,091	7392	0,01	0,00991	0,01000
	0,167	7284	0,01	0,00978	0,00995

Выводы

1. Выполнен большой объем численных экспериментов по решению трехмерной контактной задачи о взаимодействии ролика конечной длины и двух плит при различном сочетании параметров. По результатам численного моделирования методом наименьших квадратов найдена уточненная зависимость поджатия от нагрузки.

2. Верификация разработанной зависимости по данным натуральных экспериментов подтвер-

дила ее хорошую точность. Выполненное сопоставление с аналогичными формулами других авторов показало, что наиболее близкие результаты дает формула Палмгрена, но разработанное в статье соотношение имеет более широкую область применения.

Для учета влияния кривизны дорожек качения предложена методика с корректирующим множителем λ , которая приводит практически к тем же результатам, что и расчет в среде ANSYS.

Литература

- [1] Harris T.A. *Rolling bearing analysis*. USA, CRC Press, 2006. 760 p.
- [2] Palmgren A. *Ball and roller bearing engineering*. Philadelphia, S.H. Burbank and company Inc., 1959. 50 p.
- [3] Hoesprich M.R., Zantopoulos H. Line contact deformation — a cylinder between two flat plates. *Journal of tribology*, 1981, vol. 103, is. 1, pp. 21–25, doi: 10.1115/1.3251609
- [4] Houpert L. An engineering approach to hertzian contact elasticity — part I. *Journal of tribology*, 2001, vol. 123, is. 3, pp. 582–588, doi: 10.1115/1.1308043
- [5] Lundberg G., Sjövall H. *Stress and deformation in elastic contacts*, Pub. 4. Gothenburg, Institute of Theory of Elasticity and Strength of Materials, Chalmers Inst. Tech., 1958. 47 p.
- [6] Houpert L. An enhanced study of the load-displacement relationships for rolling element bearings. *Journal of Tribology*, 2014, vol. 136, is. 1, no. 011105, doi: 10.1115/1.4025602
- [7] Дегтярев С.А., Кутаков М.Н., Попов В.В. Учет контактных взаимодействий при моделировании жесткостных свойств роликового подшипников. *Вестник Московского авиационного института*, 2015, т. 22, № 2, с. 137–141.
- [8] Antoine J.-F., Visa C., Sauvey C., Abba G. Approximate analytical model for Hertzian elliptical contact problems. *Journal of Tribology*, 2006, vol. 128, is. 3, pp. 660–664, doi: 10.1115/1.2197850
- [9] Лукьянова А.Н. *Моделирование контактной задачи с помощью программы ANSYS*. Самара, СамГТУ, 2010. 52 с.
- [10] Лукьянова А.Н. *Моделирование контактного взаимодействия деталей*. Самара, СамГТУ, 2012. 87 с.
- [11] Басов К.А. *ANSYS в примерах и задачах*. Москва, Компьютер Пресс, 2002. 224 с.
- [12] Чигарев А.В., Кравчук А.С., Смалюк А.Ф. *ANSYS для инженеров*. Москва, Машиностроение-1, 2004. 512 с.
- [13] Горяинов В.Б., Павлов И.В., Цветкова Г.М. *Математическая статистика*. Москва, Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2002. 424 с.
- [14] Freedman D.A. *Statistical models: theory and practice*. Cambridge, Cambridge University Press, 2005. 414 p.
- [15] Ревинская О.Г. *Основы программирования в MatLab*. Санкт-Петербург, БХВ-Петербург, 2016. 208 с.

References

- [1] Harris T.A. *Rolling bearing analysis*. USA, CRC Press, 2006. 760 p.
- [2] Palmgren A. *Ball and roller bearing engineering*. Philadelphia, S.H. Burbank and company Inc., 1959. 50 p.
- [3] Hoesprich M.R., Zantopoulos H. Line contact deformation — a cylinder between two flat plates. *Journal of Tribology*, 1981, vol. 103, is. 1, pp. 21–25, doi: 10.1115/1.3251609
- [4] Houpert L. An engineering approach to Hertzian contact elasticity — part I. *Journal of Tribology*, 2001, vol. 123, is. 3, pp. 582–588, doi: 10.1115/1.1308043

