

УДК 539.3:534.1

DOI 10.18698/0536-1044-2017-1-31-43

Качественные эффекты при колебаниях кольцевых подкрепляющих элементов с присоединенной массой, как частный случай тонкой бесконечно длинной круговой цилиндрической оболочки*

С.В. СерёгинКомсомольский-на-Амуре государственный технический университет, 681024,
Комсомольск-на-Амуре, Российская Федерация, пр-т Ленина, д. 27

Qualitative Effects of Vibrations of Reinforcing Ring Elements with Attached Mass, as a Special Case of an Infinitely Long Thin Circular Cylindrical Shell

S.V. SereginKomsomolsk-na-Amure State Technical University, 681024, Komsomolsk-on-Amur, Russian Federation, Lenin Ave,
Bldg. 27

e-mail: Seregin-komsHome@yandex.ru



Изучено влияние малой присоединенной массы на частоты и формы изгибных колебаний бесконечно длинной круговой цилиндрической оболочки — кольца, находящегося в условиях плоской деформации. В качестве математической модели использованы уравнения движения поперечных колебаний, полученные из аналогичных уравнений теории пологих оболочек Донелла–Муштари–Власова. Предложен новый подход к построению математической модели, предполагающий, что присоединенная масса уже в линейной постановке приводит к взаимодействию сопряженных изгибных форм колебаний с радиальными. Полученная методом Бубнова–Галеркина новая система динамических уравнений свидетельствует о том, что дополнительные включения такого рода приводят к связанности и взаимодействию низкочастотных изгибных колебаний оболочки с высокочастотными радиальными колебаниями, при этом радиальные колебания выступают в качестве дополнительной инерционной связи между сопряженными изгибными формами. Показано, что радиальные колебания малозаметны, однако именно их учет позволяет сделать вывод о влиянии параметра волнообразования, зависящего от относительной толщины кольца, на меньшую из расщепленных собственных частот. Таким образом, эффект снижения меньшей из расщепленных собственных частот преимущественно изгибных колебаний зависит не только от величины присоединенной массы, как принято считать в настоящее время, но и от геометрических и волновых параметров оболочки. Обнаружено, что при определенных значениях параметра волнообразования частоты и амплитуды преимущественно как радиальных, так и изгибных колебаний могут быть соизмеримы. Это означает, что при динамическом воздействии на оболочку эффект резонанса может возникать не только на частотах изгибных форм колебаний, но и на близких к ним частотах, соответствующих радиальным формам колебаний. Полученные резуль-

* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 16-31-00045 мол_а).

таты и выводы качественно согласуются с известными экспериментальными данными и численными расчетами и могут быть обобщены для случая колебаний тонких круговых цилиндрических оболочек конечной длины, несущих присоединенную массу.

Ключевые слова: тонкая круговая цилиндрическая оболочка, изолированное кольцо, присоединенная масса, динамическая асимметрия, изгибные и радиальные колебания, собственные частоты и формы колебаний оболочек, расщепление изгибного частотного спектра.

i This paper investigates the effect of a small attached mass on the frequency and form of flexural vibrations of an infinitely long circular cylindrical shell-ring, under plane deformation conditions. The equations of motion for transverse vibrations are used as a mathematical model. These equations are obtained from analogous equations of the Donnell–Mushtari–Vlasov theory of shallow shells. A new approach to the construction of a mathematical model is proposed by the author. This approach suggests that the attached mass in the linear formulation leads to the interaction between the conjugate and the radial flexural forms of vibrations. The new system of dynamic equations obtained by the Bubnov–Galerkin method suggests that such additional inclusions lead to the connectedness and interaction of low-frequency flexural vibrations of the shell with high-frequency radial vibrations. In this case the radial vibrations act as an additional inertial connection between the conjugate flexural forms. It is shown that the radial vibrations are inconspicuous. However, by taking them into account, it is possible to arrive at a qualitative conclusion about the impact of the wave formation parameter on the smaller of the split eigenfrequencies. This parameter depends on the relative thickness of the ring. This means that the effect of reducing the smaller of the split eigenfrequencies of predominantly flexural vibrations depends not only on the attached mass, as it is assumed at the moment, but also on the geometric and wave parameters of the shell. It is established that at certain values of the wave formation parameter, the frequencies and amplitudes of predominantly radial vibrations can be commensurate with the frequencies and amplitudes of predominantly flexural vibrations. This means that when the shell is subjected to dynamic impact, the resonance effect may occur not only at frequencies of the flexural vibrations, as follows from the known analytical solutions, but also at frequencies corresponding to the radial vibrations. The results and conclusions obtained are in qualitative agreement with the available experimental data and numerical calculations. These results can be generalized to the case of vibrations of thin circular cylindrical shells of finite length that carry attached mass.

