

# Машиностроение и машиноведение

УДК 539.4:678.067

DOI: 10.18698/0536-1044-2018-5-3-12

## Проектирование равнопрочных профилированных, разветвленных или расслоенных упругих композитных элементов\*

**А.Н. Полилов<sup>1,2</sup>, Н.А. Татусь<sup>2</sup>**<sup>1</sup> МГТУ им. Н.Э. Баумана, 105005, Москва, Российская Федерация, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1<sup>2</sup> Институт машиноведения им. А.А. Благонравова РАН, 101990, Москва, Российская Федерация, Малый Харитоньевский пер., д. 4

## Designing Equistrong Shaped, Branching or Delaminated Elastic Composite Members

**A.N. Polilov<sup>1,2</sup>, N.A. Tatus<sup>2</sup>**<sup>1</sup> BMSTU, 105005, Moscow, Russian Federation, 2<sup>nd</sup> Baumanskaya St., Bldg. 5, Block 1<sup>2</sup> Blagonravov Mechanical Engineering Research Institute of the Russian Academy of Sciences, 101990, Moscow, Russian Federation, Malyy Khariton'yevskiy Pereulok, Bldg. 4

e-mail: polilovan@mail.ru, nikalet@mail.ru



Рассмотрена аналогия по изгибной податливости профилированных балок класса констэра (с постоянной площадью поперечного сечения) и разветвленных или расслоенных композитных структур, похожих на крону дерева с постоянной суммой площадей сечений ветвей (правило Леонардо). В идеальном случае профилирование или ветвление обеспечивает при сохранении прочности рост податливости в 3 раза, т.е. трехкратное повышение запасенной упругой энергии для фиксированных нагрузки и массы упругого элемента. Показано, что замена стали на стеклопластик в подобных упругих элементах позволяет снизить их массу примерно в 15 раз. Отмечены ограничения возможности использования линеаризованного уравнения изгиба для равнопрочных профилированных тяжелых балок под действием распределенной или сосредоточенной нагрузки. Разветвленные упругие элементы из полимерных композитов можно эффективно применять в конструкциях космического базирования благодаря их малой массе и низкой энергоемкости изготовления деталей, что позволяет их производить непосредственно на орбите.

**Ключевые слова:** композитный материал, низко модульный и высокопрочный стеклопластик, равнопрочная упругая балка, ветвящаяся структура, правило Леонардо, расслоенная балка



This paper examines the analogy with regard to bending flexibility of shaped beams with a constant cross section area and branching or delaminated treetop-like composite structures with a constant sum of cross sections of the branches (Leonardo's rule). In the

\* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (гранты 18-08-00372, 18-58-53020).

ideal case, shaping or branching provides threefold bend flexibility growth while retaining the strength i.e., threefold increase of the accumulated elastic energy for a fixed applied load and the same mass of the elastic member. It is shown that the use of glass fiber reinforced plastic in shaped elastic beams makes it possible to reduce their mass by approximately 15 times compared to the steel analog. The limitations of using a linearized bend equation for equistrong shaped heavy beams under distributed or concentrated load are described. Shaped or branching composite elastic members can be efficiently used in space-based constructions due to their low mass and low energy consumption of the polymer composite member manufacturing, therefore allowing production directly in orbit.

**Keywords:** composite material, low-modulus and high-strength glass fiber reinforced plastic, equistrong elastic beam, branching structure, Leonardo's rule, delaminated beam

В последние годы широко применяется международный термин «Bio-inspired method» — метод, подсказанный природой. Современная тенденция в разных отраслях науки состоит в повышении внимания к принципам строения и функционирования живых организмов. Под лозунгом «Учись у природы» создаются роботы, нейрокомпьютеры, транспортные средства, сложные механизмы и др. Однако у природы можно учиться не только принципам движения и функционирования.

Миллионнолетний отбор привел к возникновению совершенных природных материалов, для создания которых требуется минимальная энергия — солнечная или получаемая при расщеплении продуктов питания. Например, удельная прочность паутины или древесины выше, чем у стали, но главное достижение природы — это проектирование узлов крепления. Ветку никакими усилиями не оторвать от ствола, так как место соединения прочнее, чем основной материал. Композитному конструированию еще далеко до таких показателей, но учиться этому можно и нужно.

Большое количество теоретических и экспериментальных работ посвящено созданию структур армирования, в которых волокна «обтекают» отверстие или место крепления, располагаясь вдоль траекторий главных растягивающих напряжений [1–4], что многократно повышает несущую способность пластин по сравнению со сверлением отверстия в композитах с прямолинейным армированием. Интересный опыт создания композитных многозвенных труб можно почерпнуть из моделирования структуры и механизмов разрушения стебля бамбука [5, 6].

С развитием композитных технологий возвращается интерес к равнопрочным профилированным балкам [7]. Из стали изготавливали

лишь треугольные балки (например, для тарировки тензодатчиков) или листовые рессоры (по сути треугольные) с линейным изменением длины листов. Но композитные технологии позволяют обратиться к природе за опытом по созданию рациональных структур: ветвления, расположения волокон в зоне сучка, упрочнения трубчатых стеблей бамбука и др. Развитая крона дерева примерно сохраняет суммарную площадь ветвей [8, 9], но имеет существенно повышенную изгибную податливость, чтобы лучше сопротивляться ветровым нагрузкам. Анализ подобных (с виду простейших) задач привел к неожиданным ограничениям на принципиальную возможность проектирования равнонапряженных балок в привычной линейной постановке [10].

