УДК 534.014.4

DOI: 10.18698/0536-1044-2018-8-64-70

Некоторые особенности неконсервативных задач устойчивости механических систем

В.П. Радин, В.П. Чирков, А.В. Щугорев, В.Н. Щугорев

НИУ «МЭИ», 111250, Москва, Российская Федерация, Красноказарменная ул., д. 14

Some Features of Non-Conservative Stability Problems of Mechanical Systems

V.P. Radin, V.P. Chirkov, A.V. Shchugorev, V.N. Shchugorev

National Research University — Moscow Power Engineering Institute, 111250, Moscow, Russian Federation, Krasnokazarmennaya St., Bldg. 14

e-mail: radinvp@gmail.com, victor.p.chirkov@gmail.com, e-mail: alexey.salut@gmail.com, shchugorev.vn@gmail.com

На примере трехзвенного маятника, нагруженного следящей и потенциальной силами, подробно исследована устойчивость прямолинейной формы равновесия системы. С использованием критерия Рауса — Гурвица сформулированы условия статического (дивергенции) и динамического (флаттера) типов потери устойчивости. Показано, что малые и равные по значению парциальные коэффициенты демпфирования практически не влияют на положение границы флаттера. Приведены примеры чередования границ, соответствующих различным типам потери устойчивости, а также проиллюстрирован тот факт, что в некоторых случаях при монотонном возрастании следящей силы возможны как потеря устойчивости, так и стабилизация положения равновесия.

Ключевые слова: трехзвенный маятник, положение равновесия, неконсервативное нагружение, критерии потери устойчивости, границы дивергенции и флаттера

Using a three-link pendulum loaded by a tracking and potential force, the stability of the rectilinear equilibrium form of the system is thoroughly examined. Using the Routh-Hurwitz criterion, the conditions of static (divergence) and dynamic (flutter) types of loss of stability are formulated. It is shown that small and equal in value partial damping coefficients have virtually no effect on the position of the flutter boundary. Examples are given of the alternation of boundaries corresponding to different types of stability loss. Examples are also provided to illustrate the fact that in some cases with a monotonous increase in the tracking force, both the loss of stability and the stabilization of the equilibrium position are possible.

Keywords: three-link pendulum, equilibrium position, non-conservative loading, stability loss criteria, boundaries of divergence and flutter

При обсуждении результатов решения неконсервативных задач теории упругой устойчивости неоднократно отмечался ряд особенностей, а в некоторых случаях и парадоксов, встречающихся в этой части механики деформируемого твердого тела. Среди них следует отметить невыпуклость области устойчивости в пространстве параметров и отсутствие при достижении неконсервативными нагрузками критических значений смежных положений равновесия [1–6].

Наибольший интерес представляют научные изыскания, посвященные дестабилизации неконсервативных систем при добавлении малых диссипативных сил [7–10]. К особенностям решения неконсервативных задач теории упругой устойчивости можно отнести и необходимость применения динамического метода для исследования устойчивости положений равновесия при действии сил, явно не зависящих от времени [1–3].

Среди неконсервативных нагрузок большое внимание уделялось и уделяется до сих пор следящим силам [11–15]. Не подвергая сомнению математические рассуждения высокого уровня при изучении устойчивости трехзвенного маятника в статье [15] как дискретной модели заправочного шланга, вряд ли можно согласиться с заменой неконсервативной гидродинамической нагрузки следящей силой, равной реактивной силе вытекающей жидкости. Например, в книге [3] показано, что в подобных случаях при потере устойчивости трубопроводы вообще не испытывают сжимающего усилия.

Цель работы — на примере несложной механической системы, представляющей собой трехзвенный маятник с дополнительными упругими связями, проиллюстрировать не вполне ожидаемые результаты исследования устойчивости положения равновесия при неконсервативном нагружении.

Исследуем устойчивость прямолинейной формы равновесия трехзвенного маятника (рис. 1), находящегося под действием двух сил — потенциальной («мертвой») Q и следящей P. У первой направление не меняется, у второй оно совпадает с осью третьего звена маятника при деформации системы. За обобщенные координаты примем углы отклонения звеньев маятника от прямолинейного положения φ_1 , φ_2 , φ_3 . Значения $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3 = 0$ соответствуют положению равновесия, при котором упругие элементы в соединениях звеньев между собой и с основанием не нагружены.

