

УДК 629.373.3, 629.3.027.3, 539.37

Моделирование вязкоупругих свойств и гистерезисного демпфирования рессор из композиционных материалов

Н.Н. Староверов

Применение композиционных материалов в системах подрессоривания колесных машин позволяет в ряде случаев отказаться от гидравлических амортизаторов в пользу гистерезисного демпфирования материалов. В статье приведено описание вязкоупругих свойств и гистерезисного демпфирования рессоры из стеклопластика с полимерным межлистовым материалом с помощью вязкоупругих математических моделей с производными дробного порядка.

Ключевые слова: полимерные материалы, полимерные композиционные материалы, рессора, гистерезисное демпфирование, вязкоупругость.

The application of composite materials in suspension systems of wheeled vehicles allows in some cases to replace a linear viscous damping of hydraulic shock absorbers by a hysteresis damping of materials. The article presents a method of describing and modeling viscoelastic properties and hysteresis damping in fiberglass leaf springs with polymer interleaves, using viscoelastic mathematical models with fractional order derivatives.

Keywords: polymer materials, composite materials, leaf spring, hysteresis damping, viscoelasticity.

Особый класс транспортных средств занимают вездеходные транспортные средства (ВТС), предназначенные для эксплуатации в регионах без развитой сети дорог, в том числе, в регионах Крайнего Севера по грунтам со слабой несущей способностью. Один из путей решения проблемы грузоперевозок в таких условиях, движения по местности с высокими экологическими требованиями к неразрушению верхнего почвенного покрова состоит в разработке специальных ВТС на шинах сверхнизкого давления. При этом снижение снаряженной массы является одним из аспектов повышения их экономической эффективности. Применение полимерных композиционных материалов (ПКМ) в системе подрессоривания ВТС в этом случае предоставляет ряд серьезных преимуществ.

Проведенный анализ конструкций систем подрессоривания современных транспортных средств показал, что ПКМ находят свое применение именно в транспортных средствах, для которых снижение снаряженной массы является критическим показателем. Использование рессоры из ПКМ позволяет снизить массу упругого элемента в 3—5 раз,



СТАРОВЕРОВ
Николай Николаевич,
аспирант кафедры
«Колесные машины»
(МГТУ им. Н.Э. Баумана)

увеличить долговечность в 4–5 раз. При этом улучшается плавность движения, снижается шум, повышается безопасность движения, уменьшается масса неподрессоренных частей автомобиля, снижается динамическая нагрузка на подвеску, улучшаются экономические показатели колесных машин (КМ) [1–3]. Кроме того, ПКМ и полимерные резиноподобные материалы обладают внутренним (гистерезисным) демпфированием, что для ВТС, движущихся с малыми скоростями по слабонесущим грунтам, позволяет заменить традиционные гидравлические амортизаторы в пользу еще большего снижения снаряженной массы и массы неподрессоренных частей ВТС. Особенности моделирования вязкоупругих свойств рессор из ПКМ и проведенным экспериментальным исследованиям посвящена данная статья.

Объект исследования

Объектом исследования является ВТС «ЗЭТ 6×6» (рис. 1), разработанное в конструкторском бюро кафедры «Колесные машины» МГТУ им. Н. Э. Баумана по заказу компании ОАО «АВТОРОС» (www.z-project.ru). В подвеске ВТС «ЗЭТ 6×6» применена стеклопластиковая четверть-эллиптическая рессора, установленная поперечно. Модуль системы поддрессирования показан на рис. 2. Между листами рессоры проложены один или несколько слоев резиновой смеси марки 51–1615. Коренной лист — стальной. Листы рессоры в ненагружен-



Рис. 1. Вездеходное транспортное средство «ЗЭТ 6×6» со стеклопластиковыми четверть-эллиптическими рессорами



Рис. 2. Общий вид модуля системы поддрессирования ВТС «ЗЭТ 6×6»



Рис. 3. Конструкция четверть-эллиптической рессоры

ном состоянии представляют собой дуги окружности различного радиуса, как показано на рис. 3. Композиционный материал — стеклопластик (армирующий компонент — стекловолокно, связующий компонент — смола эпоксидная ЭХД).

Учет гистерезисных свойств при моделировании

В основе математического описания демпфирования лежит реология — наука о деформировании и течении материала. Одно из направлений, в котором развивается реология, связано с теорией микропроцессов и основано на дискретных моделях современной физики, описывающих внутренние процессы, протекающие в материале на уровне межатомных и молекулярных взаимодействий. Другое направление связано с теорией макропроцессов и основывается на феноменологических аспектах физики явления [4].

В основу описания вязкоупругих свойств материалов, входящих в состав рессоры, поло-

жены методы, базирующиеся на принципе суперпозиции Больцмана, широко используемом в литературе. Принцип суперпозиции Больцмана применим для всех полимеров, структура которых не зависит от приложенных сил и не меняется во времени. Он позволяет описывать линейное вязкоупругое поведение системой дифференциальных уравнений вида

$$L\sigma = D\varepsilon,$$

где L и D — линейные дифференциальные операторы по времени.