Несмотря на богатую историю, проектирование равнопрочных профилированных балок, изгибаемых под действием собственного веса или неоднородной ветровой нагрузки, остается нетривиальной задачей [11], представляющей не только научный, но и педагогический интерес, так как ее анализ позволяет на простых примерах пояснить особенности расчета упругих элементов на прочность при заданной жесткости. Например, при заданных нагрузке и изгибной жесткости длинная балка имеет больший запас прочности, чем короткая. Краткий анализ некоторых задач биомеханики прочности приведен в недавно вышедших монографиях [12–14].

Цель работы — анализ возможности создания эффективных упругих элементов из стеклопластиков в виде профилированных или многослойных балок и ветвящихся равнопрочных структур, а также демонстрация особенностей расчета профилированных балок для указания границ применимости линейных моделей, принятых в курсах «Сопротивление материалов» и «Строительная механика».

**Профилированная балка констэра** (рис. 1) с постоянной площадью сечения — наилучший вариант формы равнопрочной композитной балки, в которой волокна не обрываются и их число сохраняется постоянным в каждом сечении.

У консольной балки, нагруженной концевой силой, эпюра изгибающего момента линейная, поэтому ширину  $w$  и высоту  $h$  сечения балки можно принять изменяющимися по степенным законам

$$\begin{aligned} w(x) &= w(0)(1-x^*)^\alpha; \\ h(x) &= h(0)(1-x^*)^\beta; \\ x^* &= x/L, \end{aligned} \quad (1)$$

где  $w(0)$ ,  $h(0)$  — ширина и высота корневого сечения;  $\alpha$ ,  $\beta$  — показатели степени;  $L$  — длина балки.

Особенность расчета на прочность при заданной жесткости состоит в необходимости одновременного удовлетворения двум противоречивым условиям:

- жесткости

$$C = \frac{P}{\nu} = \frac{Ew(0)h^3(0)}{4\delta_\nu L^3}; \quad (2)$$

- прочности

$$\sigma_{\max} = \frac{6P_{\max}L}{w(0)h^2(0)} \leq \sigma_B, \quad (3)$$

где  $\sigma_{\max}$  — максимальное напряжение;  $P$  и  $P_{\max}$  — нагрузка и ее максимальное значение;  $\nu$  — прогиб профилированной балки;  $E$  — модуль упругости;  $\delta_\nu$  — коэффициент формы по прогибу;  $\sigma_B$  — предел прочности.

Противоречивость требований (2) и (3) состоит в том, что для роста несущей способности (для понижения напряжений) толщину балки — рессоры следует увеличивать, а для уменьшения жесткости (для повышения запасенной упругой энергии) — снижать. Наилучший проект соответствует одновременному выполнению равенств (2) и (3).

Дополнительное условие равнопрочности

$$\frac{6P(L-x)}{w(x)h(x)^2} = \frac{6PL}{w(0)h(0)^2}$$

приводит из (1) к линейному соотношению

$$\alpha + 2\beta = 1. \quad (4)$$

Прогиб профилированной балки  $\nu$  под нагрузкой  $P$  (см. рис. 1) легко определить из

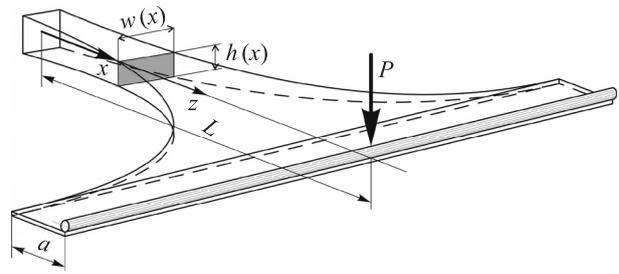


Рис. 1. Схема профилированной консольной балки констэра с концевым участком с постоянными размерами сечения

равенства работы силы  $P\nu/2$  и накопленной в балке упругой энергии:

$$\nu(L) = \int_0^L \frac{P(L-x)^2 dx}{E(x)I(x)} = \frac{PL^3}{3EI(0)} \frac{1}{1-\alpha/3-\beta} = \nu_0 \delta_\nu, \quad (5)$$

где  $I(x)$  — текущий момент инерции;  $I(0)$  — момент инерции корневого сечения;  $\nu_0$  — прогиб прямоугольной балки.

В выражении (5)

$$\begin{aligned} I(x) &= \frac{w(x)h^3(x)}{12} = \frac{w(0)h^3(0)}{12} (1-x^*)^{\alpha+3\beta} = \\ &= I(0)(1-x^*)^{\alpha+3\beta}. \end{aligned}$$

Из формулы (5) следует, что коэффициент формы по прогибу

$$\delta_\nu = \frac{\nu(L)}{\nu_0} = \frac{1}{1-\alpha/3-\beta} \quad (6)$$

равен отношению максимального прогиба профилированной балки  $\nu(L)$  к прогибу прямоугольной балки  $\nu_0$  с теми же размерами корневого сечения.

Для наглядности модуль упругости  $E$  считаем постоянным. Учет влияния разориентации волокон на эффективные упругие и прочностные свойства подробно проведен в работах [7, 13]. В первом приближении не принимаются во внимание дополнительные прогибы от межслойных сдвигов.

Наилучшая для волокнистой структуры балка констэра проектируется с сохранением площади поперечного сечения, благодаря чему в ней отсутствуют перерезанные волокна. Постоянство площади поперечного сечения из выражения (1) означает

$$\alpha + \beta = 0. \quad (7)$$

Тогда из условия равнопрочности (4):  $\alpha = -1$ ,  $\beta = 1$ . Для таких значений из выражения (6) следует, что балка констэра с сохране-

нием массы обладает втрое большей податливостью, чем прямоугольная балка.