Рассмотрим регулярную систему, для которой массы стержней, равномерно распределенные по их равным длинам ($l_1 = l_2 = l_3 \equiv l$), являются одинаковыми ($m_1 = m_2 = m_3 \equiv m$). Также равны поворотные жесткости в шарнирах



Рис. 1. Схема трехзвенного маятника при неконсервативном нагружении

 $(c_1 = c_2 = c_3 \equiv c)$ и жесткости пружин $(d_1 = d_2 = d_3 \equiv d)$. Коэффициенты вязкого трения в первом b_1 , втором b_2 и третьем b_3 шарнирах могут принимать различные значения.

Следуя динамическому методу исследования устойчивости, составим уравнения возмущенного движения в окрестности прямолинейной формы равновесия. Опуская запись известных соотношений для кинетической и потенциальной энергий системы, запишем выражение для виртуальной работы следящей силы

$$\delta' A = -Pl [\sin(\varphi_3 - \varphi_1) + \sin(\varphi_3 - \varphi_2)] \delta\varphi_1 - - Pl \sin(\varphi_3 - \varphi_2) \delta\varphi_2,$$

где б ϕ_1 и б ϕ_2 — виртуальные угловые перемещения.

Рассеяние энергии в системе учтем введением диссипативной функции Рэлея

$$R = \frac{1}{2}b_1\dot{\varphi}_1^2 + \frac{1}{2}b_2\left(\dot{\varphi}_2 - \dot{\varphi}_1\right)^2 + \frac{1}{2}b_3\left(\dot{\varphi}_3 - \dot{\varphi}_2\right)^2.$$

Введем безразмерные параметры:

$$\varepsilon_1 = \frac{b_1 \omega_0}{c}; \ \varepsilon_2 = \frac{b_2 \omega_0}{c}; \ \varepsilon_3 = \frac{b_3 \omega_0}{c}; \ \gamma = \frac{dl^2}{c};$$
$$\alpha = \frac{Ql}{c}; \ \beta = \frac{Pl}{c}; \ \tau = \omega_0 t; \ \omega_0 = \sqrt{\frac{c}{ml^2}},$$

а также вектор угловых перемещений $\boldsymbol{\phi}^{T} = = [\phi_1 \ \phi_2 \ \phi_3]$. После использования уравнений Лагранжа второго рода и линеаризации получим уравнения возмущенного движения в матричной форме

$$\mathbf{A}\ddot{\boldsymbol{\varphi}} + \mathbf{B}\dot{\boldsymbol{\varphi}} + (\mathbf{C} + \gamma \mathbf{C}_1 - \alpha \mathbf{E} + \beta \mathbf{E}_1)\boldsymbol{\varphi} = \mathbf{0}.$$
 (1)

Здесь **Е** — единичная матрица, а остальные матрицы определяются выражениями

$$\mathbf{A} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 14 & 9 & 3\\ 9 & 8 & 3\\ 3 & 3 & 2 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 + \varepsilon_2 & -\varepsilon_2 & 0\\ -\varepsilon_2 & \varepsilon_2 + \varepsilon_3 & -\varepsilon_3\\ 0 & -\varepsilon_3 & \varepsilon_3 \end{bmatrix};$$
$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0\\ -1 & 2 & -1\\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{C}_1 = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1\\ 2 & 2 & 1\\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix};$$
$$\mathbf{E}_1 = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 2\\ 0 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Представляя вектор угловых перемещений $\varphi(\tau)$ в виде $\varphi(\tau) = \varphi_0 \exp(\lambda \tau)$ и подставляя в формулу (1), получим матричное уравнение относительно характеристических показателей λ :

$$\mathbf{A}\lambda^2 + \mathbf{B}\lambda + \mathbf{C} + \mathbf{C}_1 - \alpha \mathbf{E} + \beta \mathbf{E}_1 = \mathbf{0}.$$
 (2)

Согласно теории Ляпунова, показатели λ полностью определяют характер возмущенного движения в окрестности положения равновесия. Для исследования устойчивости линейных систем с конечным числом степеней свободы имеется ряд критериев, позволяющих судить о расположении характеристических показателей на комплексной плоскости и строить границы областей устойчивости в пространстве параметров без вычисления самих показателей. В частности, если для рассматриваемой системы применяется критерий Рауса — Гурвица, то соответствующая матрица Гурвица составляется из коэффициентов характеристического полинома матрицы

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{E} \\ -\mathbf{A}^{-1} \left(\mathbf{C} + \mathbf{C}_1 - \alpha \mathbf{E} + \beta \mathbf{E}_1 \right) & -\mathbf{A}^{-1} \mathbf{B} \end{bmatrix},$$

где **0** — нулевая матрица размерностью 3×3.

