УДК 517.947.44 DOI 10.18698/0536-1044-2017-10-18-24

Корреляционный анализ динамики нелинейной модели конструкции при нестационарных случайных нагрузках методом моментов*

О.Н. Тушев, А.В. Маркианов

МГТУ им. Н.Э. Баумана, 105005, Москва, Российская Федерация, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1

A Correlation Analysis of the Dynamics of a Nonlinear Model of a Structure Under Nonstationary Stochastic Loads by the Method of Moments

O.N. Tushev, A.V. Markianov

BMSTU, 105005, Moscow, Russian Federation, 2nd Baumanskaya St., Bldg. 5, Block 1

e-mail: markianov@gmail.com

Предложено обобщение метода моментов, позволяющее анализировать реакцию линеаризованной модели конструкции на произвольное аддитивное случайное воздействие. При этом не требуется приведения исходной системы уравнений в форме Коши к каноническому виду, в соответствии с которым все внешние воздействия являются белыми шумами. Таким образом, необходимость в использовании формирующих фильтров отпадает, а значит, снимаются какие-либо ограничения на характер внешних нагрузок, включая стационарность. Известные уравнения моментов относительно вектора математических ожиданий и матрицы корреляционных моментов вектора фазовых координат, справедливые только для канонической формы исходного уравнения движения, получаются как частный случай. Фундаментальная матрица статистически линеаризованной системы трактуется как мультипликативный интеграл. Это позволяет построить простой и удобный для численной реализации алгоритм, основанный на рекуррентных формулах. Результаты проиллюстрированы примером.

Ключевые слова: метод моментов, статистическая линеаризация, нестационарные процессы, каноническая форма уравнений, фундаментальная матрица, мультипликативный интеграл

A generalization of the method of moments to analyze the reaction of a linearized model of a structure to arbitrary additive stochastic forcing is proposed. This generalization does not require reducing the initial system of equations in the Cauchy form to a canonical form according to which all external forces are considered as white noise. Thus, there is no need to use forming filters and therefore, there are no limitations on the nature of external loads, including stationarity. The known equations of the method of moments with regard to the mean vector and the matrix of correlation moments of the vector of phase coordinates, true only for the canonical form of the initial equation of movement, become a special case. The

* Работа поддержана грантом РФФИ 17-08-01468-а.

fundamental matrix of statistically linearized system is treated as a multiplicative integral, thus making it possible to build a simple algorithm, convenient for numerical calculation and based on recurrent formulae. The results are illustrated by an example.

Keywords: method of moments, statistical linearization, nonstationary process, canonical form of equations, fundamental matrix, multiplicative integral

Задача определения вероятностных характеристик фазовых координат нелинейной механической системы со многими степенями свободы при нестационарных аддитивных случайных нагрузках представляется достаточно общей. Методы, применяемые для решения подобного класса задач и обладающие достаточно высокой общностью, широко описаны в научной литературе, а их достоинства и недостатки хорошо изучены. Поскольку подробный обзор методов не является целью настоящей статьи, рассмотрим только некоторые подходы, пригодные для анализа нестационарных режимов нелинейных систем.

По-видимому, наиболее универсальным можно считать метод Монте-Карло [1, 2], возможности которого не ограничиваются характером исследуемых случайных процессов. При этом существенной проблемой является моделирование реализации нестационарных случайных воздействий, помимо высоких требований к вычислительной мощности компьютера, которые в данной постановке, как правило, становятся еще более жесткими.

Известный подход основан на использовании свойств марковских процессов, имеющих полное вероятностное описание в форме уравнений Фоккера–Планка–Колмогорова [3, 4]. Поскольку многие реальные процессы можно трактовать как векторные марковские, такой подход представляется общим. Но сложности его применения в реальных задачах весьма велики даже для сравнительно низкой размерности исходных уравнений движения. Это касается и системы обыкновенных дифференциальных уравнений относительно моментов или кумулянтов фазовых координат, получаемых трансформацией уравнения Фоккера–Планка–Колмогорова.