При одновременном выполнении условий (2) и (3) можно найти необходимые размеры корневого сечения рессоры:

$$\begin{aligned} h(0) &= \frac{2C\sigma_b L^2}{3EP_{\max}} \delta_v = h_0 \delta_v; \\ w(0) &= \frac{27P_{\max}^3 E^2}{2\sigma_b^3 C^2 L^3 \delta_v^2} = \frac{w_0}{\delta_v^2}, \end{aligned} \quad (8)$$

где  $h_0$  и  $w_0$  — постоянные размеры сечения прямоугольной балки, удовлетворяющей тем же условиям (2) и (3).

Масса профилированной балки легко вычисляется интегрированием:

$$\begin{aligned} m(L) &= \int_0^L \rho w(x) h(x) dx = \\ &= -\rho w(0) h(0) L \int_0^1 (1-x^*)^{\alpha+\beta} d(1-x^*) = \\ &= \frac{\rho w(0) h(0) L}{1+\alpha+\beta} = m(0) \delta_m; \\ \delta_m &= \frac{1}{1+\alpha+\beta}, \end{aligned} \quad (9)$$

где  $\rho$  — плотность материала балки;  $m(0)$  — масса прямоугольной балки с теми же размерами корневого сечения.

Из выражений (8) и (9) найдем массу идеальной рессоры, точно соответствующей условиям жесткости (2) и прочности (3):

$$m(L) = \rho w(0) h(0) L \delta_m = \frac{9\rho P_{\max}^2 E \delta_m}{\sigma_b^2 C \delta_v}, \quad (10)$$

где  $\delta_m/\delta_v = \delta_\Sigma$  — коэффициент снижения массы профилированной балки относительно прямоугольной.

Из соотношения (10) следует, что масса балки зависит не только от плотности материала  $\rho$ , но и от модуля упругости  $E$ . Именно этот эффект делает низко модульный и высокопрочный однонаправленный стеклопластик наиболее эффективным конструкционным материалом для упругих элементов.

*Пример.* Свойства стали (*steel*):  $E^s = 210$  ГПа; предел прочности  $\sigma_b^s \approx 800$  МПа; плотность  $\rho^s = 7800$  кг/м<sup>3</sup>. Свойства однонаправленного стеклопластика (*glass*):  $E^g = 45$  ГПа;  $\sigma_b^g \approx 800$  МПа;  $\rho^g = 2500$  кг/м<sup>3</sup>. Таким образом, согласно соотношению (10), в идеальном случае

стеклопластиковая рессора только за счет механических свойств может быть примерно в 15 раз легче, чем стальная, при сохранении требований прочности и жесткости.

Интересный вывод позволяет сделать анализ влияния формы равнопрочной рессоры на коэффициент снижения ее массы

$$\delta_\Sigma = \frac{3-\alpha-3\beta}{3(1+\alpha+\beta)}. \quad (11)$$

Применительно к балкам равного сопротивления (4) из выражения (11) следует

$$\delta_\Sigma = \frac{2-\beta}{3(2-\beta)} = \frac{1}{3}, \quad (12)$$

т. е. при одновременном выполнении условий жесткости и прочности любая равнопрочная идеальная балка оказывается в 3 раза легче прямоугольной. Это наилучший предельный случай; большего снижения массы благодаря форме достичь нельзя.

**Пять способов повышения долговечности рессоры** путем снижения наибольших напряжений при заданных максимальной нагрузке  $P_{\max}$  и жесткости  $C$ . Рассмотрим малолистовую рессору, состоящую из  $n$  одинаковых профилированных листов. Это эквивалентно замене в выражении (3) и далее  $P_{\max}$  на  $P_{\max}/n$  (или  $w$  на  $nw$ ). Найдя необходимую толщину для заданной жесткости (2), определим максимальное напряжение

$$\sigma_{\max} = \frac{3P_{\max}}{L} \left( \frac{2E^2}{\delta_v^2 n w(0) C^2} \right)^{1/3} < \sigma_b. \quad (13)$$

Формула (13) отражает основные особенности расчета на прочность при заданной жесткости. Например, для данной максимальной нагрузки  $P_{\max}$  длинная балка оказывается менее напряженной (а значит, более долговечной), чем короткая. Для повышения циклической долговечности необходимо снизить максимальное напряжение. Согласно выражению (13), этого можно добиться пятью способами: увеличением числа листов  $n$  (традиционный подход), ширины  $w(0)$  (этот прием обуславливает перспективность применения широких поперечных рессор), длины  $L$  (у старых экипажей рессора выступала за габариты), коэффициента формы по прогибу  $\delta_v$  (это особенно эффективно для волокнистых композитов, так как изготовить профилированную балку путем формования в процессе полимеризации про-

ще, чем изменить ширину и толщину стального листа) и использованием стеклопластика с более низким, чем у стали, модулем упругости  $E$  (а точнее — с меньшим отношением квадрата модуля упругости к кубу предела прочности).