Keywords: thin infinitely long shell, isolated ring, attached mass, dynamic asymmetry, flexural and radial vibrations, natural frequencies and forms, splitting the spectrum.

Тонкие круговые цилиндрические оболочки находят широкое применение в современных отраслях промышленности. В авиационной, судостроительной и космической технике к корпусам прикрепляют двигатели, пассажирские кресла, топливные баки и элементы автоматики. Многие из необходимых для эксплуатации объектов присоединены непосредственно к кольцевым подкрепляющим элементам (шпангоутам). В аналитических исследованиях такие дополнительные элементы интерпретируются как присоединенные массы, сосредоточенные или распределенные по некоторой поверхности.

Обоснованные требования техники к высокой точности расчетов оболочечных конструкций на прочность вызывают широкий интерес

к исследованиям в данной области. В научной литературе представлено множество работ по изучению влияния статических характеристик оболочек при различных видах воздействий на них [1–3]. Большая их часть посвящена изучению устойчивости [4–7], а отдельные статьи оптимизации параметров оболочки [8] и влиянию температурных воздействий на изотропный или композиционный материал [9].

Меньшая часть работ связана с изучением динамической прочности оболочек и ее конструктивных элементов. Собственные частоты и формы колебаний оболочек переменной плотности исследованы в статье [10], композиционная структура и вязкоупругие свойства оболочек конечной длины — в работах [11–12], оболочки, частично заполненные жидкостью —

в статье [13]. Не менее актуальными являются задачи определения прочности оболочек, имеющих различные виды динамической асимметрии, однако в научной литературе по данной тематике имеются лишь единичные работы [14–20].

На сегодняшний день некоторые вопросы динамики оболочек с присоединенными элементами остаются не до конца изученными. Так, в работе [21] получена формула, свидетельствующая о том, что эффект снижения меньшей из расщепленных собственных частот низшего тона колебаний оболочки, несущей присоединенную массу, зависит только от величины присоединенной массы. Однако, сопоставительный анализ [22] показал, что такой вывод не всегда согласуется с экспериментальными данными [21, 23]. В работах [24–31] установлено, что расхождение результатов аналитического исследования и численного расчета, в некоторых случаях может быть весьма существенным. В статьях [22, 29–31] сделан вывод о том, что эффект снижения частоты зависит не только от значения присоединенной массы, как принято считать в настоящее время [21, 32–34], но и от геометрических и волновых параметров оболочки.

Цель работы — на примере более простой (предельной) задачи установить причины, приводящие к таким противоречивым результатам, приблизиться к решению рассмотренной проблемы, уточнить математическую модель, а также получить новое решение задачи и качественный вывод о влиянии присоединенной массы на динамическое поведение бесконечно длинной круговой цилиндрической оболочки — кольца, находящегося в условии плоской деформации.

Проблемы, затрагиваемые в статье, имеют и самостоятельное значение, поскольку изолированное кольцо можно интерпретировать в качестве расчетной модели кольцевых подкрепляющих элементов, применяемых в различных отраслях промышленности.

Математическая модель. Рассмотрено кольцо единичной ширины, радиусом R , толщиной h и массой M_0 . Считается, что к кольцу при $y = y_0$ присоединена дополнительная масса M .

