

УДК 539.3

DOI 10.18698/0536-1044-2017-3-12-21

Распространение кинетической аналогии Кирхгофа на цилиндрические пружины, несущие распределенные нагрузки

Ф.Д. Сорокин¹, Р.Н. Бадиков², Чжоу Су¹

¹ МГТУ им. Н.Э. Баумана, 105005, Москва, Российская Федерация, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1

² СиТиЭс Интернашенл, 10115, Эверетт, штат Вашингтон, США, Холли Драйв

Extension of Kirchhoff's Kinetic Analogy to Cylindrical Springs Carrying Distributed Loads

F.D. Sorokin¹, R.N. Badikov², Zhou Su¹

¹ BMSTU, 105005, Moscow, Russian Federation, 2nd Baumanskaya St., Bldg. 5, Block 1

² CTS International, 10115, Everett, Washington, USA, Holly Dr.



e-mail: sorokin_fd@mail.ru, ruslan.badikov@gmail.com, szleon602@gmail.com



Использование винтовых цилиндрических пружин в качестве гибких связей, шнеков и инструментов для измельчения и просеивания различных материалов приводит к сложным геометрически нелинейным краевым задачам механики гибких стержней. Решить такие задачи в общем случае можно только численными методами, которые вносят в получаемые результаты трудно контролируемые погрешности. В статье предложен способ оценки указанных погрешностей с помощью закона сохранения, основанного на модификации кинетической аналогии Кирхгофа. Тожественное соотношение, следующее из аналогии уравнений движения твердого тела с одной неподвижной точкой и уравнений больших перемещений гибких стержней, распространяется на случай винтовых цилиндрических пружин, несущих распределенные нагрузки. Учет распределенных нагрузок существенно расширяет область применения кинетической аналогии Кирхгофа. Показано, что разработанная модификация является следствием уравнений равновесия и соотношений упругости пружины. Целесообразность использования предложенного соотношения для контроля численного расчета больших перемещений пружин, несущих распределенные нагрузки, продемонстрирована на примере.

Ключевые слова: винтовая цилиндрическая пружина, большие перемещения, нелинейная краевая задача, кинетическая аналогия Кирхгофа, закон сохранения.



The use of cylindrical spiral springs as flexible connectors, screws and tools for milling and sifting different materials leads to complex geometric non-linear boundary value problems in mechanics of flexible rods. In general, such problems can only be solved by numerical methods, which make the results subject to errors that are difficult to control. This paper proposes a method of estimating these errors by using the conservation law, based on a modification of Kirchhoff's kinetic analogy. The identical relation, following the analogy of the equations for rigid body motion with one fixed point and the equations of large displacements in flexible rods, applies to the case of helical cylindrical springs carrying distributed loads. Accounting for the distributed loads significantly expands the range of application of Kirchhoff's kinetic analogy. It is shown that the proposed modification results from the equilibrium equations and the ratio of elasticity of the spring. The feasibility of using the

proposed methodology for controlling numerical calculation of large displacements of the springs carrying the distributed load is demonstrated by an example.

Keywords: helical cylindrical spring, large displacement, nonlinear boundary value problem, Kirchhoff's kinetic analogy, conservation law.

Винтовые цилиндрические пружины можно использовать не только как упругие элементы, но и в качестве гибких связей, шнеков и инструментов для измельчения и просеивания различных материалов. Такое нетрадиционное применение пружин приводит к необходимости решения нелинейных краевых задач механики гибких стержней, перемещения и размеры которых сопоставимы. Некоторые методы решения таких задач сводятся к суммированию малых приращений, что может вызвать накопление ошибок (метод последовательных нагружений в статике, численное интегрирование по времени в динамике).

Цель работы — разработка средства контроля численного решения нелинейной краевой задачи для цилиндрической пружины, нагруженной не только по краям, но и распределенной нагрузкой. При этом последняя может быть вызвана любыми причинами: взаимодействием пружины с обрабатываемой средой или с внешним потоком, вибрациями, вращением, движением с ускорением и т. п.

В середине XIX века Густав Кирхгоф обратил внимание на то, что задача о движении твердого тела с одной неподвижной точкой и задача о больших перемещениях гибкого стержня приводят к одинаковым системам дифференциальных уравнений. Поскольку уравнения совершенно идентичны (с точностью до обозначений), их решения также должны быть одинаковыми. Эта теорема получила название «кинетическая аналогия Кирхгофа» [1] и достаточно часто применяется в аналитических и численных исследованиях [2–7].

Согласно аналогии Кирхгофа, закон сохранения механической энергии для вращающегося твердого тела может быть преобразован в следующее тождество из механики гибких стержней:

$$\frac{M_1^2}{2A_{11}} + \frac{M_2^2}{2A_{22}} + \frac{M_3^2}{2A_{33}} + Q_1 = \text{const}, \quad (1)$$

где M_1 — крутящий момент; A_{11} — жесткость сечения на кручение; M_2 , M_3 — изгибающие моменты; A_{22} , A_{33} — жесткости сечения на изгиб; Q_1 — осевая сила (здесь и далее обозначение

и терминология соответствуют или близки к используемым в работе [8]).

Сумма первых трех слагаемых в выражении (1) является аналогом кинетической энергии вращения твердого тела, слагаемое Q_1 — аналогом потенциальной энергии. Формула (1) справедлива для прямолинейного в исходном состоянии стержня постоянного сечения, который изгибается и закручивается силами и моментами, приложенными по краям стержня. Распределенные нагрузки в соотношении (1) не предусмотрены.