- [5] Lundberg G., Sjövall H. *Stress and deformation in elastic contacts*, Pub. 4. Gothenburg, Institute of Theory of Elasticity and Strength of Materials, Chalmers Inst. Tech., 1958. 47 p.
- [6] Houpert L. An enhanced study of the load-displacement relationships for rolling element bearings. *Journal of Tribology*, 2014, vol. 136, is. 1, no. 011105, doi: 10.1115/1.4025602
- [7] Degtyarev S.A., Kutakov M.N., Popov V.V. Consideration of contact interactions when modelling stiffness characteristics of roll bearings. *Vestnik Moskovskogo aviatsionnogo instituta*, 2015, vol. 22, no. 2, pp. 137–141 (in Russ.).
- [8] Antoine J.-F., Visa C., Sauvey C., Abba G. Approximate analytical model for Hertzian elliptical contact problems. *Journal of Tribology*, 2006, vol. 128, is. 3, pp. 660–664, doi: 10.1115/1.2197850
- [9] Luk'yanova A.N. *Modelirovaniye kontaktnoy zadachi s pomoshch'yu programmy ANSYS* [Modeling a contact problem using ANSYS]. Samara, Samara Polytech publ., 2010. 52 p.
- [10] Luk'yanova A.N. *Modelirovaniye kontaktnogo vzaimodeystviya detaley* [Modeling of contact interaction of parts]. Samara, Samara Polytech publ., 2012. 87 p.
- [11] Basov K.A. *ANSYS v primerakh i zadachakh* [ANSYS in examples and tasks]. Moscow, Komp'yuter Press publ., 2002. 224 p.
- [12] Chigarev A.V., Kravchuk A.S., Smalyuk A.F. *ANSYS dlya inzhenerov* [ANSYS for engineers]. Moscow, Mashinostroyeniye-1 publ., 2004. 512 p.
- [13] Goryainov V.B., Pavlov I.V., Tsvetkova G.M. *Matematicheskaya statistika* [Mathematical statistics]. Moscow, Bauman Press, 2002. 424 p.
- [14] Freedman D.A. *Statistical models: theory and practice*. Cambridge, Cambridge University Press, 2005. 414 p.
- [15] Revinskaya O.G. *Osnovy programmirovaniya v MatLab* [The basics of programming in MatLab]. Sankt-Petersburg, BHV-Peterburg publ., 2016. 208 p.

Статья поступила в редакцию 05.09.2018

Информация об авторах

СОРОКИН Федор Дмитриевич — профессор кафедры «Прикладная механика». МГТУ им. Н.Э. Баумана (105005, Москва, Российская Федерация, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1, e-mail: sorokin_fd@mail.ru).

ЧЖАН Хао — аспирант кафедры «Прикладная механика». МГТУ им. Н.Э. Баумана (105005, Москва, Российская Федерация, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1, e-mail: zhang274234111@yandex.ru).

Information about the authors

SOROKIN Fedor Dmitrievich — Professor, Department of Applied Mechanics. Bauman Moscow State Technical University (105005, Moscow, Russian Federation, 2nd Bauman-skaya St., Bldg. 5, Block 1, e-mail: sorokin_fd@mail.ru).

ZHANG Hao — Postgraduate, Department of Applied Mechanics. Bauman Moscow State Technical University (105005, Moscow, Russian Federation, 2nd Baumanskaya St., Bldg. 5, Block 1, e-mail: zhang274234111@yandex.ru).

Просьба ссылаться на эту статью следующим образом:

Сорокин Ф.Д., Чжан Хао. Анализ контактного взаимодействия цилиндрического ролика с кольцами подшипника на основании конечно-элементного моделирования. *Известия высших учебных заведений. Машиностроение*, 2018, № 11, с. 4–13, doi: 10.18698/0536-1044-2018-11-4-13

Please cite this article in English as:

Sorokin F.D., Zhang Hao. An Analysis of Contact Interaction of the Cylinder Roller with the Bearing Races Using the Finite Element Method. *Proceedings of Higher Educational Institutions. Machine Building*, 2018, no. 11, pp. 4–13 (in Russ.), doi: 10.18698/0536-1044-2018-11-4-13