**Правило Леонардо о сохранении суммарной площади поперечных сечений ветвей** при ветвлении на  $N$  одинаковых ветвей (рис. 2) приводит к уменьшению суммарного момента инерции  $I_{N1}$  и к росту изгибной податливости:

$$d^2 = Nd_{N1}^2. \tag{14}$$

Прогиб определяется выражением

$$v_{N1} = \frac{P}{E} \left[ \frac{1}{I} \int_0^{L-L_{N1}} (L-x)^2 dx + \frac{1}{I_{N1}} \int_{L-L_{N1}}^L (L-x)^2 dx \right] = v \left[ 1 + (N-1)\lambda_{N1}^3 \right]; \tag{15}$$

$$I = \frac{\pi d^4}{64}; \quad I_{N1} = N \frac{\pi d_{N1}^4}{64} = \frac{I}{N};$$

$$v = \frac{PL^3}{3EI}; \quad \lambda_{N1} = \frac{L_{N1}}{L}.$$

В выражении (15) необходимо учесть требование равнопрочности, т. е. равенства наибольших напряжений в корневом сечении и после ветвления:

$$\frac{PL}{\pi d^3} = \frac{PL_{N1}}{N\pi d_{N1}^3}. \tag{16}$$

Отсюда с учетом соотношения (14) определяется рациональная координата ветвления:

$$L'_{N1} = \frac{L}{\sqrt{N}} \Rightarrow \lambda'_{N1} = \frac{1}{\sqrt{N}}.$$

Тогда выражение для коэффициента прогиба с использованием формулы (15) примет вид

$$\delta_v = \frac{v_{N1}}{v} = 1 + \frac{N-1}{N^{3/2}} \xrightarrow{N \rightarrow 1; N \rightarrow \infty} 1. \tag{17}$$

Интересно отметить, что, согласно формуле (17), ветвление не дает преимуществ по податливости ни для тривиального случая ( $N=1$ ), ни для большого числа ветвей ( $N \rightarrow \infty$ ). Значит, существует какое-то рациональное число ветвей, обеспечивающее максимальное повышение изгибной податливости.

Из зависимости (17) следует, что для достижения максимального прогиба при сохранении равнонапряженности выгодным является ветвление ровно на три ветки:

$$\frac{d\delta_v}{dN} = 0 \Rightarrow 2N^{3/2} - 3N^{1/2}(N-1) = 0 \Rightarrow N_{opt} = 3. \tag{18}$$

Может быть, поэтому ветка часто ветвится именно на три части (не только для равновесия и для выхода из плоскости). При  $N=3$ ;  $\lambda'_{31} = 1/\sqrt{3}$  имеем  $v_{31}/v = 1 + 2/3^{3/2} \approx 1,38$ . Это наибольшее возможное значение коэффициента прогиба для одного ветвления с сохранением равнопрочности.

Если признать наилучшим ветвление на три одинаковые ветки, то можно продолжить процесс ветвления каждой ветки на три новые

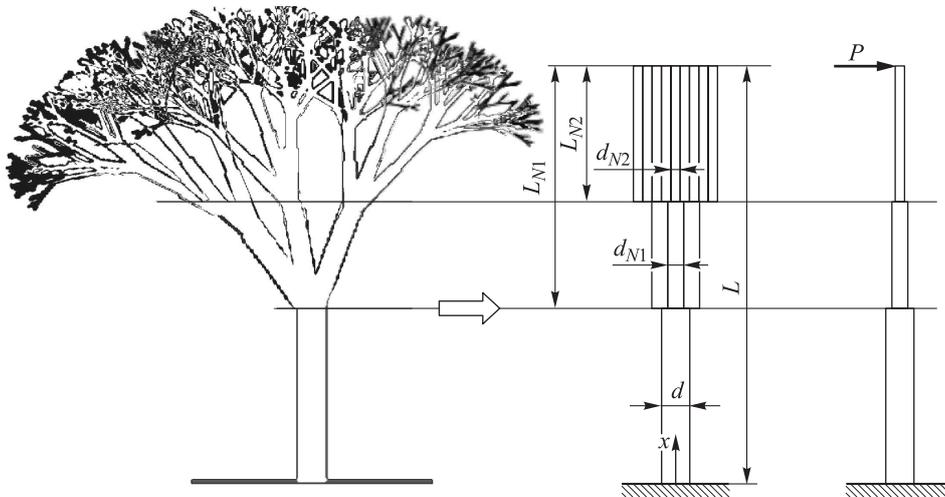


Рис. 2. Схема изменения числа ветвей для роста податливости при условии сохранения равнонапряженности ( $d, d_{N1}, d_{N2}$  — диаметры соответственно ствола и ветвей после первого и второго ветвления;  $L_{N1}$  и  $L_{N2}$  — координаты первого и второго ветвления на  $N$  ветвей)

с сохранением тех же условий подобия по диаметру  $d_{3i}$  и по рациональной координате ветвления  $L'_{3i}$ , что и при первом ветвлении. Только теперь вместо  $L$  надо рассматривать  $L'_{31}$ , а вместо  $d$  —  $d_{31}$  и т. д. В результате коэффициент податливости будет расти в соответствии со сходящимся рядом:

$$\delta_v = \frac{v_{Nn}}{v} = 1 + \sum_{i=1}^n \frac{N^i - N^{i-1}}{N^{3i/2}} = 1 + \sum_{i=1}^n \frac{1 - N^{-1}}{N^{i/2}}. \quad (19)$$

Выражение (19) для коэффициента прогиба при  $N = 3$  представляет собой сумму геометрической прогрессии  $a_1(1 - q^n)/(1 - q)$  с начальным членом  $a_1 = 2/(3\sqrt{3})$  и знаменателем  $q = 1/\sqrt{3}$ . Эта сумма увеличивается, но ограничено, стремясь к предельному значению

$$\delta_v = \frac{v_{3n}}{v} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1 + \frac{a_1}{1 - 1/\sqrt{3}} = \frac{2}{3(\sqrt{3} - 1)} \approx 1,91.$$