Кроме того, внешние воздействия в уравнениях движения должны быть белыми шумами. Следовательно, исходную систему уравнений движения необходимо дополнить уравнениями формирующих фильтров, преобразующих белые шумы в реальные случайные процессы, т. е. перейти к так называемой канонической форме уравнений. Как известно, для нестационарных процессов вывод уравнений формирующих фильтров представляет собой сложную самостоятельную задачу, решение которой осуществляется достаточно просто только для стационарных процессов с дробно-рациональными спектрами.

Эффективным инженерным подходом в рамках корреляционной теории является метод статистической линеаризации [5], который можно использовать для существенно нелинейных многомерных систем при стационарных и нестационарных режимах работы. Единственное допущение при этом заключается в близости законов распределения на входах нелинейностей к нормальному.

К линеаризованным уравнениям применимы известные методы анализа линейных систем. В работах [6, 7] решена задача корреляционного анализа на основе линеаризованных уравнений с использованием фундаментальных матриц для произвольных внешних воздействий и переменных во времени параметрах системы. При этом алгоритм, реализующий такой подход, оказывается весьма громоздким для многомерных моделей реальных конструкций. Следует отметить, что чаще всего применение статистической линеаризации в целом для системы вполне правомерно вследствие свойства нормализации негауссовых процессов инерционными системами. Тем не менее законы распределения отдельных динамических характеристик (чаще всего ускорений) могут иметь сильные отклонения от нормальности, т. е. их нельзя удовлетворительно описать в рамках корреляционной теории.

В статье [8] показано, как этот недостаток можно исправить, рассматривая решение, полученное на основе статистически линеаризованного уравнения в качестве первого этапа. Линеаризованное уравнение, записанное в канонической нормальной форме Коши, позволяет создать систему разрешающих уравнений относительно вектора математических ожиданий и матрицы корреляционных моментов фазовых координат. Последующие достаточно простые преобразования дают возможность построить одномерные плотности вероятности динамических характеристик с сильным отклонением от нормальности.

Как уже отмечалось, приведение уравнений движения к канонической форме существенно сужает класс внешних воздействий до стационарных или квазистационарных процессов.

Цель работы — изложение результатов, позволяющих обобщить метод моментов и использовать в качестве внешних воздействий любые случайные процессы (которые можно описать в рамках корреляционной теории), тем самым исключая необходимость применения формирующих фильтров.

Будем считать, что движение модели конструкции описывается следующим уравнением

$$\dot{\mathbf{Y}} = \mathbf{\Phi}(\mathbf{Y}, t) + \mathbf{G}(t), \quad \mathbf{Y}(t_0) = \mathbf{Y}_0, \tag{1}$$

где $\mathbf{Y} = (y_1, y_2, ..., y_n)^{\mathrm{T}}$ — вектор фазовых координат; $\mathbf{\Phi}(\mathbf{Y}, t)$ — нелинейная вектор-функция, $\mathbf{\Phi}(\mathbf{Y}, t) = (\varphi_1(\mathbf{Y}, t), \varphi_2(\mathbf{Y}, t), ..., \varphi_n(\mathbf{Y}, t))^{\mathrm{T}}$; $\mathbf{G}(t)$ — случайный вектор внешних воздействий, для которого заданы вектор математических ожиданий $\mathbf{M}_G(t)$ и матрица корреляционных функций $\mathbf{K}_G(t, t')$, $\mathbf{G}(t) = (g_1(t), g_2(t), ..., g_n(t))^{\mathrm{T}}$; $\mathbf{Y}_0$ — случайный начальный вектор с математическим ожиданием $\mathbf{M}_{Y_0}$ и корреляционной матрицей $\mathbf{K}_{Y_0}$.

В результате статистической линеаризации получим

$$\mathbf{\Phi}(\mathbf{Y}, t) = \mathbf{\Phi}_0(\mathbf{M}_Y, \mathbf{K}_Y, t) + \mathbf{R}(\mathbf{M}_Y, \mathbf{K}_Y, t)\mathbf{Y}^0, \tag{2}$$

где $\mathbf{\Phi}_0(\mathbf{M}_Y, \mathbf{K}_Y, t)$ — вектор коэффициентов по математическому ожиданию; $\mathbf{R}(\mathbf{M}_Y, \mathbf{K}_Y, t)$ — матрица коэффициентов по центрированной составляющей; $\mathbf{Y}^0$ — отклонение от случайного начального вектора.