Существует множество моделей различной сложности, позволяющих приближенно описать вязкоупругое поведение материалов: линейные модели Максвелла, Кельвина — Фойхта, Зенера, обобщенные модели Максвелла и Кельвина и др. [5, 6]. В общем виде уравнение состояния таких моделей описывается следующим дифференциальным уравнением:

$$\begin{aligned} \alpha_0\sigma(t) + \alpha_1 \frac{d\sigma(t)}{dt} + \alpha_2 \frac{d^2\sigma(t)}{dt^2} + \alpha_3 \frac{d^3\sigma(t)}{dt^3} + \dots = \\ = \beta_0\varepsilon(t) + \beta_1 \frac{d\varepsilon(t)}{dt} + \beta_2 \frac{d^2\varepsilon(t)}{dt^2} + \beta_3 \frac{d^3\varepsilon(t)}{dt^3} + \dots \end{aligned}$$

Чем больше элементов присутствует в обобщенной модели, тем более точной является модель, описывающая поведение материала, но тем больше коэффициентов следует получить экспериментально, чтобы определить уравнение состояния.

Тем не менее, даже при большом количестве коэффициентов, требуемой точности модели можно и не получить. Некоторые авторы, включая Блэра, Герасимова, Слонимского, Майнарди [7] предложили считать вязкоупругие модели с целочисленными производными неадекватными с качественной точки зрения. Предлагается определять модели вязкоупругости с помощью производных дробного порядка.

По определению дробная производная функции $x(t)$ [7, 8] имеет вид:

$$D^\gamma[x(t)] = \frac{1}{\Gamma(1-\gamma)} \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{x(\tau)}{(t-\tau)^\gamma} d\tau,$$

где Γ — гамма-функция.

Вязкоупругое уравнение состояния в дробных производных, предложенное Блэром [7] в форме

$$\sigma(t) = E\tau^\gamma D^\gamma[\varepsilon(t)]$$

позволяет описать элемент, занимающий промежуточное положение между абсолютно упругим элементом Гука при $\gamma = 0$ (в котором напряжения зависят только от текущего значения деформации) и абсолютно-вязким элементом Ньютона при $\gamma = 1$ (для которого история нагружения, а именно то, как система оказалась в текущем положении, важна при определении значений напряжений). Производные дробного порядка предоставляют более широкий диапазон возможностей при моделировании вязкоупругих тел с ярко выраженной зависимостью характеристик от истории нагружения.

Дробно-дифференциальный подход, развитие которого в реологии связано с именами Скотта—Блэра, Бэгли и Торвика, Горенфло и Майнарди, Фридриха и Шисселя, Блюмена и Метнлера, Нонненмейкера и Глекля, Клафтера и Шлесингера, был успешно применен для описания реологического поведения органических стекол, эластомеров, полиуретана, полиизобутилена, монодисперсного полибутадиена, твердых аморфных полимеров в широкой области температур.

Для полимерных материалов, входящих в состав рессоры, используется уравнение состояния модели стандартного линейного тела в дробных производных:

$$\begin{aligned} \sigma(t) + \tau^\alpha D^\alpha[\sigma(t)] = E[\varepsilon(t) + \theta^\alpha D^\alpha[\varepsilon(t)]] \quad (1) \\ (0 < \alpha < 1), \end{aligned}$$

впервые предложенное Капуто и Майнарди в 1971 г. с использованием дробных производных Капуто [7] как эмпирическая модель, позволяющая более точно воспроизвести данные эксперимента.

Задачу решают с помощью принципа Вольтерра: решение линейной задачи вязкоупругости может быть получено из решения соответствующей задачи линейной теории упругости путем замены в нем констант упругости некоторыми операторами.

В данной работе используются механико-математические модели вязкоупругой среды, сводящиеся к закону Гука с помощью операторных представлений:

$$Q(s)[\sigma(t)] = ER(s)[\varepsilon(t)],$$

где $Q(s)$ и $R(s)$ — некоторые операторные полиномы, соответствующие выбранной вязкоупругой модели. Например, для модели стандартного линейного тела с дробными производными эти полиномы имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} Q(s) &= \tau^\alpha s^\alpha + 1; \\ R(s) &= \theta^\alpha s^\alpha + 1, \end{aligned}$$

где α, τ, θ — вязкоупругие константы материала. Тогда упругий оператор, соответствующий модулю Юнга первого рода при учете вязкоупругости будет иметь вид

$$E(s) = \frac{ER(s)}{Q(s)}. \quad (2)$$

Таким образом, для учета вязкоупругих свойств материалов необходимо составить уравнение их поведения под нагрузкой, исходя из постановки задачи в рамках линейной теории упругости. Затем выполнить замену модуля Юнга на операторное соотношение и, вернувшись к оригиналам по Лапласу силовых и кинематических факторов, получить дифференциальное уравнение, описывающее вязкоупругое поведение материала.

Для подтверждения точности выбранных моделей вязкоупругости рассматривается математическое описание компонент рессоры и рессоры в сборе в сравнении с эксперимен-

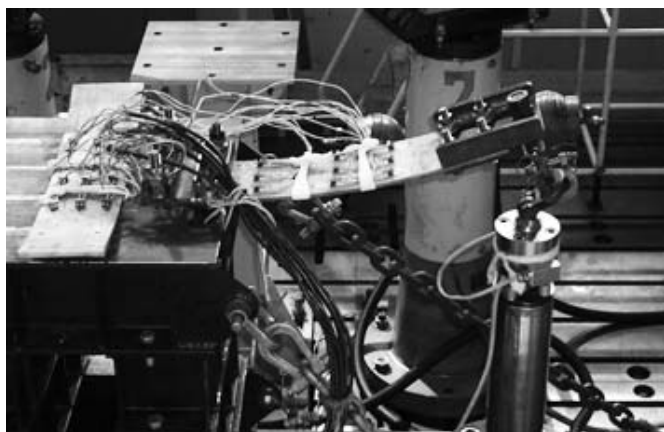


Рис. 4. Испытания одиночного листа

тальными данными. Испытания проводились на территории ФГУП «Конструкторское бюро автотранспортного оборудования» в г. Мытищи. Рессоры и одиночные листы испытывались на статическое нагружение и циклическое воздействие. Также были проведены испытания межлистового материала на разрыв при растяжении. Схема испытания одиночного листа приведена на рис. 4. Схема испытания рессоры приведена на рис. 5.

