

УДК 621.833.7

DOI: 10.18698/0536-1044-2018-7-42-47

# Влияние эксцентриситета основных окружностей зубчатых колес эвольвентной передачи на ее передаточное отношение и коэффициент перекрытия

Г.А. Тимофеев, С.А. Новикова

МГТУ им. Н.Э. Баумана, 105005, Москва, Российская Федерация, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1

## The Influence of Eccentricity of the Base Circle of Involute Gears on Its Transmission Ratio and Engagement Factor

G.A. Timofeev, S.A. Novikova

BMSTU, 105005, Moscow, Russian Federation, 2<sup>nd</sup> Baumanskaya St., Bldg. 5, Block 1

@ e-mail: timga@bmstu.ru, lanacoffeinaya@gmail.com

**i** В настоящее время при проектировании механизмов нельзя не учитывать, что их реальным конструкциям присущи погрешности размеров звеньев, отклонения формы и взаимного расположения кинематических пар от идеальных и прочие неточности, приводящие к отклонению закона движения выходного звена от требуемого. Эти погрешности необходимо уметь рассчитывать и устранять на стадиях проектирования, производства и сборки. Изготовление зубчатых колес представляет собой одну из самых трудоемких разновидностей металлообработки. Широкое применение в машиностроении передач и необходимость создания для них зубчатых колес различных видов, конструкций и типоразмеров обусловили большой удельный вес зубообработки в общем объеме технологических операций. Методы теории зубчатых зацеплений развиты главным образом для идеальных, а не для реальных зубчатых механизмов, что тормозит возможность вычисления точностных параметров передаточных механизмов и кинематических цепей. Существующие методики расчета точности зубчатых передач в основном ориентированы на определение предельных значений погрешностей. Исследовано влияние эксцентриситета основных окружностей зубчатых колес эвольвентной передачи на ее передаточное отношение и теоретический коэффициент перекрытия. Показано периодическое изменение передаточного отношения и коэффициента перекрытия, а также вычислено переменное ускорение ведомого зубчатого колеса.

**Ключевые слова:** эвольвентная зубчатая передача, передаточное отношение, коэффициент перекрытия, технологические погрешности колес

**i** At present, when designing mechanisms, one cannot but take into account the fact that errors in link size, deviations in shape and layout of kinematic pairs as well as other inaccuracies are typical in real mechanisms. This leads to deviations in the law of motion of the input link from the desired motion. It is necessary that these errors are calculated and eliminated at the design, manufacturing and assembly stages. Gear production is one of the most labour consuming types of metal processing. Gear processing constitutes a large part

in the total volume of manufacturing operations due to the wide-spread application of transmissions in mechanical engineering and, therefore, the need to produce gears of various types, designs and sizes. Methods of the theory of tooth meshing are developed mostly for ideal, not real gear mechanisms which impedes the possibility of calculating accuracy parameters of transmission mechanisms and kinematic chains. Existing methods for calculating accuracy of gear trains are largely focused on determining limit deviations of errors. This work studies the influence of eccentricity of the base circle of gearwheels in an involute gear train on its transmission ratio and the theoretical engagement factor. The periodic variation of the transmission ratio and the engagement factor is shown; variable acceleration of the driven gearwheel is calculated.

**Keywords:** involute gear, transmission ratio, engagement factor, manufacturing errors of gears

Неточное исполнение размеров звеньев механизмов (в первую очередь зубчатых), геометрической формы элементов кинематических пар, их взаимного расположения, зазоры в них, а также износ взаимодействующих поверхностей, силовые и температурные деформации в процессе эксплуатации называют технологическими или первичными погрешностями механизма [1–5]. Именно они играют решающую роль в неточности его работы. Существуют несколько методов расчета погрешностей на стадии проектирования кинематических схем механизмов, основоположниками которых являются Н.Г. Бруевич, Н.И. Калашников, Б.А. Тайц и др. [1, 2, 4–5].

Вследствие наличия технологических погрешностей при исследовании реальных плоских механизмов приходится рассматривать их структурные схемы как пространственные, чтобы уменьшить погрешности выходного звена и избежать заклинивания [3, 4, 6, 7–9, 11, 12]. Влияние избыточных связей и технологических

погрешностей на точность работы механизма можно снизить путем рационального проектирования [1, 3, 4, 7], а также с помощью особых технологических приемов при изготовлении и сборке [3, 4, 7, 10–12].