Матрица G получена в результате преобразования уравнения (1) к нормальной форме Коши. Характеристический полином для матрицы G и уравнение для определения характеристических показателей вместо матричного полинома (2) в данном случае имеет вид

$$g_0\lambda^6 + g_1\lambda^5 + g_2\lambda^4 + g_3\lambda^3 +$$
$$+ g_4\lambda^2 + g_5\lambda + g_6 = 0, \qquad (3)$$

где $g_0, g_1, g_2, g_3, g_4, g_5, g_6$ — коэффициенты, составленные из элементов матриц в уравнении (2).

Критерий Рауса — Гурвица — это некоторое количество условий, определяющих нахождение характеристических показателей в левой полуплоскости комплексной плоскости λ . Применение этого критерия для задач устойчивости положений равновесия механических систем при нагружении силами (в том числе неконсервативными), явно не зависящих от времени, имеет несколько сокращенную редакцию.

Это связано с тем, что исходное состояние ненагруженной системы заведомо устойчиво,

т. е. характеристические показатели суть частоты свободных колебаний около исследуемого на устойчивость положения равновесия. Они либо заведомо расположены в левой полуплоскости при наличии диссипации энергии, либо находятся на мнимой оси. Для перехода в неустойчивое состояние согласно теории Ляпунова достаточно одному из характеристических показателей перейти в правую полуплоскость.

При этом возможны два варианта: переход характеристического показателя происходит через начало координат, что, с одной стороны, соответствует переходу механической системы в какие-либо смежные состояния равновесия, а с другой — исходное состояние равновесия теряет устойчивость по типу дивергенции.

При втором варианте переход характеристического показателя в правую полуплоскость осуществляется через мнимую ось с отличной от нуля мнимой частью. Это характерно для неконсервативных систем при отсутствии смежных положений равновесия. В этом случае потеря устойчивости происходит по типу флаттера.

При первом варианте потери устойчивости обращается в нуль свободный член характеристического полинома (3), а на плоскости внешних нагрузок условие $g_6 = 0$ задает границу дивергенции. Во втором случае граница флаттера (колебательного типа потери устойчивости) будет определять равенство нулю главного минора матрицы Гурвица Δ_5 ($\Delta_5 = 0$).

Таким образом, границы области устойчивости на плоскости параметров нагружения α , β соответствуют условиям $g_6 = 0$, $\Delta_5 = 0$. Здесь эти условия записаны для системы с тремя степенями свободы, но распространяются и на системы с любым числом *n* степеней свободы и на системы с распределенными параметрами при сведении их к системам с сосредоточенными параметрами. В этом случае границы дивергенции и флаттера определяются как $g_{2n} = 0$ и $\Delta_{2n-1} = 0$.

На рис. 2, *а-г* приведены некоторые результаты вычислений границ области устойчивости для различных параметров системы. На рис. 2, *а-в* принято, что $\gamma = 0$, т. е. пружины, соединяющие шарниры с основанием, отсутствуют.

На рис. 2, *а* проиллюстрированы результаты вычислений при условии, что $\forall \varepsilon_k = 0$. Значе-



Рис. 2. Границы области устойчивости при различных значениях коэффициентов демпфирования и безразмерного параметра ү: $a - \varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = 0$ (ү = 0);

 $\begin{aligned} & \delta - \varepsilon_1 - \varepsilon_2 - \varepsilon_3 = 0 \quad (\gamma = 0); \\ & \delta - \varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = 0,001...0,250 \quad (\gamma = 0); \\ & \delta - \varepsilon_1 = 0,25, \varepsilon_2 = 0,1, \varepsilon_3 = 0,01 \quad \mu \quad \varepsilon_1 = 0,01, \varepsilon_2 = 0,1, \varepsilon_3 = 0,25 \quad (\gamma = 0); \\ & \epsilon - \varepsilon_1 = \varepsilon_3 = 0,0001 \quad \mu \quad \varepsilon_2 = 0,01 \quad (\gamma = 0,5) \end{aligned}$

ния β для границы флаттера *AB*, на которой $\Delta_5 = 0$, следует называть квазикритическими. Границу дивергенции, где $g_6 = 0$, определяет кривая *BC*.