На стержни, имеющие кривизну и/или кручение в начальном состоянии, к которым относится и цилиндрическая пружина, кинетическая аналогия Кирхгофа была распространена Джозефом Лармором в 1884 г. ([1, с. 417]). Полученный им закон сохранения в обозначениях книги [8] имеет вид

$$\frac{M_1^2}{2A_{11}} + \frac{M_2^2}{2A_{22}} + \frac{M_3^2}{2A_{33}} + \alpha_{10}M_1 + \alpha_{20}M_2 + \alpha_{30}M_3 + Q_1 = \text{const}, \quad (2)$$

где α_{10} , α_{20} , α_{30} — проекции вектора кривизны недеформированного стержня на главные оси сечения.

Все коэффициенты в этом выражении (2) должны быть неизменными. Постоянство величин α_{10} , α_{20} , α_{30} означает, что тождество (2) применимо для стержня, выполненного:

- прямолинейным (в том числе естественно закрученным);
- с осью, имеющей форму дуги окружности;
- в виде винтовой цилиндрической пружины.

Как указано в работе [1], и в этом случае ($\alpha_{10} = \text{const}$) для гибкого стержня может быть подобран аналог из динамики (система из двух соединенных друг с другом вращающихся твердых тел). При этом сохранять за соотношением (2) название «аналогия Кирхгофа» не совсем логично, так как последняя становится довольно запутанной и не такой информативной, как в случае, описываемом выражением (1). Фактически соотношение (2) является интегралом системы дифференциальных уравнений боль-

ших перемещений гибкого стержня и имеет самостоятельное значение, поэтому авторы статьи предлагают закрепить за ним название «интеграл Кирхгофа–Лармора».

Нагрузки в виде сил и моментов, соответствующие выражению (2), должны быть приложены только по краям стержня, как и в случае, определяемом соотношением (1). Распределенные нагрузки интегралом Кирхгофа–Лармора не предусмотрены.

Модификация интеграла Кирхгофа–Лармора (учет распределенных нагрузок). По теме расчета больших перемещений винтовых цилиндрических пружин за последние два десятилетия вышло множество работ, но тождество (2) в них практически не встречается, можно сказать, что его незаслуженно забыли (при этом кинетическая аналогия Кирхгофа в исходной формулировке и тождество (1) упоминаются не так уж редко).

По мнению авторов, одной из причин недостаточной популярности интеграла Кирхгофа–Лармора в форме (2) является довольно ограниченный набор возможных нагрузок: силы и моменты могут быть приложены лишь по краям пружины. Учет распределенных нагрузок — аэродинамических от потока жидкости или газа, инерционных, собственного веса и т. п. — позволил бы резко расширить область применения закона сохранения (2) почти на все задачи, важные для практики.

Ожидается, что учет распределенных нагрузок не должен существенно изменить общую форму выражения (2), поэтому для вывода модификации интеграла Кирхгофа–Лармора достаточно продифференцировать левую часть формулы (2) по осевой координате стержня и скомбинировать полученный результат с уравнениями равновесия и упругости стержня.

Обозначим левую часть выражения (2) символом W :

$$W = \frac{M_1^2}{2A_{11}} + \frac{M_2^2}{2A_{22}} + \frac{M_3^2}{2A_{33}} + \alpha_{10}M_1 + \alpha_{20}M_2 + \alpha_{30}M_3 + Q_1.$$

При отсутствии распределенных нагрузок выполняется закон сохранения (2), т. е. $W = \text{const}$, но если распределенные нагрузки не равны нулю, то величина W не обязана оставаться константой.

Дифференцирование W по дуге стержня проводится элементарно:

$$\frac{dW}{ds} = \left(\frac{M_1}{A_{11}} + \alpha_{10} \right) \frac{dM_1}{ds} + \left(\frac{M_2}{A_{22}} + \alpha_{20} \right) \frac{dM_2}{ds} + \left(\frac{M_3}{A_{33}} + \alpha_{30} \right) \frac{dM_3}{ds} + \frac{dQ_1}{ds}, \quad (3)$$

где s — осевая координата стержня.

Согласно работе [8], уравнения равновесия сил и моментов гибкого стержня в проекциях на главные оси сечения имеют вид

$$\begin{cases} \frac{dQ_1}{ds} + \alpha_2 Q_3 - \alpha_3 Q_2 + q_1 = 0; \\ \frac{dQ_2}{ds} + \alpha_3 Q_1 - \alpha_1 Q_3 + q_2 = 0; \\ \frac{dQ_3}{ds} + \alpha_1 Q_2 - \alpha_2 Q_1 + q_3 = 0; \end{cases} \quad (4)$$

$$\begin{cases} \frac{dM_1}{ds} + \alpha_2 M_3 - \alpha_3 M_2 = 0; \\ \frac{dM_2}{ds} + \alpha_3 M_1 - \alpha_1 M_3 - Q_3 = 0; \\ \frac{dM_3}{ds} + \alpha_1 M_2 - \alpha_2 M_1 + Q_2 = 0, \end{cases} \quad (5)$$

где q_1, q_2, q_3 — распределенные по дуге стержня нагрузки в проекциях на главные оси сечения; Q_2, Q_3 — поперечные силы; $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ — проекции вектора кривизны деформированного стержня на главные оси сечения.