Цель работы — исследование влияния технологических погрешностей на отклонение передаточного отношения и коэффициента торцевого перекрытия эвольвентной зубчатой передачи от требуемых значений.

Рассмотрим задачу определения зависимости передаточного отношения и теоретического коэффициента перекрытия от эксцентриситета основных окружностей зубчатых колес эвольвентной зубчатой передачи.

Погрешности установки зубчатого колеса при зубонарезании, биение делительного колеса зубообрабатывающего станка, а также погрешности монтажа могут привести к эксцентриситету основных окружностей, т. е. к несовпадению геометрического и кинематического центров колес в собранной передаче.

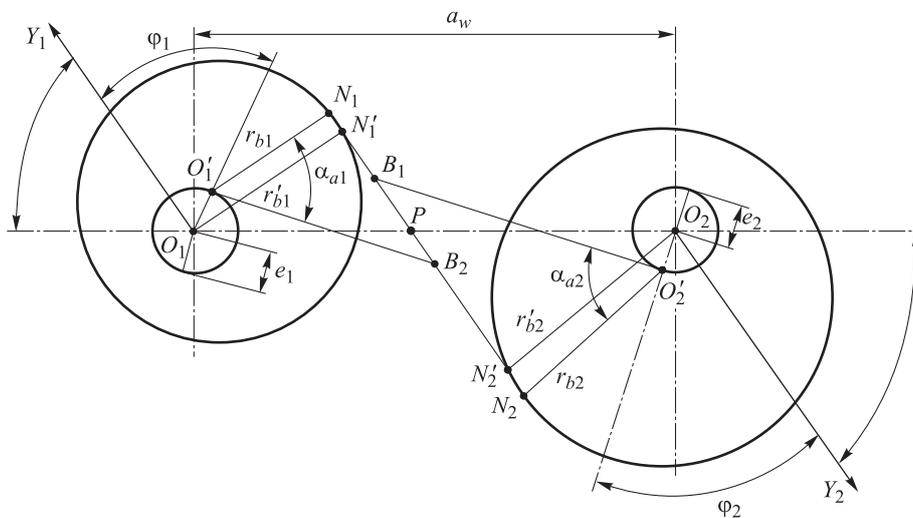


Рис. 1. Геометрическая картина зацепления колес, имеющих эксцентриситет ( $O_1O_2 = a_w$  — межосевое расстояние зубчатой передачи)

Исследование ошибок колес в виде периодической функции, впервые предложенное Н.А. Калашниковым [2], заключается в приведении ряда погрешностей к функционально действующей ошибке. В данном случае такой ошибкой является изменение мгновенных радиусов основных окружностей, которое приводит к периодическому изменению передаточного отношения и коэффициента торцевого перекрытия  $\varepsilon_\alpha$  и оказывает влияние на динамику передачи.

Примем синусоидальный закон изменения радиусов основных окружностей ведущего  $r_{b1}$  и ведомого  $r_{b2}$  колес (рис. 1) [2]

$$\delta r_{b1} = e_1 \sin \varphi_1; \quad \delta r_{b2} = e_2 \sin \varphi_2, \quad (1)$$

где  $\delta r_{b1}$  и  $\delta r_{b2}$  — погрешности радиусов основных окружностей ведущего и ведомого колес;  $e_1$  и  $e_2$  — эксцентриситеты основных окружностей ведущего и ведомого колес;  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  — текущие углы поворота, образуемые соответственно осями  $O_1Y_1$  и  $O_2Y_2$  и линией, соединяющей геометрический и кинематический центры колес.

Угол наклона осей  $O_1Y_1$  и  $O_2Y_2$  к межосевой линии  $O_1O_2$  равен  $\pi/2 - \alpha_w$  ( $\alpha_w$  — угол зацепления). При этом ничтожно малым значением колебания угла зацепления пренебрегаем.

Примем следующие начальные условия:  $\varphi_1 = 0$  и  $\varphi_2 = 0$  [2].