Это максимальный коэффициент прогиба, соответствующий росту податливости при сохранении прочности, который можно получить при ветвлении на целое число (три) одинаковых веток. Ситуация аналогична тому, что профиль балки констэра (см. рис. 1) можно было бы изменять только ступенчато, а не плавно. Чтобы еще больше повысить податливость, надо форму сечения веток делать переменной (например, эллиптической) с сохранением площади сечения. Но для дерева направление ветровой нагрузки может меняться (если только дерево не растет где-то в ущелье), поэтому природа применяет симметричную и почти круглую форму сечения веток. Не будем усложнять изложение анализом равнопрочного изменения формы эллиптических сечений, а подойдем к идеальному варианту другим путем.

Чтобы оценить предельное значение коэффициента прогиба для непрерывного (фрактального) ветвления, необходимо представить постоянно меняющимся нецелое число  $N$  ветвей с сохранением суммарной площади (14):  $d^2 = N(x)d^2(x)$  и равнонапряженности (16):  $LN(x)d^3(x) = (L - x)d^3$ . Получим

$$N(x) = \left( \frac{L}{L - x} \right)^2 \Rightarrow I(x) = \frac{I}{N(x)}$$

и прогиб фрактально (идеально) ветвящейся балки

$$v_{N(x)}^* = \frac{P}{EI} \int_0^L (L - x)^2 N(x) dx = \frac{PL^3}{EI} = 3v.$$

Таким образом, в идеальном случае ветвящийся цилиндрический стержень имеет при сохранении прочности втрое большую податливость, чем однородный, в точности как в случае балки констэра (12).

Ветвящиеся композитные балки могут быть использованы как эффективные упругие элементы, в частности, для конструкций космического базирования (где нет ограничений по габаритным размерам, как, например, в автомобильной подвеске), и они для фиксированной массы могут запастись втрое большую упругую энергию. А если сравнивать весовую эффективность таких элементов со стальными пружинами, то низко модульный высокопрочный стеклопластик может дать выигрыш примерно в 15 раз. Это тем более интересно, что благодаря низкой энергоемкости производства композитные элементы любых размеров можно изготавливать из полуфабрикатов (волокна, смола) непосредственно в орбитальных лабораториях.

**Расслоенный упругий элемент** (рис. 3) можно проанализировать по той же схеме, что и ветвление в предыдущем разделе. При этом суммарные размеры прямоугольного сечения — ширина  $w$  и высота  $h$  — остаются постоянными, изменяется лишь толщина образованных слоев. По аналогии с выражением (15) рассчитаем коэффициент прогиба при одном расслоении на  $N$  слоев:

$$v_{N1} = \frac{P}{EI} \left[ \int_0^{L-L_{N1}} (L-x)^2 dx + \frac{I}{I_{N1}} \int_{L-L_{N1}}^L (L-x)^2 dx \right] = v \left[ 1 + (N^2 - 1) \lambda_{N1}^3 \right];$$

$$v = \frac{PL^3}{3EI}; \quad I = \frac{wh^3}{12}; \quad I_{N1} = N \frac{w(h/N)^3}{12} = \frac{I}{N^2};$$

$$\lambda_{N1} = \frac{L_{N1}}{L} = \frac{1}{N} \Rightarrow \delta_v = 1 + \frac{N^2 - 1}{N^3}.$$

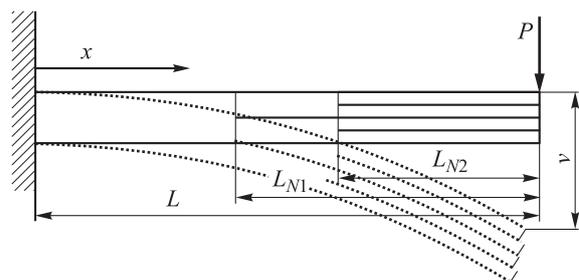


Рис. 3. Модель расслоенной равнопрочной балки

Рациональная координата расслоения также определяется из условия равнопрочности типа (16):

$$\frac{PL}{h^2} = \frac{PL_{N1}}{Nh_{N1}^2} \Rightarrow L_{N1} = \frac{L}{N}.$$

Максимальный прогиб

$$\frac{d\delta_v}{dN} = 0 \Rightarrow \left(1 + \frac{N^2 - 1}{N^3}\right)' = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow N_{opt} = \sqrt{3} \Rightarrow \delta_{vmax} \approx 1,38.$$

Этот результат практически совпадает с полученным из выражения (18) для одного ветвления на три круглые ветки, но такого же вывода о рациональном расслоении на целое число слоев не получается. Для повышения податливости можно использовать последовательное расслоение на два слоя ( $\sqrt{3} \approx 2$ ) на расстояниях, определяемых условием равнопрочности. Не будем повторять приведенные ранее рассуждения о фрактальном нецелом числе расслоений, отметим лишь, что изготовить балку с заданными размерами и длинами расслоений чрезвычайно просто путем введения между слоями полосок тефлоновой пленки. Вопрос предельного состояния по условию роста подобных расслоений оставляем в данном контексте открытым (хотя, разумеется, проблема исчерпания прочности вследствие роста расслоений требует особого исследования).