На рис. 2, *б* показаны границы области устойчивости при отличной от нуля диссипации энергии в системе, но равномерно распределенной по степеням свободы. Здесь даже весьма малые ε_k существенно снижают критические значения следящей силы, подтверждая тем самым парадокс Циглера. Своеобразным парадоксом также можно считать и тот факт, что варьирование коэффициентов демпфирования ε_k в весьма широких пределах при сохранении их равенства между собой ($\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = 0,001...0,250$) практически не влияет на положение границы флаттера. Зато разные парциальные коэффициенты демпфирования кардинально меняют часть границы, пересечение которой ведет к динамической потере устойчивости.

На рис. 2, в построены границы для двух случаев распределения диссипации энергии: $\varepsilon_1 = 0,25$, $\varepsilon_2 = 0,1$, $\varepsilon_3 = 0,01$ (область *ABC* и горизонтальная штриховка области устойчивости) и $\varepsilon_1 = 0,01$, $\varepsilon_2 = 0,1$, $\varepsilon_3 = 0,25$ (кривая *A'B'C* и вертикальная штриховка). Во втором случае критические значения следящей силы в несколько раз меньше, чем в первом. Характерной особенностью рассмотренных вариантов является то, что области устойчивости на плоскости параметров нагружения имеют интуитивно понятный «классический» вид, т. е. граница флаттера примыкает к оси ординат, по которой отложены значения следящей силы.

На рис. 2, г показаны границы области устойчивости несколько усложненной системы, где $\gamma = 0,5$, $\varepsilon_1 = \varepsilon_3 = 0,0001$ и $\varepsilon_2 = 0,01$. Здесь *АВ* и *DE* — границы дивергенции, *BCD* — граница флаттера. При малых значениях α и увеличении параметра следящей силы β (прямая *d*) система сначала теряет устойчивость по типу флаттера (точка *a*). При дальнейшем возрастании параметра β в точке *b* происходит стабилизация. Система остается устойчивой вплоть до точки *c*, где устойчивость теряется по типу дивергенции.

Выводы

1. Показано, что малые и равные по значению парциальные коэффициенты демпфирования практически не влияют на положение границы флаттера, существенно снижая критические значения следящей силы, подтверждая тем самым парадокс Циглера. Разные парциальные коэффициенты демпфирования кардинально меняют часть границы, пересечение которой ведет к динамической потере устойчивости.

2. Обнаружено, что в некоторых случаях при монотонном возрастании следящей силы возможны как потеря устойчивости, так и стабилизация положения равновесия.