Проекции вектора кривизны на главные оси сечения в исходном и деформированном состояниях связаны соотношениями упругости

$$\begin{cases} M_1 = A_{11}(\alpha_1 - \alpha_{10}); \\ M_2 = A_{22}(\alpha_2 - \alpha_{20}); \\ M_3 = A_{33}(\alpha_3 - \alpha_{30}). \end{cases} \quad (6)$$

Из выражений (6) следует, что слагаемые, сгруппированные скобками в выражении (3), могут быть заменены на $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$:

$$\frac{dW}{ds} = \alpha_1 \frac{dM_1}{ds} + \alpha_2 \frac{dM_2}{ds} + \alpha_3 \frac{dM_3}{ds} + \frac{dQ_1}{ds}. \quad (7)$$

Если первое из уравнений (5) умножить на α_1 , второе — на α_2 , третье — на α_3 и сложить результаты, то получается тождество

$$\alpha_1 \frac{dM_1}{ds} + \alpha_2 \frac{dM_2}{ds} + \alpha_3 \frac{dM_3}{ds} - \alpha_2 Q_3 + \alpha_3 Q_2 = 0,$$

из которого следует, что формула (7) может быть представлена в следующем виде:

$$\frac{dW}{ds} = \alpha_2 Q_3 - \alpha_3 Q_2 + \frac{dQ_1}{ds} = -q_1, \quad (8)$$

где учтено первое из уравнений равновесия (4).

Интегрирование левой и правой части выражения (8) по дуге стержня приводит к равенству

$$\begin{aligned} & \frac{M_1^2}{2A_{11}} + \frac{M_2^2}{2A_{22}} + \frac{M_3^2}{2A_{33}} + \alpha_{10} M_1 + \alpha_{20} M_2 + \\ & + \alpha_{30} M_3 + Q_1 + \int_0^s q_1 ds = \text{const}. \quad (9) \end{aligned}$$

Для соотношения (9) предлагается название «**модифицированный интеграл Кирхгофа-Лармора**». Продемонстрированный здесь вывод соотношения (9) существенно упрощен по сравнению с проведенным в работе [9], где учет распределенных нагрузок в данном законе сохранения был выполнен впервые.

Таким образом, учет распределенных нагрузок свелся всего лишь к добавлению в левую часть выражения (2) слагаемого

$$\int_0^s q_1 ds,$$

которое можно рассматривать и как неопределенный интеграл

$$\int q_1 ds.$$

Для удобства левую часть соотношения (9) обозначим W^* :

$$W^* = W + \int_0^s q_1 ds.$$

Тогда модифицированный закон сохранения, учитывающий распределенные нагрузки, принимает вид

$$W^* = \text{const}.$$

Все величины в правой части выражения (9) представлены в проекциях на главные оси поперечного сечения стержня (локальная система координат, связанная с текущим сечением). Это становится неудобным при расчете стержня в

неподвижной декартовой системе координат. В связи с этим соотношение (9) целесообразно представить в инвариантной векторно-тензорной форме записи, которая пригодна для любой системы координат:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \mathbf{M} \cdot \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{M} + \mathbf{M} \cdot \mathbf{L} \cdot \boldsymbol{\alpha}_0 + \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{Q} + \int_0^s \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{q} ds = \\ & = \text{const}, \quad (10) \end{aligned}$$

где \mathbf{M} и \mathbf{Q} — векторы внутренних моментов и сил в сечении; \mathbf{A}^{-1} — тензор податливости сечения в деформированном состоянии; \mathbf{L} — тензор поворота сечения; $\boldsymbol{\alpha}_0$ — вектор кривизны в исходном недеформированном состоянии; \mathbf{e}_1 — орт оси стержня в деформированном состоянии.

Векторы и тензоры, входящие в состав уравнения (10), могут быть выражены через любые ортонормированные базисы. Их представление в связанных с сечением базисах имеет вид

$$\begin{aligned} \mathbf{Q} &= Q_1 \mathbf{e}_1 + Q_2 \mathbf{e}_2 + Q_3 \mathbf{e}_3; \\ \mathbf{q} &= q_1 \mathbf{e}_1 + q_2 \mathbf{e}_2 + q_3 \mathbf{e}_3; \\ \mathbf{A}^{-1} &= \frac{\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1}{A_{11}} + \frac{\mathbf{e}_2 \mathbf{e}_2}{A_{22}} + \frac{\mathbf{e}_3 \mathbf{e}_3}{A_{33}}; \quad (11) \\ \mathbf{M} &= M_1 \mathbf{e}_1 + M_2 \mathbf{e}_2 + M_3 \mathbf{e}_3; \\ \boldsymbol{\alpha}_0 &= \alpha_{10} \mathbf{e}_{10} + \alpha_{20} \mathbf{e}_{20} + \alpha_{30} \mathbf{e}_{30}; \\ \mathbf{L} &= \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_{10} + \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_{20} + \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_{30}, \end{aligned}$$

где \mathbf{e}_i и \mathbf{e}_{i0} — главные орты сечения в деформированном и исходном состояниях; \mathbf{q} — вектор распределенной нагрузки; комбинации $\mathbf{e}_i \mathbf{e}_{i0}$ и аналогичные им являются диадными (тензорными, внешними) произведениями направленных отрезков.

Форма записи закона сохранения (10) особенно удобна при использовании векторно-тензорного описания поворотов [10] и векторно-тензорного представления уравнений больших перемещений гибкого стержня, используемого в работах [11–16].

Пример применения модифицированного интеграла Кирхгофа-Лармора в форме (10).

В качестве примера выполнен расчет пружины, несущей постоянную распределенную нагрузку (рис. 1).