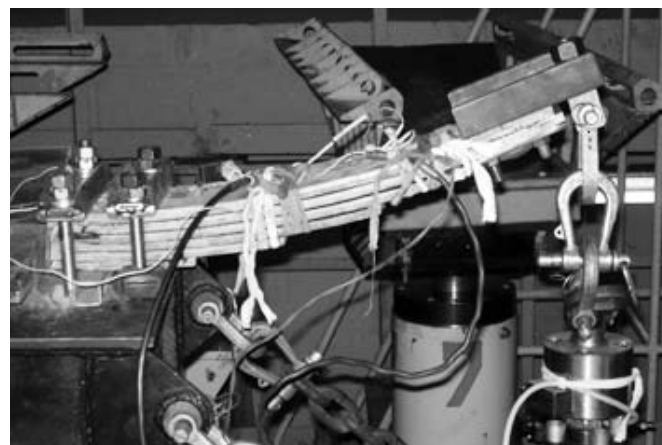


Рис. 5. Испытания рессоры

Математические модели механического поведения компонент рессоры и их экспериментальное подтверждение

Рассмотрим описание вязкоупругих свойств ПКМ на примере одиночного стеклопластикового листа. Расчетная схема задачи представлена на рис. 6.

В постановке линейной теории упругости прогиб стеклопластикового листа под действи-

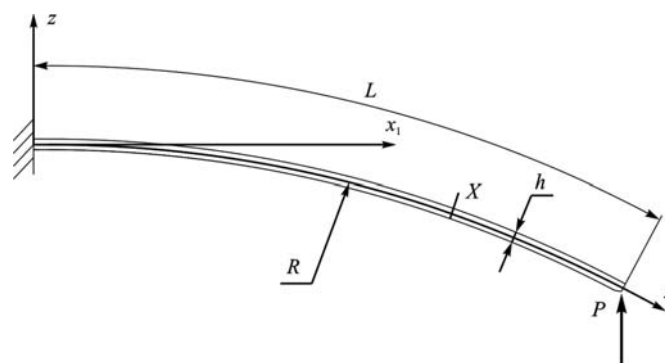


Рис. 6. Расчетная схема одиночного листа рессоры

ем силы P можно определить, вычислив интеграл Мора. Учитывая радиус начальной кривизны листа $R = 1\,137$ мм и геометрические параметры листа, получаем линейную зависимость прогиба от консольной нагрузки:

$$\delta_z = \frac{PR^3}{EJ_y} \psi(X), \quad (3)$$

где

$$\psi(X) = \frac{X}{2R} - \left(\sin \frac{X}{R} + 2 \sin \frac{L}{R} \right) \sin^2 \frac{X}{2R} + \sin \frac{X}{R} \left(\frac{X}{R} \sin \frac{L}{R} - \frac{1}{2} \right);$$

$$\psi(L) = \frac{L}{2R} + \sin \frac{L}{R} \left(\frac{L}{R} \sin \frac{L}{R} - 3 \sin^2 \frac{L}{2R} - \frac{1}{2} \right)$$

Здесь J_y — момент инерции сечения, для которого заданы: $b = 0,12$ м — ширина листа; $h = 0,011$ м — толщина листа; $E = 70$ ГПа — эффективный модуль упругости первого рода ПКМ при растяжении/сжатии.

Заменяв упругие константы в уравнении (3) на операторное представление модуля Юнга (2), для прогиба на конце рессоры получим

$$\begin{aligned} \delta_z(t) + \theta^\alpha D^\alpha [\delta_z(t)] = \\ = \frac{R^3}{EJ_y} \psi(L) [P(t) + \tau^\alpha D^\alpha [P(t)]], \end{aligned} \quad (4)$$

где α , τ , θ — константы вязкоупругости материала.

Выражение (4) представляет собой дифференциальное уравнение с дробными производными, связывающее прогиб рессоры с силой, которая действует на ее конце. По методике, описанной в работе [7], можно прийти к регрессионным зависимостям, описывающим зависимости силы от времени и прогиба листа от времени:

$$\begin{aligned} P(t) = At + \theta^\alpha AD^\alpha [t] = \\ = A \left[t + \frac{\theta^\alpha \Gamma(2)}{\Gamma(2-\alpha)} t^{1-\alpha} \right] = A \left[t + \frac{\theta^\alpha}{\Gamma(2-\alpha)} t^{1-\alpha} \right]; \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \delta_z(t) = \frac{R^3}{EJ_y} (P_0(t) + \tau^\alpha D^\alpha [P_0(t)]) = \\ = \frac{AR^3}{EJ_y} \psi(L) \left[t + \frac{\tau^\alpha}{\Gamma(2-\alpha)} t^{1-\alpha} \right]. \end{aligned} \quad (6)$$

Рассмотрим испытания полимерных образцов. Общая формула, связывающая удлинение образца с силой, растягивающей образец с точки зрения линейной теории упругости имеет вид

$$\delta = P \frac{l}{EF},$$

где E — модуль Юнга материала образца, $E = 5$ МПа; F — площадь поперечного сечения, $F = db$; l — длина образца, $l = 0,03$ м; d — толщина образца, $d = 0,002$ м; b — ширина образца, $b = 0,01$ м.