Подстановка выражения (2) в формулу (1), осреднение и центрирование приводят к следующей системе уравнений:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{M}}_Y = \mathbf{\Phi}_0(\mathbf{M}_Y, \mathbf{K}_Y, t) + \mathbf{M}_G(t), \quad \mathbf{M}_Y(t_0) = \mathbf{M}_{Y_0}; & (3) \\ \dot{\mathbf{Y}}^0 = \mathbf{R}(\mathbf{M}_Y, \mathbf{K}_Y, t)\mathbf{Y}^0 + \mathbf{G}^0(t), \quad \mathbf{Y}^0(t_0) = \mathbf{Y}_0^0, & (4) \end{cases}$$

где $\mathbf{G}^0(t)$ — случайный вектор внешних воздействий линеаризованной системы; $\mathbf{Y}_0^0$ — начальное положение модели.

Вектор математических ожиданий $\mathbf{M}_Y(t)$ вектора $\mathbf{Y}$ вычисляется с помощью формулы (3). Целью дальнейших преобразований является получение уравнения относительно матрицы корреляционных моментов из выражения (4). По определению

$$\mathbf{K}_Y(t) = \mathbf{M}[\mathbf{Y}^0(t)\mathbf{Y}^{0\mathrm{T}}(t)]. \tag{5}$$

При выводе будем придерживаться схемы, используемой в работе [4] до тех пор, пока это не противоречит сделанному обобщению. После дифференцирования соотношения (5) имеем

$$\dot{\mathbf{K}}_Y(t) = \mathbf{M}\left[\dot{\mathbf{Y}}^0\mathbf{Y}^{0\mathrm{T}} + \mathbf{Y}^0\dot{\mathbf{Y}}^{0\mathrm{T}}\right]. \tag{6}$$

Подставим в формулу (6) выражения $\dot{\mathbf{Y}}^0$ и $\dot{\mathbf{Y}}^{0\mathrm{T}}$. Тогда, опустив аргументы после простых преобразований, получим

$$\dot{\mathbf{K}}_Y = \mathbf{R}\mathbf{K}_Y + \mathbf{K}_Y\mathbf{R}^{\mathrm{T}} + \mathbf{K}_{GY} + \mathbf{K}_{YG}, \tag{7}$$

где

$$\mathbf{K}_{GY} = \mathbf{M}\left[\mathbf{G}^0\mathbf{Y}^{0\mathrm{T}}\right]; \tag{8}$$

$$\mathbf{K}_{YG} = \mathbf{M}\left[\mathbf{Y}^0\mathbf{G}^{0\mathrm{T}}\right]; \tag{9}$$

$$\mathbf{K}_Y(t_0) = \mathbf{K}_{Y_0}.$$

Запишем решение уравнения (4) в следующем виде:

$$\mathbf{Y}^0(t) = \mathbf{\Omega}_{t_0}^t(\mathbf{R})\int_{t_0}^{t}[\mathbf{\Omega}_{t_0}^{\tau}(\mathbf{R})]^{-1}\mathbf{G}^0(\tau)d\tau, \tag{10}$$

где $\mathbf{\Omega}_{t_0}^t(\mathbf{R})$, $\mathbf{\Omega}_{t_0}^{\tau}(\mathbf{R})$ — фундаментальные матрицы, определенные на отрезках $[t_0, t]$, $[t_0, \tau]$ соответственно. Умножив правую часть равенства (10) на $\mathbf{G}^{0^{\mathrm{T}}}(t)$ и взяв математическое ожидание в соответствии с формулой (9), получим

$$\mathbf{K}_{YG} = \mathbf{\Omega}_{t_0}^t(\mathbf{R})\int_{t_0}^{t}[\mathbf{\Omega}_{t_0}^{\tau}(\mathbf{R})]^{-1}\mathbf{K}_G(\tau, t)d\tau. \tag{11}$$

После аналогичных операций, включая транспонирование соотношения (10), выражение для матрицы (8) принимает вид

$$\mathbf{K}_{GY} = \int_{t_0}^{t}\mathbf{K}_G(t, \tau)[\mathbf{\Omega}_{t_0}^{\tau}(\mathbf{R})]^{-1^{\mathrm{T}}}d\tau[\mathbf{\Omega}_{t_0}^t(\mathbf{R})]^{\mathrm{T}}. \tag{12}$$

Рассмотрим частный случай, соответствующий классическому варианту метода моментов [5], когда вектор $\mathbf{G}^0(t)$ представляет собой стационарный белый шум с матрицей корреляционных функций

$$\mathbf{K}_G(t - t') = \mathbf{H}\delta(t - t'), \tag{13}$$

где $\mathbf{H}$ — матрица интенсивностей; $\delta(t - t')$ — дельта-функция.