Литература

- [1] Николаи Е.Л. Труды по механике. Москва, Гостехиздат, 1955. с. 357-406.
- [2] Болотин В.В. Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости. Москва, Физматгиз, 1961. 339 с.
- [3] Феодосьев В.И. Избранные задачи и вопросы по сопротивлению материалов. Москва, Наука, 1973. 400 с.
- [4] Modern problem of structural stability. Ed. Seyranian A.P., Elishakoff I. New York, Wien, Springer-Verlag, 2002. 394 p.
- [5] Elishakoff I. Resolution of the 20th century conundrum in elastic stability. Florida Atlantic University, 2014. 334 p.
- [6] Каган-Розенцвейг Л.М. Вопросы неконсервативной теории устойчивости. Санкт-Петербург, СПбГАСУ, 2014. 174 с.
- [7] Циглер Г. Основы теории устойчивости конструкций. Москва, Мир, 1971. 192 с.
- [8] Luongo A., D'Annibale F. On the destabilizing effect of damping on discrete and continuous circulatory systems. *Journal of Sound and Vibration*, 2014, vol. 333(24), pp. 6723-6741.
- [9] Tommasini M., Kirillov O.N., Misseroni D., Bigoni D. The destabilizing effect of external damping: singular flutter boundary for the Pflüger column with vanishing external dissipation. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 2016, vol. 91, pp. 204–215.
- [10] Luongo A., Dannibale F. On the destabilizing effect of damping on discrete and continuous circulatory systems. *Journal of Sound and Vibration*, 2014, vol. 333(24), pp. 6723– 6741.
- [11] Elishakoff I. Controversy associated with the so-called «follower forces»: critical overview. *Applied Mechanics Reviews*, 2005, vol. 58, pp. 117–142.
- [12] Лагозинский С.А., Соколов А.И. Устойчивость прямолинейных стержней, нагруженных следящими силами. Проблемы прикладной механики, динамики и прочности машин. Сб. статей. Москва, Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2005, с. 244–259.
- [13] Shvartsman B.S. Large deflections of a cantilever beam subjected to a follower force. *Journal of Sound and Vibration*, 2007, vol. 304 (3–5), pp. 969–973.
- [14] Иванова А.И. Об устойчивости положения равновесия трехзвенного маятника под действием следящей силы. Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки, 2004, № 3, с. 19–25.
- [15] Байков А.Е., Майоров А.Ю. Об устойчивости положения равновесия дискретной модели заправочного шланга под действием реактивной силы. *Нелинейная динамика*, 2015, т. 11, № 1, с. 127–146.

References

- [1] Nikolai E.L. *Trudy po mehanike* [Works on the mechanics]. Moscow, Gostehizdat publ., 1955, pp. 357–406.
- [2] Bolotin V.V. Nekonservativnye zadachi teorii uprugoi ustoichivosti [Nonconservative problems of elastic stability theory]. Moscow, Fizmatgiz publ., 1961. 339 p.
- [3] Feodos'ev V.I. *Izbrannye zadachi i voprosy po soprotivleniiu materialov* [Selected problems and questions in strength of materials]. Moscow, Nauka publ., 1973. 400 p.
- [4] Modern problem of structural stability. Ed. Seyranian A.P., Elishakoff I. New York, Wien, Springer-Verlag, 2002. 394 p.
- [5] Elishakoff I. Resolution of the 20th century conundrum in elastic stability. Florida Atlantic University, 2014. 334 p.
- [6] Kagan-Rozentsveig L.M. Voprosy nekonservativnoi teorii ustoichivosti [Questions of the neoconservative stability theory]. Sankt-Petersburg, SPbGASU publ., 2014. 174 p.
- [7] Tsigler G. Osnovy teorii ustoichivosti konstruktsii [Fundamentals of structural stability theory]. Moscow, Mir publ., 1971. 192 p.
- [8] Luongo A., D'Annibale F. On the destabilizing effect of damping on discrete and continuous circulatory systems. *Journal of Sound and Vibration*, 2014, vol. 333(24), pp. 6723– 6741.
- [9] Tommasini M., Kirillov O.N., Misseroni D., Bigoni D. The destabilizing effect of external damping: singular flutter boundary for the Pflüger column with vanishing external dissipation. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 2016, vol. 91, pp. 204–215.
- [10] Luongo A., Dannibale F. On the destabilizing effect of damping on discrete and continuous circulatory systems. *Journal of Sound and Vibration*, 2014, vol. 333(24), pp. 6723– 6741.
- [11] Elishakoff I. Controversy associated with the so-called «follower forces»: critical overview. *Applied Mechanics Reviews*, 2005, vol. 58, pp. 117–142.
- [12] Lagozinskii S.A., Sokolov A.I., Svetlitskogo V.A., red., Naraikina O.S. Ustoichivost' priamolineinykh sterzhnei, nagruzhennykh slediashchimi salami [Straight-line stability of the rods loaded by tracking forces]. *Problemy prikladnoi mekhaniki, dinamiki i prochnosti mashin. Sb. statei* [Problems of applied mechanics, dynamics and strength of machines. Collected papers]. Moscow, Bauman Press, 2005, pp. 244–259
- [13] Shvartsman B.S. Large deflections of a cantilever beam subjected to a follower force. *Journal of Sound and Vibration*, 2007, vol. 304 (3–5), pp. 969–973.
- [14] Ivanova A.I. Ob ustoichivosti polozheniia ravnovesiia trekhzvennogo maiatnika pod deistviem slediashchei sily [On Stability of Equilibrium Position of Three-link Pendulum under Follower Force]. Vestnik MGTU im. N.E. Baumana. Ser. Estestvennye nauki [Herald of the Bauman Moscow State Technical University. Series Natural Sciences]. 2004, no. 3, pp. 19–25.
- [15] Baikov A.E., Maiorov A.Iu. Ob ustoichivosti polozheniia ravnovesiia diskretnoi modeli zapravochnogo shlanga pod deistviem reaktivnoi sily [On the equilibrium position stability of discrete model of filling hose under the action of reactive force]. *Nelineinaia dinamika* [Russian Journal of Nonlinear Dynamics]. 2015, vol. 11, no. 1, pp. 127–146.