Используя модель стандартного линейного тела с дробными производными (1) и заменив упругие константы, получим

$$\delta(t) + \theta^\alpha D^\alpha [\delta(t)] = \frac{l}{Edb} [P(t) + \tau^\alpha D^\alpha [P(t)]]. \quad (7)$$

Выражение (7) представляет собой дифференциальное уравнение с производными дробного порядка, связывающее удлинение вязкоупругого образца с силой, растягивающей его.

По методике, приведенной в работе [7], получаем регрессионные зависимости

$$\begin{aligned} P(t) = At + \theta^\alpha AD^\alpha [t] = \\ = A \left[t + \frac{\theta^\alpha \Gamma(2)}{\Gamma(2-\alpha)} t^{1-\alpha} \right] = A \left[t + \frac{\theta^\alpha}{\Gamma(2-\alpha)} t^{1-\alpha} \right]; \end{aligned} \quad (8)$$

$$\delta(t) = \frac{lA}{Edb} \left[t + \frac{\tau^\alpha}{\Gamma(2-\alpha)} t^{1-\alpha} \right]. \quad (9)$$

Регрессионный анализ экспериментальных данных проводится методом наименьших квадратов в два этапа — отдельно по силе (регрессионные модели (5) и (8)) и по прогибу (регрессионные модели (6) и (9)), причем значения амплитуды A и показателя демпфирования α при проведении каждого этапа регрессион-

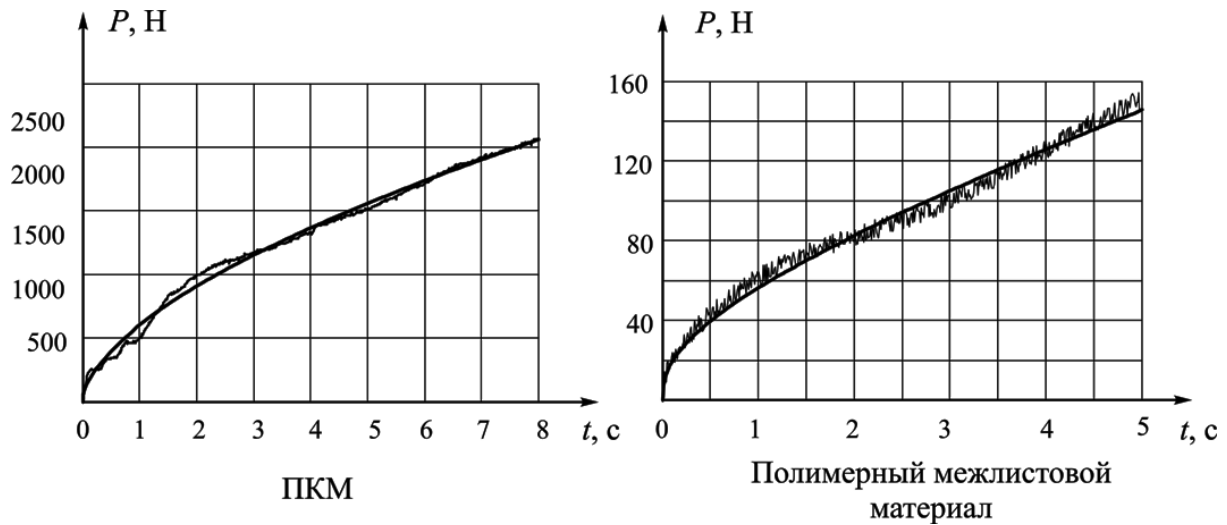


Рис. 7. Экспериментальные данные и регрессионные модели

ного анализа должны быть одинаковыми. Качество регрессионного анализа оценивается двумя показателями: коэффициентом детерминации (R^2) и коэффициентом корреляции Пирсона (r) [9].

В результате первого этапа нелинейного регрессионного анализа получены следующие значения параметров материала:

для ПКМ

$$\alpha_1 = 0,3460; \theta_1 = 195560,142;$$

для полимерного межлистового материала

$$\alpha_2 = 0,607; \theta_2 = 6,12195.$$

Сравнение экспериментальных данных и построенными с учетом полученных параметров регрессионными моделями показано на рис. 7. Показатели качества регрессионного анализа

приведены в табл. 1.