Подстановка выражения (13) в соотношения (11), (12) с использованием свойств дельта-функции радикально упрощает их:

$$\mathbf{K}_{GY} = \mathbf{K}_{YG} = 0{,}5\mathbf{H}. \qquad (14)$$

На основании равенства (14) уравнение (7) преобразуется к виду [5]

$$\dot{\mathbf{K}}_Y = \mathbf{R}\mathbf{K}_Y + \mathbf{K}_Y\mathbf{R}^{\mathrm{T}} + \mathbf{H}, \quad \mathbf{K}_Y(t_0) = \mathbf{K}_{Y_0}. \qquad (15)$$

Совместное интегрирование выражений (3) и (15) не представляет принципиальных трудностей. Стационарное решение при условии, что коэффициенты этих уравнений не зависят от времени и $\mathbf{M}_G(t) = \mathbf{M}_G = \mathrm{const}$, находится из системы трансцендентных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} \mathbf{\Phi}_0(\mathbf{M}_Y, \mathbf{K}_Y) + \mathbf{M}_G = 0; \\ \mathbf{R}(\mathbf{M}_Y, \mathbf{K}_Y)\mathbf{K}_Y + \mathbf{K}_Y\mathbf{R}^{\mathrm{T}}(\mathbf{M}_Y, \mathbf{K}_Y) + \mathbf{H} = 0, \end{cases}$$

которую решают методом итерации.

Заметим, что при условии стационарности внешнего воздействия такой путь решения является предпочтительным, так как приведение исходной системы уравнений к каноническому виду в этом случае не представляет существенных сложностей. Если оно не стационарное общего вида, то необходимо построить схему вычисления прямой и обратной фундаментальных матриц, входящих в правые части выражений (11) и (12). Для этого воспользуемся подходом, изложенным в работах [9–11] и позволяющим представить фундаментальную матрицу в виде мультипликативного интеграла, что очень удобно для численной реализации.

Кратко рассмотрим построение алгоритма. Докажем, что для линейной системы (матрица $\mathbf{R}$ зависит только от времени) прямая и обратная фундаментальные матрицы представляются в форме абсолютно и равномерно сходящихся интегростепенных рядов, если элементы матрицы $\mathbf{R}$ ограничены и имеют конечное число разрывов на участке интегрирования:

$$\mathbf{\Omega}_{t_0}^{t}(\mathbf{R}) = \mathbf{E} + \int_{t_0}^{t}\mathbf{R}(\tau_1)d\tau_1 + \int_{t_0}^{t}\mathbf{R}(\tau_2)\int_{t_0}^{\tau_2}\mathbf{R}(\tau_1)d\tau_1 d\tau_2 + \ldots;$$

$$[\mathbf{\Omega}_{t_0}^{t}(\mathbf{R})]^{-1} = \mathbf{E} - \int_{t_0}^{t}\mathbf{R}(\tau_1)d\tau_1 +$$

$$+ \int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{\tau_2}\mathbf{R}(\tau_1)\mathbf{R}(\tau_2)d\tau_1 d\tau_2 - \ldots,$$

где $\mathbf{E}$ — единичная матрица.