**Задача Галилея об идеальной форме тяжелой равнопрочной балки** приводит к более сложным выкладкам, чем рассмотренная задача о консольной балке, нагруженной концевой силой. Поскольку теоремы существования для подобных форм нет, Г.П. Черепанов утверждал в работе [11], что любое решение такой задачи «подобно нахождению золотого самородка».

Попытка применить полученные результаты для тяжелой балки констэра или для ветвящихся структур под действием распределенной ветровой нагрузки привела к неожиданному парадоксу. Для ветровой нагрузки или для прогиба

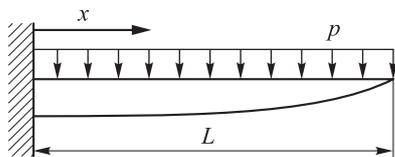


Рис. 4. Схема нагружения тяжелой равнопрочной балки

под действием собственного веса более адекватной моделью, чем нагружение сосредоточенной силой, является распределенное усилие с постоянной интенсивностью  $p$  (рис. 4). При этом изгибающий момент меняется по квадратичному закону, в связи с чем можно ограничиться классом степенных зависимостей (1). Условие равнонапряженности равномерно нагруженной профилированной балки с учетом выражений (1) имеет вид

$$\frac{p(L-x)^2}{w(x)h(x)^2} = \frac{pL^2}{w(0)h(0)^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (1-x^*)^2 = (1-x^*)^{\alpha+2\beta} \Rightarrow \alpha+2\beta=2.$$

Из формул (7) и (20) получаем  $\beta=2$  и  $\alpha=-2$ . Если попробовать рассчитать прогиб такой профилированной балки по формуле (5), то можно увидеть, что интеграл расходится, т. е. при любой силе (любом весе) прогиб обращается в бесконечность. Это означает, что не для всех законов изменения размеров сечения можно ограничиться линейным балочным приближением. Необходим более строгий анализ на основе точного нелинейного уравнения изгиба.

Пояснить ограничения на изменения размеров профилированных балок можно с помо-

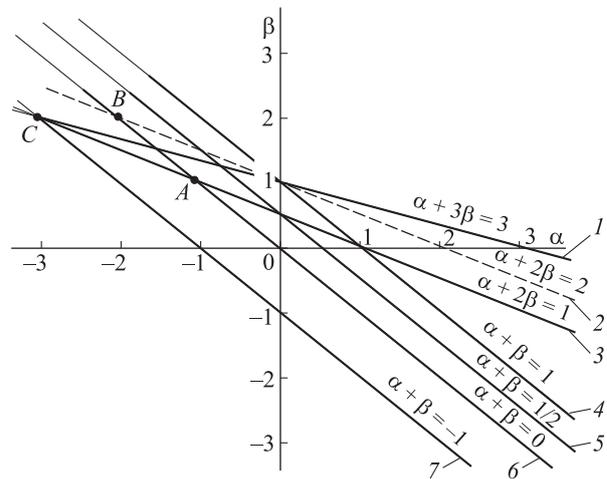


Рис. 5. Прямые в координатах  $\alpha$ - $\beta$ , соответствующие заданной жесткости (1), равнопрочности при распределенной нагрузке (2), равнопрочности под действием концевой силы (3), разным фиксированным массам (4-7), в частности, постоянной площади сечения (6), что соответствует массе прямоугольной балки: точка А — балка констэра, нагруженная силой (см. рис. 1), точка В — балка констэра под распределенной нагрузкой (см. рис. 4); точка С — вершина сектора допустимых проектов — бесконечно тяжелая, но бесконечно податливая балка

щью графиков, приведенных на рис. 5, где прямая 3 соответствует условию равнопрочности (4), а прямая 6 — постоянной площади сечения (7). Из выражения (6) ясно, что прямая 1 ( $\alpha + 3\beta = 3$ ) ограничивает сверху возможные проекты: на ней прогиб обращается в бесконечность, а выше нее — становится отрицательным. Из формулы (9) следует, что точки на каждой из прямых 4–7 соответствуют проектам с одинаковой массой (больше или меньше, чем прямоугольная балка). Пересечение прямых 3 и 6 определяет параметры для идеальной балки констэра. Но на прямой 7 ( $\alpha + \beta = -1$ ) масса обращается в бесконечность, а ниже этой прямой становится отрицательной, что свидетельствует о некорректности постановки задачи в этой области. Таким образом, «сектор» с вершиной в точке С, образованный прямыми 1 и 7, ограничивает область допустимых проектов. Равнопрочная для равномерной нагрузки (прямая 2) балка констэра с параметрами  $\beta = 2$ ,  $\alpha = -2$  (т. В на рис. 5) оказывается вне этого «сектора», и для таких (слишком ажурных) балок необходим уточненный анализ, т. е. использование точного выражения для кривизны через производные от прогиба по выражению  $\kappa = 1/\rho = v''(1+v'^2)^{-3/2}$  и учет изменения плеча силы с ростом прогиба.

Традиционно уравнение изгиба балки записывается с заменой кривизны, равной  $1/\rho$ , на вторую производную от прогиба  $v''$ , в предположениях о малых прогибах и углах поворота:

$$\frac{1}{\rho} \approx v'' \Rightarrow EI(x^*)v'' = -PL(1-x^*). \quad (21)$$

Эти допущения приводят к тому, что при подстановке в выражение (21) переменного по длине момента инерции  $I(x^*) = I(0)(1-x^*)^{\alpha+3\beta}$  с показателями, например,  $\beta = 2$ ,  $\alpha = -2$  или другими, выходящими за «сектор» 1–7 на рис. 5, решение дифференциального уравнения (21) приводит к расходящимся интегралам, хотя форма упругого элемента имеет ясный механический смысл. Удивляет даже не то, что проявились противоречия в линейной постановке задачи изгиба, а то, что этот парадокс для профилированных балок не отмечен в известных учебниках по сопротивлению материалов. Связано это, видимо, с тем, что только с появлением волокнистых композитов возник реальный интерес к равнопрочным (биоподобным крылу бабочки, плавнику рыбы, кроне дерева) балкам

типа констэра. В металлическом варианте подобные профили не изготавливали.