Таблица 1

Показатели качества регрессионного анализа

Показатель качества	Для изгиба одиночного листа		Для растяжения резинового образца	
	по силе	по прогибу	по силе	по растяжению
Коэффициент детерминации R^2	0,98466	0,99830	0,99211	0,99997
Коэффициент корреляции Пирсона r	0,99606	0,99388	0,99630	0,99732

Аналогичным образом методом доверительных интервалов проводится второй этап регрессионного анализа методом наименьших

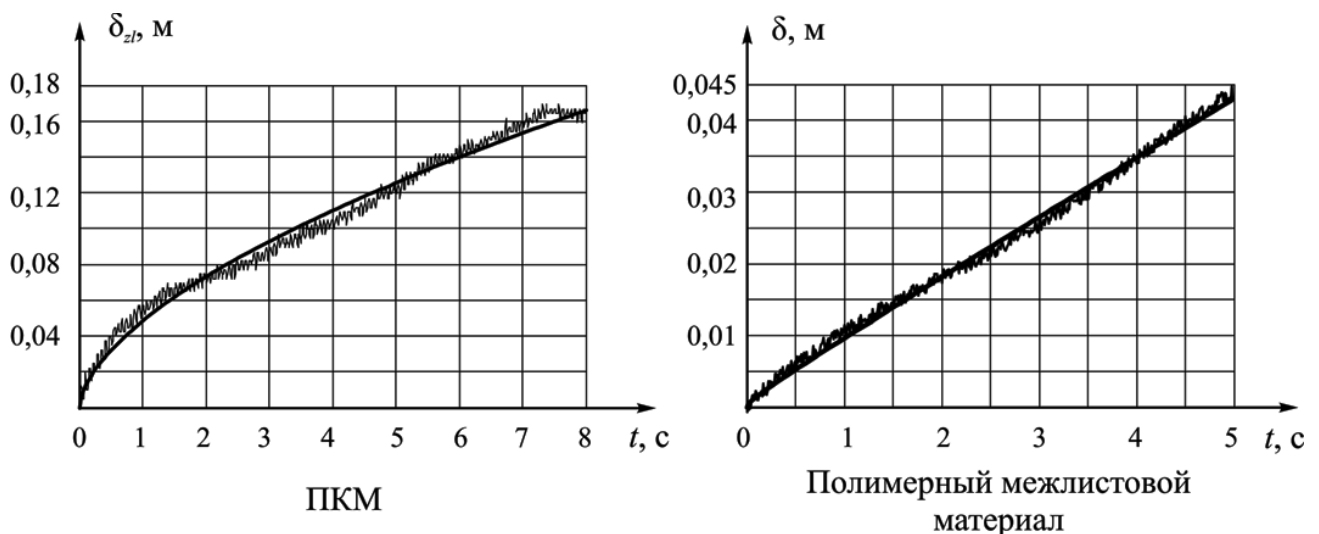


Рис. 8. Экспериментальные данные и регрессионные модели

квадратов для прогибов и деформаций растяжения. При этом значения параметров ($\alpha_1 = 0,3460$; $\theta_1 = 195560,142$ и $\alpha_2 = 0,607$; $\theta_2 = 6,12195$) берутся из результатов предыдущего этапа. Результаты второго этапа регрессионного анализа приведены на рис. 8 и в табл. 1. Значения параметра материалов, полученные на втором этапе регрессионного анализа:

$$\tau_1 = 793248,631; \tau_2 = 0,14879.$$

Оценка статической жесткости одиночного листа ПКМ выполняется по имитационной модели, работающей по уравнению (4), при приложении статической нагрузки 2 118 Н, максимальной по результатам эксперимента. Установившееся значение прогиба составляет $\delta_{уст} = 0,17136$ м; экспериментально определенное значение прогиба, соответствующее этой силе, $\delta_{экс} = 0,16932$ м; относительная погрешность измерения $\delta_{изм} = 1,2$ %.

При оценке гистерезисных потерь определяется работа упруго-диссипативных сил за цикл гармонических колебаний. Значения работы упруго-диссипативных сил за цикл для частоты возмущения 1,15 Гц, приведены в табл. 2. Разброс значений энергии диссипации обусловлен погрешностью измерений и оцифровки сигналов.

Таблица 2

Результаты определения энергии диссипации

Номер периода	Значение энергии диссипации, Дж		Номер периода	Значение энергии диссипации, Дж	
	Эксперимент	Модель		Эксперимент	Модель
1	0,02682	0,10522	12	0,14963	0,10522
2	0,08254	0,10522	13	0,08330	0,10522
3	0,15009	0,10522	14	0,01920	0,10522
4	0,23343	0,10522	15	0,04453	0,10522
5	0,16247	0,10522	16	0,10978	0,10522
6	0,09597	0,10522	17	0,20265	0,10522
7	0,03197	0,10522	18	0,13298	0,10522
8	0,03120	0,10522	19	0,06706	0,10522
9	0,09550	0,10522	20	0,00305	0,10522
10	0,16275	0,10522	21	0,06083	0,10522
11	0,22000	0,10522	22	0,12660	0,10522
Среднее значение для всех периодов:			0,10420	0,10522	
Относительная погрешность определения			$\delta_{изм} = 1$ %		

Таким образом, выбранные модели с высокой степенью достоверности позволяют описать вязкоупругие свойства ПКМ и полимерного межлистового материала. Рассмотрим совместную работу моделей вязкоупругости в общей математической модели рессоры.