При $\mathbf{R}(t) = \mathbf{R} = \mathrm{const}$ эти соотношения определяют матричные экспоненты:

$$\begin{cases} \exp[\mathbf{R}(t-t_0)] = \mathbf{E} + \mathbf{R}(t-t_0) + \dfrac{1}{2}\mathbf{R}^2(t-t_0)^2 + \ldots; \\ \exp[-\mathbf{R}(t-t_0)] = \mathbf{E} - \mathbf{R}(t-t_0) + \dfrac{1}{2}\mathbf{R}^2(t-t_0)^2 - \ldots. \end{cases} \qquad (16)$$

Построим рекуррентные формулы связи значений фундаментальных матриц в точках t и $t+\Delta t$ (Δt — малый шаг по времени) на основании известных свойств этих матриц:

$$\begin{cases} \mathbf{\Omega}_{t_0}^{t+\Delta t}(\mathbf{R}) = \mathbf{\Omega}_{t}^{t+\Delta t}(\mathbf{R})\mathbf{\Omega}_{t_0}^{t}(\mathbf{R}); \\ [\mathbf{\Omega}_{t_0}^{t+\Delta t}(\mathbf{R})]^{-1} = [\mathbf{\Omega}_{t_0}^{t}(\mathbf{R})]^{-1}[\mathbf{\Omega}_{t}^{t+\Delta t}(\mathbf{R})]^{-1}. \end{cases} \qquad (17)$$

Будем считать, что вследствие малости Δt матрица $\mathbf{R}$ в интервале $(t, t+\Delta t)$ постоянна и равна $\mathbf{R}(t)$. Тогда по аналогии с соотношениями (16) можно записать

$$\begin{cases} \mathbf{\Omega}_{t_0}^{t+\Delta t}(\mathbf{R}) = \mathbf{E} + \mathbf{R}(t)\Delta t + \dfrac{1}{2}\mathbf{R}^2(t)\Delta t^2 + \ldots; \\ \left[\mathbf{\Omega}_{t_0}^{t+\Delta t}(\mathbf{R})\right]^{-1} = \mathbf{E} - \mathbf{R}(t)\Delta t + \dfrac{1}{2}\mathbf{R}^2(t)\Delta t^2 - \ldots. \end{cases} \qquad (18)$$

В первом приближении в разложениях (18) можно ограничиться только линейными членами. Тогда формулы (17) преобразуются к виду, удобному для численной реализации. Такое представление фундаментальной матрицы называется мультипликативным интегралом:

$$\begin{cases} \mathbf{\Omega}_{t_0}^{t+\Delta t}(\mathbf{R}) = \left(\mathbf{E} + \mathbf{R}(t)\Delta t\right)\mathbf{\Omega}_{t_0}^{t}(\mathbf{R}), \\ \left[\mathbf{\Omega}_{t_0}^{t+\Delta t}(\mathbf{R})\right]^{-1} = [\mathbf{\Omega}_{t_0}^{t}(\mathbf{R})]^{-1}\left(\mathbf{E} - \mathbf{R}(t)\Delta t\right). \end{cases} \qquad (19)$$

Несложно показать, что рекуррентные формулы (19) полностью идентичны методу интегрирования первого порядка (методу Эйлера). Для уточнения решения можно учесть в выражениях (18) квадратические члены или построить, например, метод Эйлера–Коши второго порядка, взяв средние значения на двух соседних шагах. Понятно, что полученные расчетные формулы остаются без изменения, если матрица $\mathbf{R}$ зависит от $\mathbf{M}_Y(t)$ и $\mathbf{K}_Y(t)$. Для практической реализации метода важным обстоятельством является численная неустойчивость при прямом расчете по соотношениям (11) и (12), которую не удается преодолеть простым увеличением точности.

Представленные ниже рекуррентные формулы, выведенные на основе выражений (11) и (12), лишены этого недостатка и существенно проще для расчета. Свяжем значения $\mathbf{K}_{YG}$ и

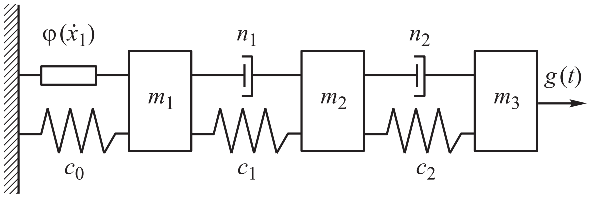

Рис. 1. Динамическая модель системы: $\varphi(\dot{x}_1)$ — нелинейная функция; c_0, c_1, c_2 — жесткости соответствующих пружин; n_1, n_2 — коэффициенты демпфирования; $g(t)$ — корреляционная функция