Картина зацепления передачи показана на рис. 1. В процессе зацепления радиусы основных и начальных окружностей непрерывно меняются. Мгновенное передаточное отношение  $u'$  можно определить по рис. 1, где отрезки  $O_1N'_1$  и  $O_2N'_2$  проведены перпендикулярно линии зацепления  $N_1N_2$ .

Обозначим отрезки  $O_1N'_1$  и  $O_2N'_2$  соответственно через радиусы основных окружностей  $r'_{b1}$  и  $r'_{b2}$ .

Очевидно, что

$$u' = \frac{O_2P}{O_1P} = \frac{r'_{b2}}{r'_{b1}}, \quad (2)$$

где

$$r'_{b1} = r_{b1} + e_1 \sin \varphi_1; \quad r'_{b2} = r_{b2} + e_2 \sin \varphi_2. \quad (3)$$

Определим погрешность передаточного отношения. Продифференцировав выражение (2), получим

$$\delta u' = \frac{\delta r_{b2}}{r_{b1}} - \frac{u'}{r'_{b1}} \delta r_{b1}. \quad (4)$$

После подстановки выражений (1) и (3) в формулу (4) имеем

$$\delta u' = \frac{e_2 \sin \varphi_2}{r_{b1} + e_1 \sin \varphi_1} - \frac{u' e_1 \sin \varphi_1}{r_{b1} + e_1 \sin \varphi_1}.$$

Если  $e_2 = 0$ , то

$$\delta u' = -\frac{u' e_1 \sin \varphi_1}{r_{b1} + e_1 \sin \varphi_1}.$$

Найдем зависимость между углами  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$ :

$$u' = \frac{d\varphi_1}{d\varphi_2}. \quad (5)$$

Подставим значение  $u'$  из уравнений (2) и (3) в выражение (5) и после интегрирования получим

$$r_{b2}\varphi_2 - e_2 \cos \varphi_2 = r_{b1}\varphi_1 - e_1 \cos \varphi_1. \quad (6)$$

При заданном угле  $\varphi_1$  определим угол  $\varphi_2$  из уравнения (6), используя один из приближенных методов [5].

Если  $e_2 = 0$ , то

$$\varphi_2 = \frac{r_{b1}}{r_{b2}} \varphi_1 - \frac{e_1}{r_{b2}} \cos \varphi_1.$$

Погрешности передаточного отношения эвольвентной зубчатой передачи вызывают переменное ускорение ведомого колеса

$$\varepsilon_2 = \frac{d\omega_2}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \frac{\omega_1}{u_1} \right) = -\frac{\omega_1^2}{(u')^2} \frac{du'}{d\varphi_1}.$$

где  $\omega_2$  и  $\omega_1$  — угловые скорости ведомого и ведущего колес;  $t$  — время;  $u_1$  — передаточное отношение передачи.

После подстановок и преобразований получим

$$\ddot{\varphi}_2 = \frac{\omega_1^2}{(u')^2} \frac{u' e_1 \cos \varphi_1 - e_2 \cos \varphi_2 / u'}{r_{b1} + e_1 \sin \varphi_1}.$$

Эксцентриситет основных окружностей вызывает колебания коэффициента торцевого перекрытия. Примем, что эксцентриситет окружностей вершин равен эксцентриситету основных окружностей. Тогда, согласно рис. 1, коэффициент торцевого перекрытия с учетом эксцентрисетов окружностей:

$$\varepsilon'_\alpha = \frac{B_1 B_2}{p_b} = \frac{N_1 B_2 - N'_1 P - N_1 N'_1 + N_2 B_1 - N'_2 P - N_2 N'_2}{p_b},$$

где  $p_b$  — шаг по основной окружности;

$$\begin{aligned} N_1 B_2 &= r_{b1} \operatorname{tg} \alpha_{a1}; & N'_1 P &= r'_{b1} \operatorname{tg} \alpha_w; \\ N_2 B_1 &= r_{b2} \operatorname{tg} \alpha_{a2}; & N'_2 P &= r'_{b2} \operatorname{tg} \alpha_w; \\ N_1 N'_1 &= e_1 \cos \varphi_1; & N'_2 N_2 &= e_2 \cos \varphi_2. \end{aligned}$$