Совместная работа компонент рессоры и экспериментальная проверка

Задача изгиба рессоры в сборе решается методом общей жесткости листов. При этом суммарный момент инерции сечения определяется суммой моментов инерции всех листов сечения. С учетом того, что листы выполнены из различных материалов суммарную жесткость сечения будем искать по соотношению

$$EJ_z = E_K \sum \frac{b_{Ki} h_{Ki}^3}{12} + E_P \sum \frac{b_{Pi} h_{Pi}^3}{12} + E_C \sum \frac{b_{Ci} h_{Ci}^3}{12}, \quad (10)$$

где E_K, b_{Ki}, h_{Ki} — модуль Юнга композиционного материала, ширина и толщина листов из ПКМ; E_P, b_{Pi}, h_{Pi} — модуль Юнга, ширина и толщина листов полимерного межлистового материала; E_C, b_{Ci}, h_{Ci} — модуль Юнга стальных листов, ширина и толщина стальных листов.

Расчетная схема рессоры приведена на рис. 9.

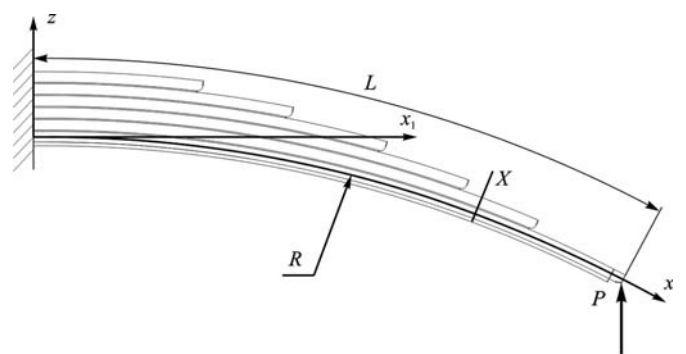


Рис. 9. Расчетная схема рессоры

Совместная работа нескрепленных жестко листов рессоры определяется их совместным изгибом. Вычислив интеграл Мора по участкам, получим линейное соотношение, связывающее прогиб рессоры с консольной нагрузкой:

$$\delta_z(L) = PR^3 \sum_{i=1}^6 \frac{\psi(x_{\Gamma,i-1}, x_{\Gamma,i}, L)}{EJ_{\Sigma,i}},$$

где $\psi(x_{1i}, x_{2i}, L)$ — выражение, учитывающее начальную форму рессоры и неоднородность ее по участкам:

$$\begin{aligned} \psi(x_{1i}, x_{2i}, L) &= \frac{x_{2i} - x_{1i}}{2R} + \left[\sin\left(\frac{L}{R}\right) + \sin\left(\frac{L}{R}\right) \right] \times \\ &\times \left[\cos\left(\frac{x_{2i}}{R}\right) - \cos\left(\frac{x_{1i}}{R}\right) \right] + \frac{1}{4} \sin\left(\frac{2x_{1i}}{R}\right) - \\ &- \frac{1}{4} \sin\left(\frac{2x_{2i}}{R}\right) + \sin\left(\frac{L}{R}\right) \sin\left(\frac{L}{r}\right) \frac{x_{2i} - x_{1i}}{R} = \\ &= \frac{x_{2i} - x_{1i}}{R} + 2 \sin\left(\frac{L}{R}\right) \left[\cos\left(\frac{x_{2i}}{R}\right) - \cos\left(\frac{x_{1i}}{R}\right) \right] + \\ &+ \frac{1}{4} \sin\left(\frac{2x_{1i}}{R}\right) - \frac{1}{4} \sin\left(\frac{2x_{2i}}{R}\right) + \sin^2\left(\frac{L}{R}\right) \frac{x_{2i} - x_{1i}}{R}, \end{aligned}$$

$x_{\Gamma} = (0; 0,15; 0,235; 0,335; 0,43; 0,515; 0,63)$ — вектор граничных координат, разделяющий рессору на шесть участков с однородной структурой.

Разделив суммарный прогиб δ_z на составляющие таким образом, что

$$\begin{aligned} \delta_{zi} &= PR^3 \frac{\psi(x_{\Gamma,i-1}, x_{\Gamma,i}, L)}{EJ_{\Sigma,i}}, \\ \delta_z(L) &= \sum_{i=1}^6 \delta_{zi}, \end{aligned}$$

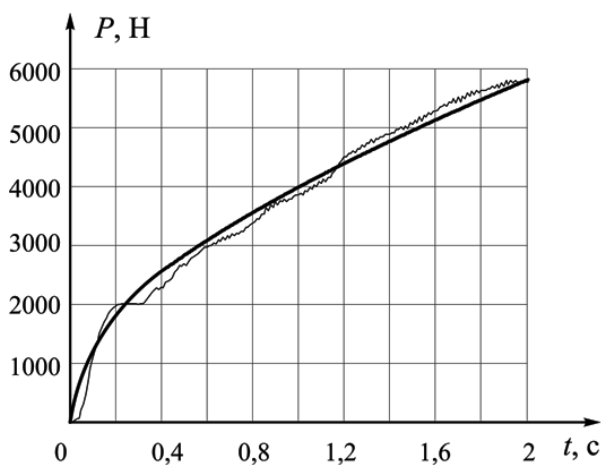
можно получить дробно-дифференциальное уравнение изгиба рессоры:

$$\begin{aligned} A_{5i} D^{\alpha_1 + \alpha_2} [\delta_{zi}(t)] + A_{6i} D^{\alpha_1} [\delta_{zi}(t)] + \\ + A_{7i} D^{\alpha_2} [\delta_{zi}(t)] + A_{8i} \delta_{zi}(t) = \\ = A_{1i} D^{\alpha_1 + \alpha_2} [P(t)] + A_{2i} D^{\alpha_1} [P(t)] + \\ + A_{3i} D^{\alpha_2} [P(t)] + A_{4i} P(t), \end{aligned} \tag{11}$$