$\mathbf{K}_{GY}$ в моменты времени t и $t+\Delta t$. Тогда в результате несложных преобразований с точностью до первого порядка малости получим

$$\mathbf{K}_{YG}(t+\Delta t)=\mathbf{K}_{YG}(t)+$$
$$+\left[\mathbf{R}(t)\mathbf{K}_{YG}(t)+\mathbf{K}_{G}(t,t+\Delta t)\right]\Delta t;$$
$$\mathbf{K}_{GY}(t+\Delta t)=\mathbf{K}_{GY}(t)+$$
$$+\left[\mathbf{K}_{GY}(t)\mathbf{R}^{\mathrm{T}}(t)+\mathbf{K}_{G}(t,t+\Delta t)\right]\Delta t.$$

В качестве примера рассмотрим объект (рис. 1), представляющий собой систему из трех масс m_1, m_2 и m_3, связанных с неподвижным основанием линейной пружиной и нелинейным демпфером с характеристикой $\mathbf{R}(\dot{x}_1)=h\,\mathrm{sign}\,\dot{x}_1$, где $\dot{x}_1$ — нелинейная скоростная характеристика; h — линейная упругая характеристика.

Для проверки достоверности предложенного подхода использовался «дефект» любого формирующего фильтра, который также является динамической системой. Уравнение фильтра, интегрируемое совместно с уравнением движения объекта, обеспечивает заданный стационарный процесс только после того, как в нем затухнет собственный переходной процесс. Таким образом, если начальные точки интегрирования основного уравнения и фильтра совпадают, то внешнее воздействие на объект является нестационарным на начальном этапе движения. Этот очевидный факт удобно использовать для проверки работоспособности предложенного подхода при нестационарном воздействии.

Внешнее воздействие в первом варианте решения задавалось стационарным с математическим ожиданием $m_g=0$ и корреляционной функцией

$$k_g(t-t')=D_g\exp(-a|\tau|),$$

где D_g — дисперсия; a — угловая скорость; $\tau=t-t'$.

Уравнение формирующего фильтра, реализующее этот процесс, имеет вид [9]

$$\dot{g}^0+ag^0=\sqrt{2D_g a}\,V^0(t),\ g^0(t_0)=0, \qquad (20)$$

где g^0 — корреляционная функция в начальный момент времени; $V^0(t)$ — единичный белый шум с корреляционной функцией $k_g(t-t')=\delta(t-t')$.

Аналитическое решение уравнения (20) позволяет получить корреляционную функцию $g(t)$ с учетом переходного процесса

$$k_g(t,\,t')=$$
$$=D_g\left[\exp(-a|t-t'|)-\exp(-a(t+t'))\right]. \qquad (21)$$

Для вычисления были выбраны следующие значения параметров: $m_1=10$ кг; $m_2=7$ кг, $m_3=5$ кг; $c_0=c_1=10^4$ Н/м, $c_2=3\cdot10^3$ Н/м; $n_1=500$ Н·с/м, $n_2=600$ Н·с/м; $D_g=277{,}8$ Н^2; $a=4{,}6$ с$^{-1}$; $h=5$ Н·с/м.