Пружина жестко заделана с одной стороны и опирается на сферический шарнир с другой сторо-

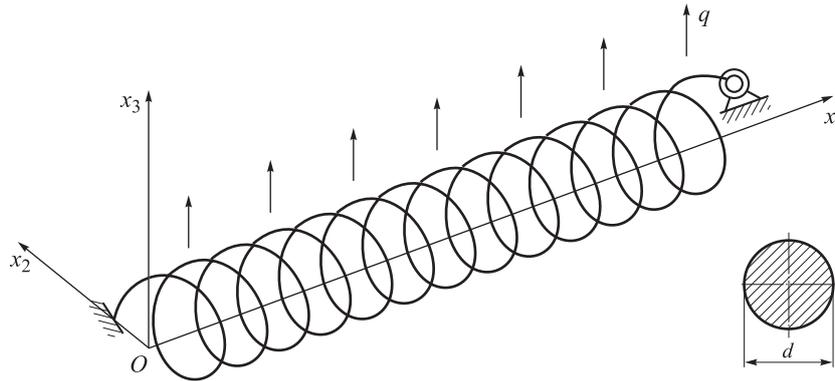


Рис. 1. Винтовая пружина, несущая постоянную распределенную нагрузку

ны. Исследована пружина со следующими параметрами:

- модуль упругости материала $E = 2 \cdot 10^{11}$ Па;
- коэффициент Пуассона материала $\mu = 0,3$;
- плотность материала $\rho = 8\,000$ кг/м³;
- радиус цилиндра, описывающего пружину $R = 13,25 \cdot 10^{-3}$ м;
- диаметр проволоки $d = 2,6 \cdot 10^{-3}$ м;
- угол подъема винтовой линии $\gamma = 3,35^\circ$;
- количество витков $N = 38$;
- равномерно распределенная нагрузка $q = 6$ Н/м;

$$A_{11} = \frac{E}{2(1+\mu)} \frac{\pi d^4}{32}; \quad A_{22} = A_{33} = E \frac{\pi d^4}{64}.$$

Равномерно распределенную нагрузку, показанную на рис. 1, может вызвать, например, движение с постоянным ускорением в сторону, противоположную оси x_3 .

Геометрия винтовой линии задавалась в обычном параметрическом виде:

$$\mathbf{r}_0(s) = \begin{pmatrix} x_{10}(s) \\ x_{20}(s) \\ x_{30}(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s \sin \gamma \\ R \cos \left(\frac{s \cos \gamma}{R} \right) \\ R \sin \left(\frac{s \cos \gamma}{R} \right) \end{pmatrix}. \quad (12)$$

Вектор распределенной нагрузки в проекциях на неподвижные декартовы оси

$$\mathbf{q} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ q \end{pmatrix}.$$

Перемещения пружины рассчитывали с помощью системы геометрически нелинейных дифференциальных уравнений 18-го порядка, систематически применяемой в работе [9]:

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{Q}}{ds} + \mathbf{q} = 0; \\ \frac{d\mathbf{M}}{ds} + \mathbf{e}_1 \times \mathbf{Q} = 0; \\ \frac{d\mathbf{r}}{ds} = \mathbf{e}_1; \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{d\mathbf{e}_1}{ds} = \mathbf{a} \times \mathbf{e}_1; \\ \frac{d\mathbf{e}_2}{ds} = \mathbf{a} \times \mathbf{e}_2; \\ \frac{d\mathbf{e}_3}{ds} = \mathbf{a} \times \mathbf{e}_3, \end{cases} \quad (13)$$

где \mathbf{r} — радиус-вектор оси; \mathbf{a} — вектор кривизны в деформированном состоянии стержня.

Векторы кривизны в деформированном \mathbf{a} и исходном \mathbf{a}_0 состояниях связаны векторно-тензорным соотношением упругости, которое аналогично трем скалярным формулам (6):

$$\mathbf{a} = \mathbf{L} \cdot \mathbf{a}_0 + \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{M}.$$

Для винтовой линии (см. рис. 1) вектор кривизны в исходном состоянии определяется очень просто. Поскольку сечение совершает полный оборот 2π вокруг оси x_1 на длине одного витка, равной $2\pi R / \cos \gamma$, в декартовых координатах

$$\mathbf{a}_0 = \frac{\cos \gamma}{R} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Граничные условия в векторной форме имеют вид

$$\begin{cases} \mathbf{r}(0) = \mathbf{r}_0(0); \\ \mathbf{r}(l) = \mathbf{r}_0(l); \\ \mathbf{M}(l) = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} \mathbf{e}_1(0) = \mathbf{e}_{10}(0); \\ \mathbf{e}_2(0) = \mathbf{e}_{20}(0); \\ \mathbf{e}_3(0) = \mathbf{e}_{30}(0). \end{cases} \quad (14)$$

Главные орты сечения исходного состояния, используемые в выражениях (14), определяли из уравнения пространственной кривой (12) как векторы касательной, нормали и бинормали:

$$\mathbf{e}_{10} = \frac{d\mathbf{r}_0}{ds}; \quad \frac{d\mathbf{e}_{10}}{ds} = \frac{d\mathbf{e}_{20}}{ds}; \quad \mathbf{e}_{30} = \mathbf{e}_{10} \times \mathbf{e}_{20},$$

где $1/\rho_0$ — главная кривизна винтовой линии, $1/\rho_0 = \cos^2 \gamma/R$.