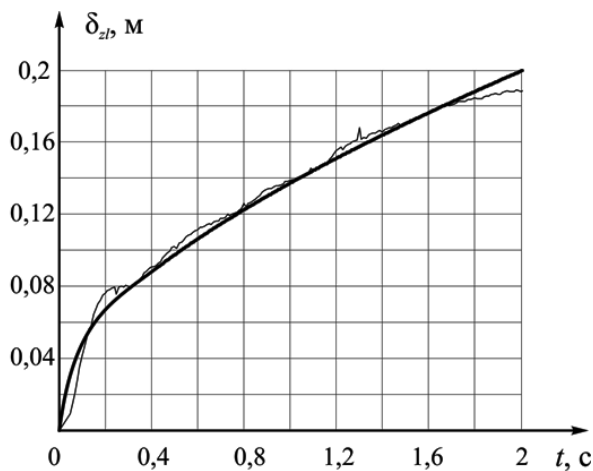
где

$$\begin{aligned} A_{1i} &= 12R^3 \tau_1^{\alpha_1} \tau_2^{\alpha_2} \psi(x_{\Gamma,i-1}, x_{\Gamma,i}, L); \\ A_{2i} &= 12R^3 \tau_1^{\alpha_1} \psi(x_{\Gamma,i-1}, x_{\Gamma,i}, L); \\ A_{3i} &= 12R^3 \tau_2^{\alpha_2} \psi(x_{\Gamma,i-1}, x_{\Gamma,i}, L); \\ A_{4i} &= 12R^3 \psi(x_{\Gamma,i-1}, x_{\Gamma,i}, L); \\ A_{5i} &= E_K n_{Ki} b_{Ki} h_{Ki}^3 \theta_1^{\alpha_1} \tau_2^{\alpha_2} + E_P n_{Pi} b_{Pi} h_{Pi}^3 \tau_1^{\alpha_1} \theta_2^{\alpha_2} + \\ &+ E_C n_{Ci} b_{Ci} h_{Ci}^3 \tau_1^{\alpha_1} \tau_2^{\alpha_2}; \\ A_{6i} &= E_K n_{Ki} b_{Ki} h_{Ki}^3 \theta_1^{\alpha_1} + E_P n_{Pi} b_{Pi} h_{Pi}^3 \tau_1^{\alpha_1} + \\ &+ E_C n_{Ci} b_{Ci} h_{Ci}^3 \tau_1^{\alpha_1}; \\ A_{7i} &= E_K n_{Ki} b_{Ki} h_{Ki}^3 \tau_2^{\alpha_2} + E_P n_{Pi} b_{Pi} h_{Pi}^3 \theta_2^{\alpha_2} + \\ &+ E_C n_{Ci} b_{Ci} h_{Ci}^3 \tau_2^{\alpha_2}; \\ A_{8i} &= E_K n_{Ki} b_{Ki} h_{Ki}^3 + E_P n_{Pi} b_{Pi} h_{Pi}^3 + E_C n_{Ci} b_{Ci} h_{Ci}^3. \end{aligned}$$

Коэффициенты A_i определяют вязкоупругие свойства рессоры и зависят от констант вязкоупругости материалов и ее геометрии.



Регрессия по изгибающей силе



Регрессия по прогибу

Рис. 10. Сравнение нагрузочных характеристик рессоры

Сравнение нагрузочных характеристик ресурсы приведено на рис. 10.

Показатели соответствия имитационной модели экспериментальным данным представлены в табл. 3.

Таблица 3

Показатели соответствия

Показатель качества	Показатель соответствия	
	по силе	по прогибу
Коэффициент детерминации R^2	0,97835	0,99488
Коэффициент корреляции Пирсона r	0,99672	0,98836

Статическая жесткость и параметры гистерезисного демпфирования оцениваются по имитационной модели, работающей по уравнению (11). Для оценки статической жесткости к модели прикладывается максимальная по результатам эксперимента сила $P_{max} = 5\,797,71$ Н. Установившееся значение прогиба составляет $\delta_{уст} = 0,19963$ м. Экспериментально определенное значение прогиба, соответствующее этой силе, $\delta_{экс} = 0,189$ м. Относительная погрешность моделирования $\delta_{изм} = 5,6$ %.

Параметры статической жесткости приведены в табл. 4.

Таблица 4

Параметры статической жесткости ресурсы

Оцениваемый параметр	Эксперимент	Результат моделирования
Статическая жесткость, Н/м	30675,7	29042,3
Относительная погрешность моделирования, %	5,3	

В табл. 5 представлены результаты анализа экспериментальных и смоделированных данных при оценке гистерезисных потерь по осциллограммам записанных значений изгибающей силы и прогиба при частоте возмущения 1,3 Гц.