Действительно, если кузнец из раскаленного бруска делает стамеску для конопатки сруба, она получается сильно профилированной, но площадь сечения не остается постоянной, так как металл деформируется при уменьшении толщины бруска в поперечном и продольном направлениях. И только для пултрузионного однонаправленного композита с высокомодульными волокнами уменьшение высоты балки в процессе полимеризации вызывает лишь увеличение ширины с сохранением общей длины балки, площади сечения и числа волокон.

Однако сложность замкнутых аналитических решений не означает отсутствия их практической реализации. Ветвящаяся крона дерева под действием ветра способна на «бесконечный» прогиб, когда ветви расположены вдоль направления ветра, что сильно снижает ветровую нагрузку, и дальнейший прогиб становится невозможным. Это так называемая стратегия гибкости — одна из двух (наряду со стратегией прочности), выбираемых растениями для борьбы с ураганами.

## Выводы

1. Ветвящиеся равнонапряженные композитные структуры столь же эффективны в качестве упругих элементов, как и профилированные балки типа констэра (с постоянной площадью поперечного сечения).

2. Преимущество ветвления перед профилированием балки состоит в сохранении непрерывного прямолинейного армирования, что повышает реализацию изгибной прочности. По сравнению с обычной балкой подобные ветвящиеся конструкции способны увеличить запасенную энергию в 3 раза.

3. Использование стеклопластика в упругих элементах позволяет снизить массу в 15 раз относительно таковой для стального аналога.

4. Ветвящиеся элементы как гасители ударов можно рекомендовать для приемных модулей космических платформ. Их можно сделать непосредственно в космической лаборатории, так как их производство практически не требует затрат энергии, и для изготовления упругих элементов из полимерных композитов, армированных высокопрочными и низкомодульными стеклянными волокнами, достаточно энергии от солнечных батарей.

## Литература

- [1] Cho H.R., Rowlands R.E. Optimizing fiber direction in perforated orthotropic media to reduce stress concentration. *Journal of Composite Materials*, 2009, vol. 43, no. 10, pp. 1177–1198.
- [2] Малахов А.В., Полилов А.Н. Построение траекторий волокон, огибающих отверстие, и их сравнение со структурой древесины в зоне сучка. *Проблемы машиностроения и надежности машин*, 2013, № 4, с. 57–62.
- [3] Malakhov A.V., Polilov A.N. Design of composite structures reinforced curvilinear fibres using FEM. *Composites Part A: Applied Science and Manufacturing*, 2016, vol. 87, pp. 23–28.
- [4] Малахов А.В., Полилов А.Н. Алгоритм построения рациональных траекторий волокон в произвольно нагруженной композитной пластине. *Проблемы машиностроения и надежности машин*, 2017, № 5, с. 71–80.
- [5] Wegst U.G.K., Ashby M.F. The structural efficiency of orthotropic stalks, stems and tubes. *Journal of Material Science*, 2007, vol. 42, pp. 9005–9014.
- [6] Плитов И.С., Полилов А.Н. Рациональные размеры звена бамбука и композитной трубы, подверженной сжатию, изгибу и кручению. *Проблемы машиностроения и надежности машин*, 2015, № 3, с. 58–69.
- [7] Полилов А.Н., Татусь Н.А., Плитов И.С. Оценка влияния разориентации волокон на жесткость и прочность профилированных композитных элементов. *Проблемы машиностроения и надежности машин*, 2013, № 5, с. 58–67.
- [8] Eloy C. *Leonardo's rule, self-similarity and wind-induced stresses in trees*. Available at: <https://arxiv.org/pdf/1105.2591v2.pdf> (accessed 15 December 2017).
- [9] Minamino R., Tateno M. Tree branching: Leonardo da Vinci's rule versus biomechanical models. *Plos one*, April 2014, vol. 9, no. 4, e 9535. Available at: <http://journals.plos.org/plosone/article?id=10.1371/journal.pone.0093535> (accessed 15 December 2017).
- [10] Полилов А.Н., Татусь Н.А. Проектирование разветвляющихся или профилированных композитных элементов по аналогии со структурой кроны дерева. *Проблемы машиностроения и надежности машин*, 2017, № 4, с. 112–117.
- [11] Черепанов Г.П. Равнопрочный тяжелый брус: решение проблемы Галилея. *Физическая мезомеханика*, 2016, т. 19, № 1, с. 84–88.
- [12] Полилов А.Н. *Экспериментальная механика композитов*. Москва, Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2015. 375 с.
- [13] Полилов А.Н. *Этюды по механике композитов*. Москва, Физматлит, 2015. 320 с.
- [14] Полилов А.Н., Татусь Н.А. *Биомеханика прочности волокнистых композитов*. Москва, Физматлит, 2018. 328 с.