Статья поступила в редакцию 07.05.2018

Информация об авторах

РАДИН Владимир Павлович (Москва) — кандидат технических наук, профессор кафедры «Робототехника, мехатроника, динамика и прочность машин». НИУ «МЭИ» (111250, Москва, Российская Федерация, Красноказарменная ул., д. 14, e-mail: radinvp@gmail.com).

ЧИРКОВ Виктор Петрович (Москва) — доктор технических наук, профессор кафедры «Робототехника, мехатроника, динамика и прочность машин». НИУ «МЭИ» (111250, Москва, Российская Федерация, Красноказарменная ул., д. 14, e-mail: victor.p.chirkov@gmail.com).

ЩУГОРЕВ Алексей Владимирович (Москва) — кандидат технических наук, ассистент кафедры «Робототехника, мехатроника, динамика и прочность машин». НИУ «МЭИ» (111250, Москва, Российская Федерация, Красноказарменная ул., д. 14, e-mail: alexey.salut@gmail.com).

ЩУГОРЕВ Владимир Николаевич (Москва) — кандидат технических наук, доцент кафедры кафедры «Робототехника, мехатроника, динамика и прочность машин». НИУ «МЭИ» (111250, Москва, Российская Федерация, Красноказарменная ул., д. 14, e-mail: shchugorev.vn@gmail.com).

Information about the authors

RADIN Vladimir Pavlovich (Moscow) — Candidate of Science (Eng.), Professor, Department of Robotics, Mechatronics, Dynamics and Strength of Machines. National Research University — Moscow Power Engineering Institute (111250, Moscow, Russian Federation, Krasnokazarmennaya St., Bldg. 14, e-mail: radinvp@gmail.com).

CHIRKOV Viktor Petrovich (Moscow) — Doctor of Science (Eng.), Professor, Department of Robotics, Mechatronics, Dynamics and Strength of Machines. National Research University — Moscow Power Engineering Institute (111250, Moscow, Russian Federation, Krasnokazarmennaya St., Bldg. 14, e-mail: victor.p.chirkov@gmail.com).

SHCHUGOREV Aleksei Vladimirovich (Moscow) — Candidate of Science (Eng.), Teaching Assistant, Department of Robotics, Mechatronics, Dynamics and Strength of Machines. National Research University — Moscow Power Engineering Institute (111250, Moscow, Russian Federation, Krasnokazarmennaya St., Bldg. 14, e-mail: alexey.salut@gmail.com).

SHCHUGOREV Vladimir Nikolaevich (Moscow) — Candidate of Science (Eng.), Associate Professor, Department of Robotics, Mechatronics, Dynamics and Strength of Machines. National Research University — Moscow Power Engineering Institute (111250, Moscow, Russian Federation, Krasnokazarmennaya St., Bldg. 14, e-mail: shchugorev.vn@gmail.com).

Просьба ссылаться на эту статью следующим образом:

Радин В.П., Чирков В.П., Щугорев А.В., Щугорев В.Н. Некоторые особенности неконсервативных задач устойчивости механических систем. Известия высших учебных заведений. Машиностроение, 2018, № 8, с. 64– 70, doi: 10.18698/0536-1044-2018-8-64-70.

Please cite this article in English as:

Radin V.P., Chirkov V.P., Shchugorev A.V., Shchugorev V.N. Some Features of Non-Conservative Stability Problems of Mechanical Systems. *Proceedings of Higher Educational Institutions. Machine Building*, 2018, no. 8, pp. 64– 70, doi: 10.18698/0536-1044-2018-8-64-70.