Уравнения движения. Бесконечно длинную круговую цилиндрическую оболочку, в которой все поперечные сечения деформируются оди-

наково, можно рассматривать как кольцо единичной ширины, выделенное из оболочки двумя сечениями, перпендикулярными к ее оси. Уравнения, описывающие поперечные колебания кольца, получим из аналогичных уравнений теории пологих оболочек [35], использованных в работе [21] при устремлении длины оболочки к бесконечности:

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_y}{\partial y} &= 0; \\ D \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} &= \frac{N_y}{R} - \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - M \delta(y - y_0) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь N_y — окружное погонное динамическое усилие; D — цилиндрическая жесткость, $D = Eh^3/[12(1-\mu^2)]$, где E — модуль Юнга, μ — коэффициент Пуассона; $w(y, t)$ — динамический прогиб оболочки; ρ — погонная плотность; t — время; y_0 — круговая координата места крепления массы к кольцу; $\delta(y)$ — функция Дирака, учитывающая влияние присоединенной массы.

Точность уравнений (1) ограничена теми же пределами, что и точность исходных уравнений теории пологих оболочек, при выводе которых были отброшены члены порядка $1/n^2$ малости по сравнению с единицей и тангенциальные силы инерции [35]. Для количественной оценки, когда n — число волн окружных динамических деформаций мало, уравнения движения можно уточнить, заменив $D(\partial^4 w/\partial y^4)$ на $D(\partial^2 w/\partial y^2 + w/R^2)(\partial^2/\partial y^2 + 1/R^2)$ [36]. В данной работе это не сделано, поскольку ее целью является получение не столько количественной, сколько качественной оценки влияния присоединенной массы на колебания изолированного кольца. Полученные на основе предложенной математической модели численные результаты удовлетворительны (погрешность составляет менее 6 %) при $n > 4$ [37], что практически всегда выполняется для оболочек конечной длины.

Для устройств, применяемых в других областях техники, где требования к точности численных расчетов велики, например для волновых гироскопов, необходимо использовать другие, более точные, теории и методы их решения [38–40].

Условие периодичности решения. Для замкнутой оболочки все величины, определяющие ее напряженно-деформированное состоя-

ние, должны возвращаться к своим первоначальным значениям после обхода всего контура поперечного сечения. В частности, для окружного перемещения точки срединной поверхности $v(y,t)$ условие периодичности решения имеет вид

$$\int_0^{2\pi R} \frac{\partial v}{\partial y} dy = \int_0^{2\pi R} \left(\frac{w}{R} + \alpha(t) \right) dy = 0,$$

где $\alpha(t)$ — функция, зависящая от времени.

Отсюда

$$\alpha(t) = \frac{1}{2\pi R} \int_0^{2\pi R} \left(-\frac{w}{R} \right) dy.$$

Динамическая конечномерная модель. В ранних аналитических работах по изучению собственных характеристик оболочек, несущих присоединенную массу, вследствие того, что динамический прогиб аппроксимировался неполной системой тригонометрических функций, авторы приходили к ряду несостоятельных выводов: зависимость частоты от места крепления дополнительной массы по окружной координате, отсутствие расщепления изгибного частотного спектра и др. В настоящее время принято считать, что малая присоединенная масса приводит к взаимодействию сопряженных изгибных форм. Однако и в этом случае, как будет показано в настоящей статье, полученный результат не всегда качественно и количественно согласуется с данными численных и экспериментальных исследований.

Предлагается иной подход к построению математической модели. Считаем, что присоединенная масса является тем фактором динамической асимметрии, который уже в линейной постановке приводит не только к связанности сопряженных изгибных форм, но и к взаимодействию низкочастотных изгибных колебаний с высокочастотными радиальными. Тогда упругий динамический прогиб кольца можно аппроксимировать выражением

$$w(y,t) = \sum_n^N (f_1^n \sin \beta y + f_2^n \cos \beta y + f_3), \quad (2)$$

где f_1 и f_2 — обобщенные координаты, соответствующие изгибным формам колебаний; f_3 — обобщенная координата, соответствующая радиальным формам колебаний, дополнительно введенная в известное выражение [21]; $\beta = n/R$; $n = 1, 2, 3, \dots, N$.