## References

- [1] Sho H.R., Rowlands R.E. Optimizing fiber direction in perforated orthotropic media to reduce stress concentration. *Journal of Composite Materials*, 2009, vol. 43, no. 10, pp. 1177–1198.
- [2] Malakhov A.V., Polilov A.N. Construction of trajectories of the fibers which bypass a hole and their comparison with the structure of wood in the vicinity of a knot. *Journal of Machinery Manufacture and Reliability*, 2013, vol. 42, no. 4, pp. 306–311.
- [3] Malakhov A.V., Polilov A.N. Design of composite structures reinforced curvilinear fibres using FEM. *Composites Part A: Applied Science and Manufacturing*, 2016, vol. 87, pp. 23–28.
- [4] Malakhov A.V., Polilov A.N. Design algorithm of rational fiber trajectories in arbitrarily loaded composite plate. *Journal of Machinery Manufacture and Reliability*, 2017, vol. 46, no. 5, pp. 479–487.
- [5] Wegst U.G.K., Ashby M.F. The structural efficiency of orthotropic stalks, stems and tubes. *Journal of Material Science*, 2007, vol. 42, pp. 9005–9014.
- [6] Plitov I.S., Polilov A.N. Rational dimensions of segments of bamboo stems and composite tubes subjected to compression, flexure, and torsion. *Journal of Machinery Manufacture and Reliability*, 2015, vol. 44, no. 3, pp. 239–248.

- [7] Polilov A.N., Tatus N.A., Plitov I.S. Estimating the effect of misorientation of fibers on stiffness and strength of profiled composite elements. *Journal of Machinery Manufacture and Reliability*, 2013, vol. 42, no. 5, pp. 390–397.
- [8] Eloy C. *Leonardo's rule, self-similarity and wind-induced stresses in trees*. Available at: <https://arxiv.org/pdf/1105.2591v2.pdf> (accessed 15 December 2017).
- [9] Minamino R., Tateno M. Tree branching: Leonardo da Vinci's rule versus biomechanical models. *Plos one*, April 2014, vol. 9, no. 4, e 9535. Available at: <http://journals.plos.org/plosone/article?id=10.1371/journal.pone.0093535> (accessed 15 December 2017).
- [10] Polilov A.N., Tatus N.A. Designing branching or shaped composite elements by analogy with the structure of treetops. *Journal of Machinery Manufacture and Reliability*, 2017, vol. 46, no. 4, pp. 385–393.
- [11] Cherepanov G.P. Ravnoprochnyi tiazhelyi brus: reshenie problemy Galileia [EQUISTRONG heavy beam: solving the problem of Galileo Galilei]. *Fizicheskaya mekhanika* [Physical mesomechanics journal]. 2016, vol. 19, no. 1, pp. 84–88.
- [12] Polilov A.N. *Ekspperimental'naya mekhanika kompozitov* [Experimental mechanics of composites]. Moscow, Bauman Press, 2015. 375 p.
- [13] Polilov A.N. *Etiudy po mekhanike kompozitov* [Etudes on mechanics of composites]. Moscow, Fizmatlit publ., 2015. 320 p.
- [14] Polilov A.N., Tatus' N.A. *Biomekhanika prochnosti voloknistykh kompozitov* [Biomechanics of strength of fibrous composites]. Moscow, Fizmatlit publ., 2015. 326 p.

Статья поступила в редакцию 06.02.2018

## Информация об авторах

**ПОЛИЛОВ Александр Николаевич** (Москва) — доктор технических наук, профессор кафедры «Прикладная механика». МГТУ им. Н.Э. Баумана; зав. лабораторией «Безопасность и прочность композитных конструкций». Институт машиноведения им. А.А. Благонравова РАН (101990, Москва, Российская Федерация, Малый Харитоньевский пер., д. 4, e-mail: polilovan@mail.ru).

**ТАТУСЬ Николай Алексеевич** (Москва) — кандидат технических наук, старший научный сотрудник лаборатории «Безопасность и прочность композитных конструкций». Институт машиноведения им. А.А. Благонравова РАН (101990, Москва, Российская Федерация, Малый Харитоньевский пер., д. 4, e-mail: nikalet@mail.ru).

## Information about the authors

**POLILOV Aleksandr Nikolaevich** (Moscow) — Doctor of Science (Eng.), Professor, Department of Applied Mechanics. Bauman Moscow State Technical University; Head of Laboratory of Safety and Strength of Composite Structures. Blagonravov Mechanical Engineering Research Institute of the Russian Academy of Sciences (101990, Moscow, Russian Federation, Malyy Kharitonyevskiy Pereulok, Bldg. 4, e-mail: polilovan@mail.ru).

**TATUS Nikolai Alekseevich** (Moscow) — Candidate of Science (Eng.), Senior Researcher, Laboratory of Safety and Strength of Composite Structures. Blagonravov Mechanical Engineering Research Institute of the Russian Academy of Sciences (101990, Moscow, Russian Federation, Malyy Kharitonyevskiy Pereulok, Bldg. 4, e-mail: nikalet@mail.ru).

### Просьба ссылаться на эту статью следующим образом:

Полилов А.Н., Татусь Н.А. Проектирование равнопрочных профилированных, разветвленных или расслоенных упругих композитных элементов. *Известия высших учебных заведений. Машиностроение*, 2018, № 5, с. 3–12, doi: 10.18698/0536-1044-2018-5-3-12.

### Please cite this article in English as:

Polilov A.N., Tatus N.A. Designing Equistrong Shaped, Branching or Delaminated Elastic Composite Members. *Proceedings of Higher Educational Institutions. Machine Building*, 2018, no. 5, pp. 3–12, doi: 10.18698/0536-1044-2018-5-3-12.