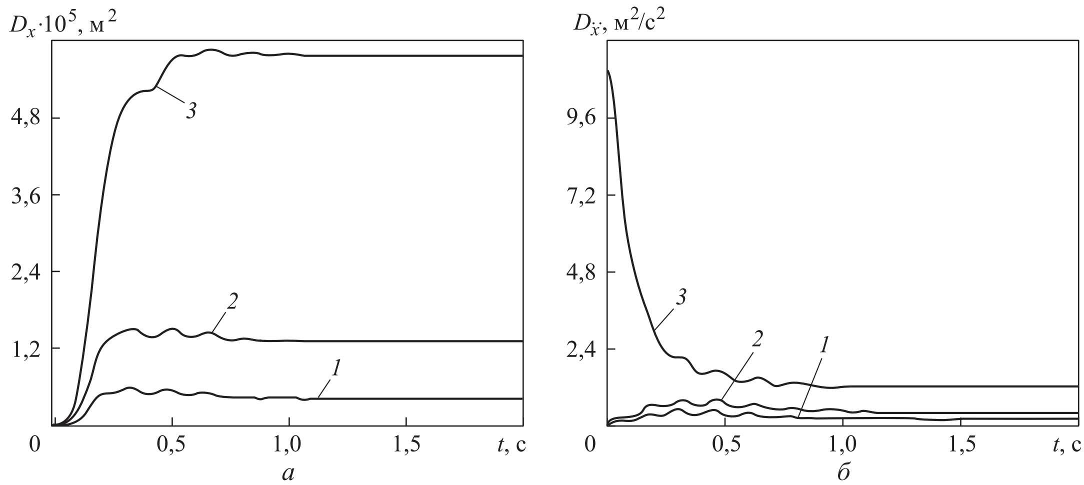

Рис. 2. Дисперсии перемещений D_x (*а*) и ускорений $D_{\ddot{x}}$ (*б*) масс m_1 (*1*), m_2 (*2*) и m_3 (*3*) во времени t

Расчет проводили двумя способами:

1) выражение формирующего фильтра (20) добавляли к исходной системе уравнений и применяли традиционную схему решения интегрированием уравнения (15);

2) уравнение движения к каноническому виду не приводили, внешнее воздействие задавали в виде выражения (21) и использовали предложенный подход.

Результаты расчета двумя способами практически совпали. Некоторое различие в четвертом знаке объясняется разницей вычислительных процедур. На рис. 2 приведены дисперсии перемещений и ускорений масс во времени.

Выводы

1. Предложенный обобщенный метод моментов позволяет анализировать реакцию линеаризованной модели конструкции на произвольное аддитивное случайное воздействие, тем самым исключая необходимость применения формирующих фильтров.

2. Разработанный алгоритм обеспечивает такой же порядок точности вычисления вероятностных характеристик, как и метод моментов, позволяя при этом решать задачи с нестационарными случайными воздействиями.

Литература

[1] Михайлов Г.А., Войтишес А.В. *Численное стохастическое моделирование. Метод Монте-Карло*. Москва, Академия, 2006. 246 с.

[2] Naess A., Moan T. *Stochastic Dynamics of Marine Structures*. New York, Cambridge University Press publ., 2012. 422 p.

[3] Lindgren G., Rootzen H., Sandsten M. *Stationary Stochastic Processes for Scientists and Engineers*. Hoboken, CRC Press, 2013. 316 p.

[4] Светлицкий В.А. *Стохастическая механика и теория надежности*. Москва, Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2002. 503 с.

[5] Казаков И.Е. *Статистическая теория систем управления в пространстве состояний*. Москва, Наука, 1975. 432 с.

[6] Tushev O.N. Dynamic of «shock proof object — shock absorber» system under combined action of additive and multiplicative random shock lood. *E-journal Dynamic strength and wear-resistance of machines*, 2000, no. 7, pp. 13–17.

[7] Светлицкий В.А., Тушев О.Н., Зайцев С.Э. Анализ динамического поведения нелинейной механической системы при случайных аддитивных нестационарных нагрузках. *Проблемы надежности машин и конструкций. Тр. Междунар. конф.*, Минск, Беларусь, 24–26 сентября 2002 г., Минск, Изд-во «Современные тетради», 2003, с. 168–173.

[8] Тушев О.Н., Донских А.М. Стохастический анализ динамики нелинейной модели конструкции при существенном отличии законов распределения от нормального. *Проблемы машиностроения и надежности машин*, 2014, № 6, с. 17–22.

[9] Гантмахер Ф.Р. *Теория матриц*. Москва, Физматлит, 2010. 560 с.

[10] Игумнов Л.А., Литвинчук С.Ю., Пазин В.П., Петров А.Н. Численно-аналитическое построение матриц Грина трехмерных теорий упругости или электроупругости. *Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского*, 2010, № 3–1, с. 134–140.

[11] Аленин В.А., Куляс О.Л. Способы повышения качества оценки фундаментальной матрицы. *Вестник Московского государственного областного университета. Сер. Физика-математика*, 2011, № 3, с. 106–116.

References

[1] Mikhailov G.A., Voitishes A.V. *Chislennoe stokhasticheskoe modelirovanie. Metod Monte-Karlo* [Numerical stochastic modeling. Monte-Carlo]. Moscow, Akademiia publ., 2006. 246 p.