Проекции вектора кривизны в исходном состоянии на главные орты определяются соотношениями

$$\alpha_{10} = \frac{\cos \gamma \sin \gamma}{R}; \quad \alpha_{20} = 0; \quad \alpha_{30} = \frac{\cos^2 \gamma}{R}.$$

Нелинейную краевую задачу для системы дифференциальных уравнений (13) с гранич-

ными условиями (14) решали с помощью стандартной процедуры NDSolve программного обеспечения Wolfram Mathematica [17]. Предварительно векторные дифференциальные уравнения (13) и граничные условия (14) были преобразованы к уравнениям в проекциях на декартовы оси с помощью процедуры Thread того же программного обеспечения (переход к проекциям выполнялся для соответствия требованиям процедуры NDSolve к представлению входных данных). Итерационный алгоритм решения нелинейной краевой задачи встроен непосредственно в процедуру NDSolve послед-

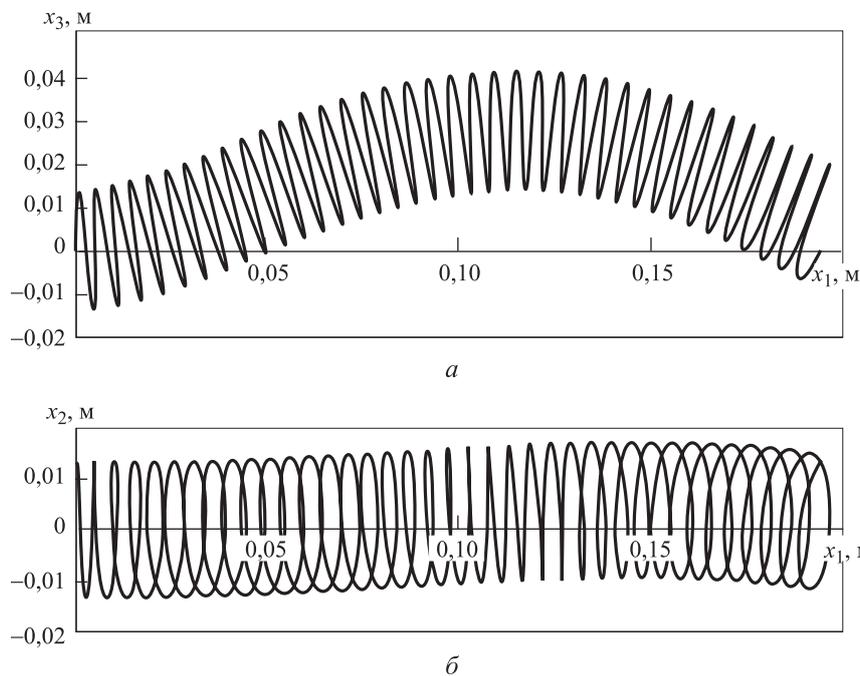


Рис. 2. Конфигурация деформированной пружины в проекциях на плоскости x_1Ox_3 (а) и x_1Ox_2 (б)

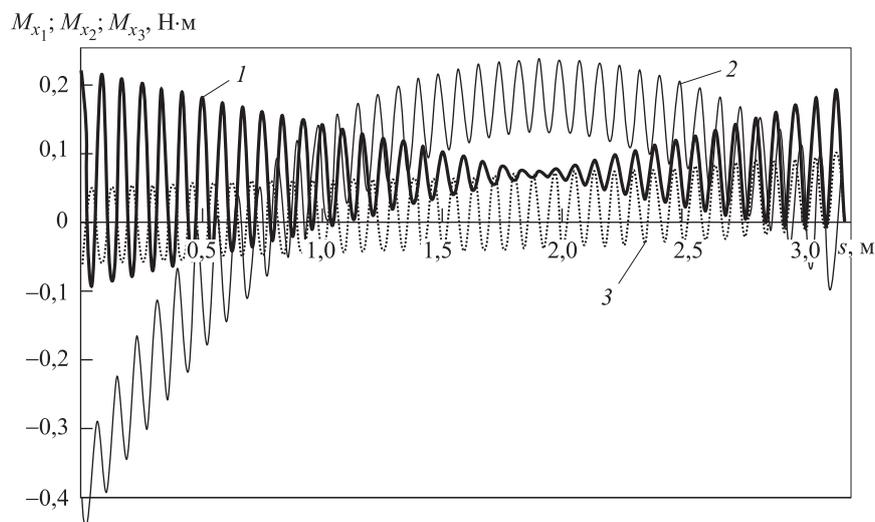


Рис. 3. Зависимость компонентов вектора момента M_{x_1} (1), M_{x_2} (2) и M_{x_3} (3) от координаты s

них версий Wolfram Mathematica и не вызывает необходимости дополнительного программирования. Указанная автоматизация не всегда приводит к успеху или иногда находит не то решение, которое нужно расчетчику. В этом случае необходимо явно применить либо метод последовательных нагружений из книги [8], либо метод Ньютона в сочетании с шаговым увеличением нагрузки в соответствии с рекомендациями работ [9, 18, 19].

Для рассматриваемой задачи нагрузку q подбирали таким образом, чтобы процедура NDSolve смогла найти решение за один шаг нагружения. В результате получены распределения векторов \mathbf{Q} , \mathbf{M} , \mathbf{r} , \mathbf{e}_1 , \mathbf{e}_2 , \mathbf{e}_3 по длине дуги пружины. Конфигурация деформированной пружины представлена двумя проекциями на рис. 2.

На рис. 3 показано распределение моментов по длине дуги пружины в проекциях на неподвижные декартовы оси.