После подстановок и преобразований получим

$$\begin{aligned} \varepsilon'_\alpha &= \frac{r_{b1} (\operatorname{tg} \alpha_{a1} - \operatorname{tg} \alpha_w) + r_{b2} (\operatorname{tg} \alpha_{a2} - \operatorname{tg} \alpha_w)}{\pi m \cos \alpha} - \\ &\quad - \frac{\operatorname{tg} \alpha_w (e_1 \sin \varphi_1 + e_2 \sin \varphi_2)}{\pi m \cos \alpha} + \\ &\quad + \frac{e_1 \cos \varphi_1 + e_2 \cos \varphi_2}{\pi m \cos \alpha}, \end{aligned} \quad (7)$$

где  $m$  — модуль зацепления;  $\alpha$  — главный угол профиля исходного контура.

Второй член выражения (7) представляет собой погрешность коэффициента торцевого перекрытия.

На рис. 2 приведены гармонические колебания передаточного отношения и зубчатой пары колес со следующими параметрами: числа зубьев ведущего и ведомого колес —  $z_1 = 20$  и  $z_2 = 40$ ;  $\alpha = 20^\circ$ ;  $\alpha_w = 25^\circ$ ;  $\alpha_{a1} = 37,8^\circ$ ;  $\alpha_{a2} = 31,5^\circ$ ;  $\varepsilon_\alpha = 2,0$ ; зубья — полностью заостренные.

При построении кривых с учетом рекомендаций, приведенных в работах [6, 7], принято, что

$$e_{1,2} = \frac{z_{1,2} \Delta p_b^{ES}}{2\pi},$$

где  $\Delta p_b^{ES}$  — одностороннее отклонение наибольшей разности основных шагов в пределах линии зацепления.

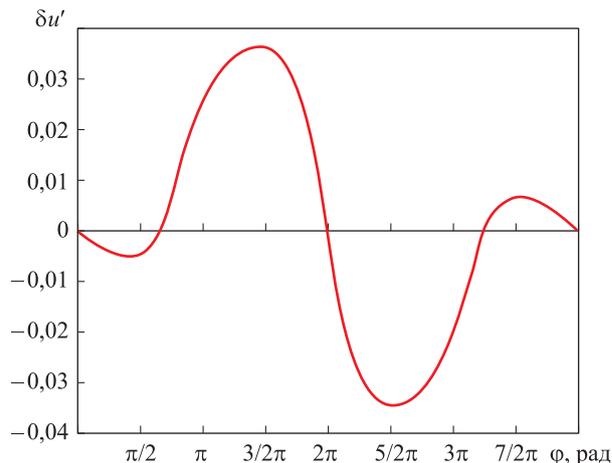


Рис. 2. Зависимость погрешности передаточного отношения  $\delta u'$  от угла поворота входного звена  $\varphi$

Для 9-й степени точности при  $\Delta p_b^{ES} = \pm 45$  мкм получим  $e_1 \approx 0,1$  мм и  $e_2 \approx 0,2$  мм.

### Выводы

Введение эксцентриситета основной окружности при нарезании зубьев вызывает изменение передаточного отношения изготавливаемой передачи по периодическому закону, что приводит к появлению систематических погрешностей в перемещении выходных звеньев рабочих механизмов машин. Полученный кинематический эксцентриситет может быть скомпенсирован путем неконцентричной установки заготовки при зубообработке на неточном станке или при обработке отверстия после зубонарезания в специализированном патроне.

### Литература

- [1] Беспалов В.В., Хазова В.И. Влияние погрешностей зацепления, изменяющихся по синусоидальному закону по углу  $\varphi$ , на спектр гармонических составляющих циклической погрешности зубцовой частоты цилиндрических зубчатых передач. *Вестник ИжГТУ*, 2014, № 4(64), с. 30–33.
- [2] Локтев Д.А. Современные методы контроля качества цилиндрических зубчатых колес. *Оборудование и инструмент для профессионалов. Сер. Металлообработка*, 2009, № 4, с. 6–11.
- [3] Попов П.К. *Расчетно-экспериментальное обеспечение точности зубчатых передач*. Дис. ... докт. техн. наук. Москва, 1996. 269 с.
- [4] Крайнев А.Ф. *Механика машин. Фундаментальный словарь*. Москва, Машиностроение, 2000. 904 с.
- [5] Болотовский И.А., ред. *Справочник по геометрическому расчету эвольвентных зубчатых и червячных передач*. Москва, Машиностроение, 1986. 448 с.
- [6] Вулгаков Э.Б. *Теория эвольвентных зубчатых передач*. Москва, Машиностроение, 1995. 320 с.
- [7] Сидоров П.Г., ред. *Многопоточные зубчатые трансмиссии. Теория и методология проектирования*. Москва, Машиностроение, 2011. 340 с.