Собственные частоты и формы колебаний. Подстановка выражения (2) в формулу (1) позволяет найти функцию $\alpha(t)$, а затем и окружное усилие $N_y(t)$:

$$N_y(y,t) = N_y(t) = \frac{Eh}{1-\mu^2} \left(\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{w}{R} \right) = \frac{Eh}{1-\mu^2} \alpha(t).$$

Ортогонализация второго уравнения (1) к форме прогиба (2) в первом приближении ($N = 1$) приводит к системе связанных динамических (модальных) уравнений относительно безразмерных обобщенных координат $a_i(\tau) = f_i(\tau)/h$ ($i = 1, 2, 3$):

$$\begin{aligned} \ddot{a}_1 + \omega_n^2 a_1 + \frac{2M}{M_0} (\ddot{a}_1 \sin \beta y_0 + \ddot{a}_2 \cos \beta y_0 + \ddot{a}_3) \sin \beta y_0 &= 0; \\ \ddot{a}_2 + \omega_n^2 a_2 + \frac{2M}{M_0} (\ddot{a}_1 \sin \beta y_0 + \ddot{a}_2 \cos \beta y_0 + \ddot{a}_3) \cos \beta y_0 &= 0; \\ \ddot{a}_3 + \frac{12}{\varepsilon} \omega_n^2 a_3 + \frac{M}{M_0} (\ddot{a}_1 \sin \beta y_0 + \ddot{a}_2 \cos \beta y_0 + \ddot{a}_3) &= 0, \end{aligned} \quad (3)$$

где ω_n^2 — приближенное значение квадрата безразмерной частоты изгибных колебаний динамически симметричного кольца, $\omega_n^2 = Dn^4/(\rho h R^4)$; ε — параметр волнообразования, зависящий от относительной толщины кольца, $\varepsilon = n^4(h/R)^2$.

Точками обозначено дифференцирование по безразмерному времени $\tau = \lambda t$ (λ — собственная частота незагруженного кольца). Связь между обобщенными координатами $a_1(\tau)$, $a_2(\tau)$, $a_3(\tau)$ обусловлена наличием присоединенной массы $a_i(\tau) = a_i \cos(\lambda t)$ и носит упругий характер.

Из полученной системы модальных уравнений видно, что присоединенная масса приводит не только к связанности сопряженных изгибных форм, но и к взаимодействию низкочастотных изгибных колебаний с высокочастотными радиальными. При этом радиальные колебания выступают в качестве дополнительной инерционной связи между сопряженными изгибными формами.

Частотные уравнения, соответствующие выражениям (3), определяют три безразмерные собственные частоты Ω_{ni} ($\Omega_{ni} = \omega_{ni}/\omega_n$, где ω_{ni} — частота колебаний кольца с присоединенной массой; $i = 1, 2, 3$), которые не зависят

от круговой координаты места крепления присоединенной массы к кольцу.

Первым двум частотам Ω_{n1} и Ω_{n2} соответствуют преимущественно изгибные, а третьей Ω_{n3} — в основном радиальные колебания. В новом решении меньшая из расщепленных собственных частот Ω_{n1} зависит как от величины присоединенной массы, так и от параметра волнообразования ϵ .