Как и ожидалось, наибольшей проекцией вектора момента является проекция на ось x_2 (изгиб пружины как эквивалентного стержня). При этом средняя линия, проведенная между экстремумами кривой $M_{x_2}(s)$, напоминает параболу, что приближенно соответствует элементарной теории изгиба балок.

На рис. 4 приведено распределение по длине дуги пружины проекций вектора сил на декартовы оси. Следует отметить, что, согласно элементарной теории изгиба пружин (как эквивалентных балок), значение реакции в заделке $5qs_{\max}/8 = 11,88$ Н весьма близко к значению $Q_{x_3}(0) = 11,91$ Н, показанному на рис. 4.

Поскольку орты деформированного состояния вместе с остальными неизвестными опре-

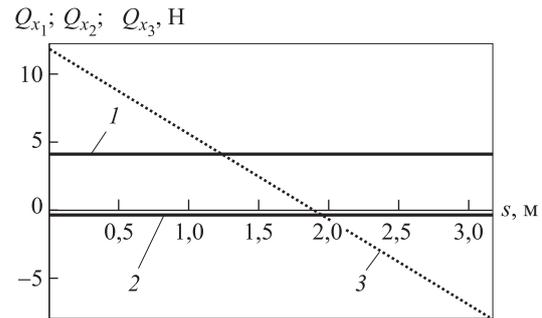


Рис. 4. Зависимость компонентов вектора сил Q_{x_1} (1), Q_{x_2} (2) и Q_{x_3} (3) от координаты s

деляли численным интегрированием, а оно вносит погрешности, необходим контроль сохранения длины и ортогональности векторов \mathbf{e}_1 , \mathbf{e}_2 , \mathbf{e}_3 , который осуществляли на основе следующей оценки:

$$\delta = \left[(\mathbf{e}_1^2 - 1)^2 + (\mathbf{e}_2^2 - 1)^2 + (\mathbf{e}_3^2 - 1)^2 + (\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2)^2 + (\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_3)^2 + (\mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_1)^2 \right]^{1/2}.$$

Как видно из рис. 5, длины и ортогональность векторов сохраняются с высокой точностью (максимальная погрешность $\delta_{\max} = 1,7 \cdot 10^{-5}$).

Контроль правильности и точности расчета в целом выполнен на основе предложенной модификации интеграла Кирхгофа–Лармора. По вычисленным $\mathbf{e}_i(s)$, $\mathbf{Q}(s)$, $\mathbf{M}(s)$ и известным векторам $\mathbf{e}_{i0}(s)$, \mathbf{q} , \mathbf{a}_0 с учетом формул (11) была определена левая часть соотношения (10), т. е. $W^*(s)$. Результат расчета $W^*(s)$ представлен на рис. 6.

Значения W^* на рис. 6 изменяются в интервале от $W_1^* = -4,311281$ Дж/м до $W_2^* = -4,311279$ Дж/м, т. е. $W^*(s)$ отклоняется от

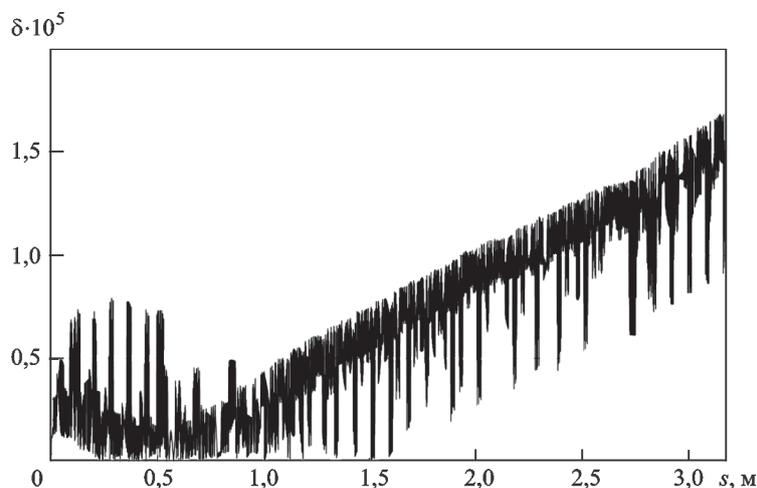


Рис. 5. Зависимость погрешности δ расчета ортов \mathbf{e}_1 , \mathbf{e}_2 , \mathbf{e}_3 от координаты s

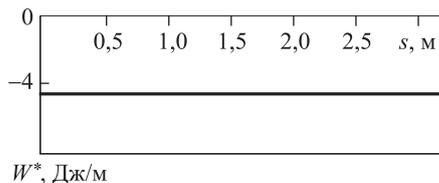


Рис. 6. Зависимость левой части соотношений (10) (или (9)) от координаты s

константы лишь в седьмом знаке. Этот признак позволяет заключить, что точность расчета в целом составляет не менее шести значащих цифр.

Аналогичным образом можно выполнить контроль точности расчета для стержней, несущих распределенные нагрузки, ось которых в исходном состоянии представляет собой отрезок прямой линии или участок дуги окружности.

Выводы

1. Показано, что закон сохранения из теории больших перемещений гибких стержней, открытый Г. Кирхгофом и распространенный

Д. Лармором на цилиндрические пружины, может быть распространен на случай учета распределенных нагрузок. При этом вывод основного соотношения существенно упрощен по сравнению с проведенным в работе [9], где такой учет был выполнен впервые. Кроме того, представлена векторно-тензорная форма записи соотношения, применимая в любой системе координат.