- [8] Litvin F., Fuentes A. *Gear geometry and applied theory*. Cambridge, Cambridge university press, 2004. 792 p.
- [9] Litvin F.L., Fuentes A., Demenego A., Vecchiato D., Fan Q. New developments in the design and generation of gear drives. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C. Journal of Mechanical Engineering Science*, 2001, vol. 215(7), pp. 747–757.
- [10] Litvin F., Fuentes A., Zanzi C., Pontiggia M. Design, Generation, and Stress Analysis of two version of Geometry of Face-gear drives. *Mechanism and Machine theory*, 2002, vol. 37(10), pp. 1179–1211.
- [11] Wang Y., Lan Z., Hou L., Zhao H., Zhong Y. A precision generating grinding method for face gear using CBN wheel. *International journal of advanced manufacturing technology*, 2015, vol. 79, is. 9–12, pp. 1839–1848.
- [12] Tang Q., Zhang Y., Jiang Z., Yan D. Design Method for Screw Forming Cutter Based on Tooth Profile Composed of Discrete Points. *Journal of Mechanical design, Transactions of the ASME*, 2015, vol. 137, is. 8, pp. 251–260.

## References

- [1] Bepalov V.V., Khazova V.I. Vliianie pogreshnostei zatsepleniia, izmeniaiushchikhsia po sinusoidal'nomu zakonu po uglu  $\varphi$ , na spektr garmonicheskikh sostavliaiushchikh tsiklicheskoi pogreshnosti zbtsovoi chastoty tsilindricheskikh zubchatykh peredach [Effect of Transmission Error Varying According to Sinusoidal Law by  $\varphi$  Angle on Spectrum of Harmonic Components of Cyclic Error of Gear-Meshing Frequency of Spur Gears]. *Vestnik IzhGTU* [Bulletin of Kalashnikov ISTU]. 2014, no. 4(64), pp. 30–33.
- [2] Loktev D.A. Sovremennye metody kontroliia kachestva tsilindricheskikh zubchatykh kole [Modern Methods of Quality Control of Cylindrical Gears]. *Oborudovanie i instrument dlia professionalov, seriia Metalloobrabotka* [Equipment and tools for professionals. Ser. Metalworking]. 2009, no. 4, pp. 6–11.
- [3] Popov P.K. *Raschetno-eksperimental'noe obespechenie tochnosti zubchatykh peredach* Diss. dokt. tekhn. nauk [Calculation and experimental ensuring the accuracy of gears. Dr. tech. sci. diss.]. Moscow, 1996. 269 p.
- [4] Krainev A.F. *Mekhanika mashin. Fundamental'nyi slovar'* [Mechanics of machines. Fundamental Dictionary]. Moscow, Mashinostroenie publ., 2000. 904 p.
- [5] *Spravochnik po geometricheskomu raschetu evol'ventnykh zubchatykh i cherviachnykh peredach* [Guide to geometric calculation of involute gears and worm gears]. Ed. Bolotovskii I.A. Moscow, Mashinostroenie publ., 1986. 448 p.
- [6] Vulgakov E.B. *Teoriia evol'ventnykh zubchatykh peredach* [Theory of involute gears]. Moscow, Mashinostroenie publ., 1995. 320 p.
- [7] *Mnogopotochnye zubchatye transmissii. Teoriia i metodologiia proektirovaniia* [Multithreaded gear transmission. Design theory and methodology]. Ed. Sidorov P.G. Moscow, Mashinostroenie publ., 2011. 340 p.
- [8] Litvin F., Fuentes A. *Gear geometry and applied theory*. Cambridge, Cambridge university press, 2004. 792 p.
- [9] Litvin F.L., Fuentes A., Demenego A., Vecchiato D., Fan Q. New developments in the design and generation of gear drives. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C. Journal of Mechanical Engineering Science*, 2001, vol. 215(7), pp. 747–757.
- [10] Litvin F., Fuentes A., Zanzi C., Pontiggia M. Design, Generation, and Stress Analysis of two version of Geometry of Face-gear drives. *Mechanism and Machine theory*, 2002, vol. 37(10), pp. 1179–1211.
- [11] Wang Y., Lan Z., Hou L., Zhao H., Zhong Y. A precision generating grinding method for face gear using CBN wheel. *International journal of advanced manufacturing technology*, 2015, vol. 79, is. 9–12, pp. 1839–1848.
- [12] Tang Q., Zhang Y., Jiang Z., Yan D. Design Method for Screw Forming Cutter Based on Tooth Profile Composed of Discrete Points. *Journal of Mechanical design, Transactions of the ASME*, 2015, vol. 137, is. 8, pp. 251–260.