При имитационном моделировании петля гистерезиса эллиптическая. Сравнение экспериментальной и смоделированной петель гистерезиса приведено на рис. 11. При моделировании, как показано выше, есть погрешность в получении прогибов и усилий, на экспериментальных данных виден перегиб гистерезисной петли, обусловленный несовершенством

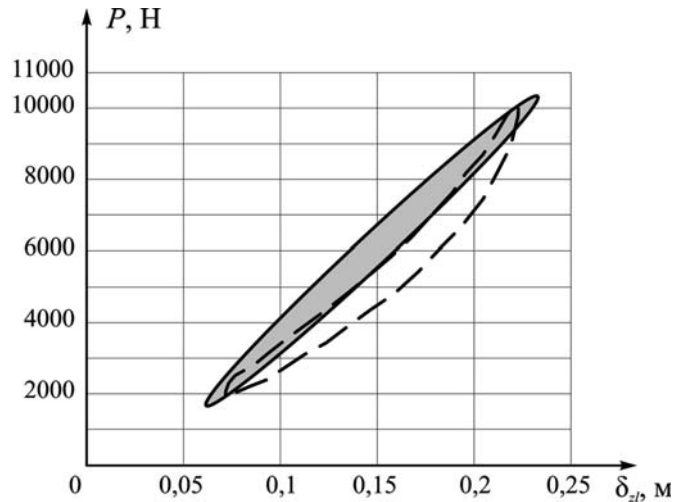


Рис. 11. Сравнение экспериментальной и смоделированной петель гистерезиса

экспериментальной оснастки и оборудования, смоделировать который предложенным методом невозможно. Однако, в энергетическом смысле модели схожи — энергии рассеяния совпадают, как показано в табл. 4, а погрешность моделирования амплитуд прогибов и усилий мала.

Таблица 5

Результаты определения энергии диссипации

Номер периода	Значение энергии диссипации, Дж		Номер периода	Значение энергии диссипации, Дж	
	Эксперимент	Модель		Эксперимент	Модель
1	146,20706	138,67386	7	133,23535	138,67284
2	142,10187	138,67340	8	135,74823	138,67351
3	142,63838	138,67282	9	134,93434	138,67292
4	135,86006	138,67295	10	130,21907	138,67273
5	130,39830	138,67346	11	139,84915	138,67356
6	133,40119	138,67287	12	132,42249	138,67297
Среднее значение для всех периодов:				136,41796	138,67316
Относительная погрешность определения:				$\delta_{изм} = 1,7$ %	

Вычислим коэффициент относительного рассеяния энергии, который по определению равен отношению энергии, рассеянной за цикл колебаний, к максимальному значению упругой энергии за тот же цикл:

$$\psi = \frac{2W}{cA^2}.$$

Значения жесткости взяты из табл. 4, максимального значения амплитуды — на рис. 11. Результаты расчетов коэффициента относительного затухания:

$$\psi_{\text{экс}} \approx 0,1789;$$

$$\psi_{\text{мод}} \approx 0,1853.$$

Мера демпфирования рессоры, оцененная по коэффициенту относительного затухания, близка к требуемым показателям демпфирования, рекомендованным в ряде литературных источников [10–12].

Выводы

Для моделирования механического поведения рессоры и ее компонент под нагрузкой использовалась модель стандартного линейного тела с производными дробного порядка. Несмотря на сложность математического аппарата, производные дробного порядка дают весьма высокие результаты сходимости математических моделей с экспериментальными данными. Относительная погрешность моделирования составила менее 6 %.

Разработанные модели пригодны для описания и прогнозирования вязкоупругих свойств рессор из ПКМ на этапе проектирования.

Применение рессоры из ПКМ с полимерным материалом-заполнителем, позволит для ряда транспортных средств (например, как это было сделано для ВТС «ЗЭТ 6×6») отказаться от металлических упругих элементов и гидравлических амортизаторов в пользу снижения снаряженной массы и массы неподрессоренных частей. Таким образом достигаются все преимущества применения ПКМ в системах поддрессоривания КМ, отмеченные выше.

Литература

1. Corvette's composite leaf spring will weight 80 percent Less // Production. 1980. April. С. 67.
2. Бакешко В.В. Создание и исследование автомобильных листовых рессор из композиционных полимерных материалов: Дис. ... канд. техн. наук: 05.05.03. М., 1993. 180 с.
3. Тимофеева С.Д. Полимерные композиционные материалы в автомобилестроении (обзор) // Пластические массы. 1990. № 9. С. 78–87.
4. Демпфирование колебаний / А. Нашиф, Д. Джоунс, Дж. Хендерсон: Пер. с англ. Л.Г. Корнейчука; Под ред. Э.И. Григолока. М.: Мир, 1988. 448 с.
5. Mainardi F., Gorenflo R. Time-fractional derivatives in relaxation processes: a tutorial survey // Fractional Calculus and Applied Analysis. 2008. N 10. Vol. 3. P. 269–308.
6. Shahsavari R., Ulm F.-J. Indentation analysis of fractional viscoelastic solids // Journal of Mechanics of materials and Structures. 2009. N 4. С. 523–550.
7. Учайкин В.В. Метод дробных производных. Ульяновск: Артишок, 2008. 512 с.
8. Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск: Наука и техника, 1987. 688 с.
9. Дрейпер Н., Смит Г. Прикладной регрессионный анализ. В 2 кн.: Пер. с англ. М.: Финансы и статистика, 1986. 2 кн.
10. Ротенберг Р.В. Подвеска автомобиля. М.: Машиностроение, 1972. 392 с.
11. Проектирование полноприводных колесных машин: В 3 кн. / Под ред. А.А. Полунгяна. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2008. Т. 3. 2008. 432 с.
12. Жеглов Л.Ф. Спектральный метод расчета систем поддрессоривания колесных машин. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана. 2009. 150 с.

Статья поступила 23.06.2011 г.