2. Для уточненного закона сохранения предложено название «модифицированный интеграл Кирхгофа–Лармора».

3. Разработанная модификация позволяет существенно расширить область применения указанного закона сохранения почти на все важные случаи нагружения цилиндрических пружин, а также гибких стержней, имеющих в исходном состоянии форму оси в виде отрезка прямой линии или части дуги окружности.

4. Продемонстрирована целесообразность применения модифицированного интеграла Кирхгофа–Лармора для проверки правильности и оценки точности численного расчета больших перемещений винтовых цилиндрических пружин, несущих распределенную нагрузку.

Литература

- [1] Ляв А. *Математическая теория упругости*. Москва, ОНТИ, 1935. 674 с.
- [2] Nizette M., Goriely A. Towards a classification of Euler–Kirchhoff filaments. *Journal of Mathematical Physics*, 1999, vol. 40, is. 6, pp. 2830–2866.
- [3] Leung A.Y.T., Kuang J.L. Spatial chaos of buckled elastica by the Kirchhoff analogy of a gyrostat. *Computers & Structures*, 2005, vol. 83, is. 28–30, pp. 2395–2413.
- [4] Shu L., Weber A. A symbolic-numeric method for solving boundary value problems of Kirchhoff Rods. *Lecture Notes in Computer Science*, 2005, vol. 3718, pp. 387–398.
- [5] Da Fonseca A.F., De Aguiar M.A.M. Solving the boundary value problem for finite Kirchhoff rods. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 2003, vol. 181, is. 1–2, pp. 53–69.
- [6] Shvartsman B.S. Analysis of large deflections of a curved cantilever subjected to a tip-concentrated follower force. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 2013, vol. 50, pp. 75–80.
- [7] Van der Heijden G.H.M., Thompson J.M.T. Helical and localized buckling in twisted Rods: A unified analysis of the symmetric case. *Nonlinear Dynamics*, 2000, vol. 21, is. 1, pp. 71–99.
- [8] Светлицкий В.А. *Механика стержней. Ч. 1: Статика*. Москва, Высшая школа, 1987. 320 с.
- [9] Бадиков Р.Н. *Расчетно-экспериментальное исследование напряженно-деформированного состояния и резонансных режимов вращения винтовых пружин в пружинных механизмах*. Дис. ... канд. техн. наук. Москва, 2009. 166 с.
- [10] Жилин П.А. *Векторы и тензоры второго ранга в трехмерном пространстве*. Санкт-Петербург, Нестор, 2001. 276 с.
- [11] Елисеев В.В., Зиновьева Т.В. *Механика тонкостенных конструкций. Теория стержней*. Санкт-Петербург, Изд-во Политехн. ун-та, 2008. 95 с.
- [12] Елисеев В.В. *Механика деформируемого твердого тела*. Санкт-Петербург, Изд-во Политехн. ун-та, 2006. 231 с.

- [13] Жилин П.А. *Прикладная механика. Теория тонких упругих стержней*. Санкт-Петербург, Изд-во Политехн. ун-та, 2007. 101 с.
- [14] Zhilin P.A. Nonlinear theory of thin rods. *Advanced Problems in Mechanics. Lecture at XXXIII Summer School-Conference*, St. Petersburg, Russia, 2005, pp. 227–249.
- [15] Сорокин Ф.Д. Прямое тензорное представление уравнений больших перемещений гибкого стержня с использованием вектора конечного поворота. *Известия Российской академии наук. Механика твердого тела*, 1994, № 1, с. 164–168.
- [16] Zubov L.M. The problem of the equilibrium of a helical spring in the non-linear three-dimensional theory of elasticity. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 2007, no. 71, pp. 519–526.
- [17] Дьяконов В.П. *Mathematica 5.1/5.2/6. Программирование и математические вычисления*. Москва, ДМК-Пресс, 2008, 574 с.
- [18] Гаврюшин С.С., Бадиков Р.Н., Ганбат Д. Численное моделирование процессов нелинейного деформирования рабочих органов пружинных мельниц. *Матер. 15-й Междунар. конф. по вычислительной механике и современным прикладным программным системам (ВМСППС-2007)*, Москва, Вузовская книга, 2007, с. 139–140.
- [19] Гаврюшин С.С., Барышникова О.О., Борискин О.Ф. *Численные методы проектирования гибких упругих элементов*. Калуга, Облиздат, 2001. 200 с.