## Информация об авторах

**ТИМОФЕЕВ Геннадий Алексеевич** (Москва) — доктор технических наук, профессор, зав. кафедрой «Теория механизмов и машин». МГТУ им. Н.Э. Баумана (105005, Москва, Российская Федерация, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1, e-mail: timga@bmstu.ru).

**НОВИКОВА Светлана Александровна** (Москва) — ассистент кафедры «Инженерная графика». МГТУ им. Н.Э. Баумана (105005, Москва, Российская Федерация, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1, e-mail: lanacoffeinaya@gmail.com).

## Information about the authors

**TIMOFEEV Gennadiy Alekseevich** (Moscow) — Doctor of Science (Eng.), Professor, Head of Department of Theory of Mechanisms and Machines. Bauman Moscow State Technical University (105005, Moscow, Russian Federation, 2<sup>nd</sup> Baumanskaya St., Bldg. 5, Block 1, e-mail: timga@bmstu.ru).

**NOVIKOVA Svetlana Aleksandrovna** (Moscow) — Teaching Assistant, Engineering Graphics Department. Bauman Moscow State Technical University (105005, Moscow, Russian Federation, 2<sup>nd</sup> Baumanskaya St., Bldg. 5, Block 1, e-mail: lanacoffeinaya@gmail.com).

### Просьба ссылаться на эту статью следующим образом:

Тимофеев Г.А., Новикова С.А. Влияние эксцентриситета основных окружностей зубчатых колес эвольвентной передачи на ее передаточное отношение и коэффициент перекрытия. *Известия высших учебных заведений. Машиностроение*, 2018, № 7, с. 42–47, doi: 10.18698/0536-1044-2018-7-42-47.

### Please cite this article in English as:

Timofeev G.A., Novikova S.A. The Influence of Eccentricity of the Base Circle of Involute Gears on Its Transmission Ratio and Engagement Factor. *Proceedings of Higher Educational Institutions. Machine Building*, 2018, no. 7, pp. 42–47, doi: 10.18698/0536-1044-2018-7-42-47.



В Издательстве МГТУ им. Н.Э. Баумана  
вышло в свет учебное пособие

**Л.П. Мухамедова**

### «Основы проектирования транспортных космических систем»

Изложены основы проектирования транспортных космических систем с жидкостными ракетными двигателями, предназначенных для доставки полезных грузов на целевые орбиты и траектории назначения, и их составляющих: ракет-носителей и разгонных блоков.

Рассмотрено формирование граничных условий решения задач баллистического проектирования. Предложены инженерные методики выбора основных проектных параметров и определения энергомассовых и геометрических характеристик проектируемого изделия в составе ракетного комплекса. Приведены численные примеры решения задач баллистического проектирования транспортных космических систем.

Для студентов старших курсов машиностроительных вузов, а также для специалистов, занимающихся разработкой ракетно-космических систем.

**По вопросам приобретения обращайтесь:**

105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1.  
Тел.: +7 499 263-60-45, факс: +7 499 261-45-97;  
press@bmstu.ru; www.baumanpress.ru