[2] Naess A., Moan T. *Stochastic Dynamics of Marine Structures*. New York, Cambridge University Press publ., 2012. 422 p.

[3] Lindgren G., Rootzen H., Sandsten M. *Stationary Stochastic Processes for Scientists and Engineers*. Hoboken, CRC Press, 2013. 316 p.

[4] Svetlitskii V.A. *Stokhasticheskaia mekhanika i teoriia nadezhnosti* [Stochastic mechanics and reliability theory]. Moscow, Bauman Press, 2002. 503 p.

[5] Kazakov I.E. *Statisticheskaia teoriia sistem uravneniia v prostranstve sostoianii* [Statistical theory of systems of equations in state space]. Moscow, Nauka publ., 1975. 432 p.

[6] Tushev O.N. Dynamic of «shock proof object — shock absorber» system under combined action of additive and multiplicative random shock lood. *E-journal Dynamic strength and wear-resistance of machines*, 2000, no. 7, pp. 13–17.

[7] Svetlitskii V.A., Tushev O.N., Zaitsev S.E. Analiz dinamicheskogo povedeniia nelineinoi mekhanicheskoi sistemy pri sluchainykh additivnykh nestatsionarnykh nagruzkakh [Analysis of the dynamic behavior of nonlinear mechanical systems under random additive nonstationary loads]. *Trudy mezhdunarodnoi konferentsii «Problemy nadezhnosti mashin i konstruktsii»* [Proceedings of the international conference «Problems of reliability of machines and structures»]. 24–26 September 2002, Minsk, Sovremennye tetradi publ., 2003, Minsk, 2003, pp. 168–173.

[8] Tushev O.N., Donskikh A.M. Stochastic analysis of the dynamics of a nonlinear structure model at substantially nonnormal distribution laws. *Journal of Machinery Manufacture and Reliability*, 2014, vol. 43, no. 6, pp. 465–469.

[9] Gantmakher F.R. *Teoriia matrits* [The theory of matrices]. Moscow, Fizmatlit publ., 2010. 560 p.

[10] Igumnov L.A., Litvinchuk S.Iu., Pazin V.P., Petrov A.N. Chislenno-analiticheskoe postroenie matrits Grina trekhmernykh teorii uprugosti ili elektrouprugosti [The numerical-analytical construction of greens matrices of 3-D elasticity and electro-elasticity theories]. *Vestnik Nizhegorodskogo Universiteta im. N.I. Lobachevskogo* [Vestnik of Lobachevsky University of Nizhni Novgorod]. 2010, no. 3–1, pp. 134–140.

[11] Alenin V.A., Kulias O.L. Sposoby povysheniia kachestva otsenki fundamental'noi matritsy [Methods of improve the quality estimates of fundamental matrix]. *Vestnik Moskovskogo Gosudarstvennogo Oblastnogo Universiteta. Seriia Fizika–matematika* [Bulletin MSRU series Physics and mathematics]. 2011, no. 3, pp. 106–116.

Статья поступила в редакцию 23.05.2017

Информация об авторах

ТУШЕВ Олег Николаевич (Москва) — доктор технических наук, профессор, зав. кафедрой «Аэрокосмические системы». МГТУ им. Н.Э. Баумана (105005, Москва, Российская Федерация, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1).

МАРКИАНОВ Андрей Владимирович (Москва) — аспирант кафедры «Аэрокосмические системы». МГТУ им. Н.Э. Баумана (105005, Москва, Российская Федерация, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1, e-mail: markianov@gmail.com).

Information about the authors

TUSHEV Oleg Nikolaevich (Moscow) — Doctor of Science (Eng.), Professor, Head of Aerospace Systems Department. Bauman Moscow State Technical University (105005, Moscow, Russian Federation, 2nd Baumanskaya St., Bldg. 5, Block 1).

MARKIANOV Andrey Vladimirovich (Moscow) — Post-graduate, Aerospace Systems Department. Bauman Moscow State Technical University (105005, Moscow, Russian Federation, 2nd Baumanskaya St., Bldg. 5, Block 1, e-mail: markianov@gmail.com).