References

- [1] Liav A. *Matematicheskaia teoriia uprugosti* [Mathematical Theory of Elasticity]. Moscow, ONTI publ., 1935. 674 p.
- [2] Nizette M., Goriely A. Towards a classification of Euler–Kirchhoff filaments. *Journal of Mathematical Physics*, 1999, vol. 40, is. 6, pp. 2830–2866.
- [3] Leung A.Y.T., Kuang J.L. Spatial chaos of buckled elastica by the Kirchhoff analogy of a gyrostat. *Computers & Structures*, 2005, vol. 83, is. 28–30, pp. 2395–2413.
- [4] Shu L., Weber A. A symbolic-numeric method for solving boundary value problems of Kirchhoff Rods. *Lecture Notes in Computer Science*, 2005, vol. 3718, pp. 387–398.
- [5] Da Fonseca A.F., De Aguiar M.A.M. Solving the boundary value problem for finite Kirchhoff rods. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 2003, vol. 181, is. 1–2, pp. 53–69.
- [6] Shvartsman B.S. Analysis of large deflections of a curved cantilever subjected to a tip-concentrated follower force. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 2013, vol. 50, pp. 75–80.
- [7] Van der Heijden G.H.M., Thompson J.M.T. Helical and localized buckling in twisted Rods: A unified analysis of the symmetric case. *Nonlinear Dynamics*, 2000, vol. 21, is. 1, pp. 71–99.
- [8] Svetlitskii V.A. *Mekhanika sterzhnei: Ch. 1 Statika* [Mechanics rods: Part. 1. Static]. Moscow, Vysshiaia shkola publ., 1987. 320 p.
- [9] Badikov R.N. *Raschetno-eksperimental'noe issledovanie napriazhenno-deformirovannogo sostoiianiia i rezonansnykh rezhimov vrashcheniia vintovykh pruzhin v pruzhinnykh mekhanizmakh*. Diss. kand. tekhn. nauk [Calculation-experimental study of stress-strain state and the resonant modes of rotation of helical springs in spring mechanisms. Cand. tech. sci. diss.]. Moscow, 2009. 166 p.
- [10] Zhilin P.A. *Vektory i tenzory vtorogo ranga v trekhmernom prostranstve* [Vectors and tensors of the second rank in three-dimensional space]. Sankt-Petersburg, Nestor publ., 2001. 276 p.
- [11] Eliseev V.V., Zinov'eva T.V. *Mekhanika tonkostennykh konstruksii. Teoriia sterzhnei* [Mechanics of thin-walled structures. The theory of rods]. Sankt-Petersburg, Politekhn. un-t publ., 2008. 95 p.
- [12] Eliseev V.V. *Mekhanika deformiruemogo tverdogo tela* [Mechanics of deformable solids]. Sankt-Petersburg, Politekhn. un-t publ., 2006. 231 p.
- [13] Zhilin P.A. *Prikladnaia mekhanika. Teoriia tonkikh uprugikh sterzhnei* [Applied mechanics. Theory of thin elastic rods]. Sankt-Petersburg, Politekhn. un-t publ., 2007. 101 p.
- [14] Zhilin P.A. Nonlinear theory of thin rods. *Lecture at 33 Summer School-Conference «Advanced Problems in Mechanics»*. St. Petersburg, 2005, pp. 227–249.

- [15] Sorokin F.D. Priamoe tenzornoe predstavlenie uravnenii bol'shikh peremeshchenii gibkogo sterzhnia s ispol'zovaniem vektora konechnogo povorota [Direct representation of the tensor equations of large displacements of the flexible rod with finite rotation vector]. *Izvestiia Rossiiskoi akademii nauk. Mekhanika tverdogo tela* [Mechanics of Solids]. 1994, no. 1, pp. 164–168.
- [16] Zubov L.M. The problem of the equilibrium of a helical spring in the non-linear three-dimensional theory of elasticity. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 2007, no. 71, pp. 519–526.
- [17] D'iakonov V.P. *Mathematica 5.1/5.2/6. Programmirovaniie i matematicheskie vychisleniia* [Mathematica 5.1/5.2/6. Programming and math]. Moscow, DMK-Press, 2008. 574 p.
- [18] Gavriushin S.S., Badikov R.N., Ganbat D. Chislennoe modelirovaniie protsessov nelineinogo deformirovaniia rabochikh organov pruzhinnykh mel'nits [Numerical modeling of nonlinear deformation of the working bodies of spring mills]. *Materialy 15-i mezhdunarodnoi konferentsii po vychislitel'noi mekhanike i sovremennym prikladnym programmnyim sistemam (VMSPPS-2007)* [Proceedings of the 15th international conference on computer mechanics and modern applied codes (VMSPPS 2007)]. Moscow, Vuzovskaia kniga publ., 2007, pp. 139–140.
- [19] Gavriushin S.S., Baryshnikova O.O., Boriskin O.F. *Chislennye metody proektirovaniia gibkikh uprugikh elementov* [Numerical methods for the design of flexible elastic elements]. Kaluga, Oblizdat publ., 2001. 200 p.

Статья поступила в редакцию 24.11.2016

Информация об авторах

СОРОКИН Федор Дмитриевич (Москва) — профессор кафедры «Прикладная механика». МГТУ им. Н.Э. Баумана (105005, Москва, Российская Федерация, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1, e-mail: sorokin_fd@mail.ru).

БАДИКОВ Руслан Николаевич (Эверетт) — ведущий инженер. СиТиЭс Интернашенл (10115, Эверетт, штат Вашингтон, США, Холли Драйв, e-mail: ruslan.badikov@gmail.com).

СУ Чжоу (Москва) — аспирант кафедры «Прикладная механика». МГТУ им. Н.Э. Баумана (105005, Москва, Российская Федерация, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1, e-mail: szleon602@gmail.com).

Information about the authors

SOROKIN Fyodor Dmitrievich (Moscow) — Professor, Department of Applied Mechanics. Bauman Moscow State Technical University (105005, Moscow, Russian Federation, 2nd Baumanskaya St., Bldg. 5, Block 1, e-mail: sorokin_fd@mail.ru).

BADIKOV Ruslan Nikolaevich (Everett) — Leading Engineer. CTS International (10115, Everett, Washington, USA, Holly Dr., e-mail: ruslan.badikov@gmail.com).

SU Zhou (Moscow) — Postgraduate, Department of Applied Mechanics. Bauman Moscow State Technical University (105005, Moscow, Russian Federation, 2nd Baumanskaya St., Bldg. 5, Block 1, e-mail: szleon602@gmail.com).