В традиционном решении [21] при устремлении длины оболочки к бесконечности вместо динамических уравнений (3) получим систему из первых двух уравнений, связывающих между собой только сопряженные изгибные формы. Таким образом, в отличие от нового решения, традиционная система динамических уравнений не содержит параметра волнообразования ϵ , и частотное уравнение, соответствующее этой системе, определяет две безразмерные собственные частоты изгибных колебаний кольца Ω_{n1} и Ω_{n2} , также не зависящих от места крепления массы по круговой координате. Меньшая из расщепленных собственных частот $\Omega_{n1} = 1/\sqrt{1+2M/M_0}$, т. е. она зависит только от величины присоединенной массы и не зависит от волнового параметра кольца ϵ . Частота Ω_{n2} равна 1 и в новом, и в традиционном решении. К такому же результату приходят и другие исследователи, используя иные подходы и методы решения аналогичных задач [23, 32–35].

На рис. 1 приведена зависимость частоты Ω_{n1} от параметра волнообразования ϵ и относительной присоединенной массы M/M_0 , где пунктирные кривые 1–3 демонстрируют традиционное решение, а сплошная кривая 4 — новое.

Из рис. 1 следует, что расщепление изгибно-частотного спектра ($\Omega_{n2} - \Omega_{n1}$), обусловлен-

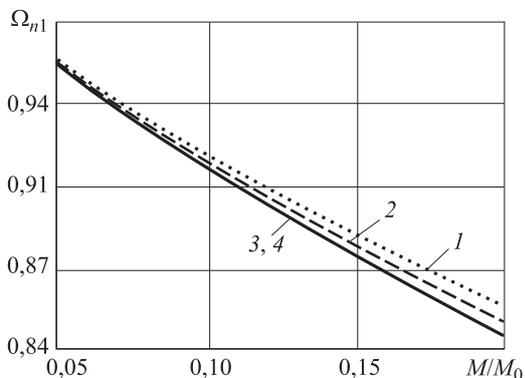


Рис. 1. Зависимость меньшей из расщепленных собственных частот Ω_{n1} от величины присоединенной массы M/M_0 и параметра волнообразования $\epsilon = 5$ (1), 3 (2) и 0,1 (3): 1–3 — новое решение; 4 — традиционное решение

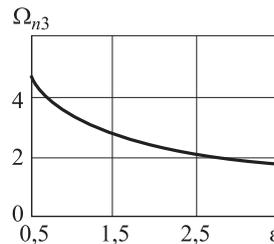


Рис. 2. Зависимость частоты преимущественно радиальных колебаний Ω_{n3} от параметра волнообразования ϵ ($M/M_0 = 0,1$)

ное наличием присоединенной массы, увеличивается с ее ростом. При фиксированном значении M/M_0 с увеличением параметра ϵ расстройка уменьшается. При малом параметре ϵ ($\epsilon = 0,1$) новое решение количественно практически совпадает с традиционным.

Вывод о том, что эффект снижения основной частоты системы оболочка–масса зависит не только от значения присоединенной массы, но и от геометрических и волновых параметров оболочки, сделан и в недавних работах [29, 30].

Результаты расчета частоты преимущественно радиальных колебаний Ω_{n3} , выполненных при относительной величине присоединенной массе $M/M_0 = 0,1$, приведены на рис. 2.

Дополнительное исследование показало, что частота Ω_{n3} практически не зависит от M/M_0 . Следует отметить, что Ω_{n3} с увеличением параметра волнообразования ϵ становится соизмерима с частотами преимущественно изгибных колебаний Ω_{n1} и Ω_{n2} . Это означает, что при динамическом воздействии на оболочку эффект резонанса может возникать не только на частотах Ω_{n1} и Ω_{n2} , как принято считать на основании известных аналитических решений, но и на близких им частотах, соответствующих радиальным формам колебаний.

В экспериментальной работе [41] отмечены близость собственных частот изгибных и радиальных колебаний, а также их связанность. Однако, к сожалению, полученным результатам до настоящего времени не уделяется должного внимания в задачах динамики оболочек, несущих присоединенные массы.

Формы колебаний. При движении кольца с меньшей из расщепленных собственных частот Ω_{n1} косинусоидальная форма его колебаний взаимодействует с радиальной, масса при этом подвижна. Если кольцо совершает колебания с большей из расщепленных собственных частот

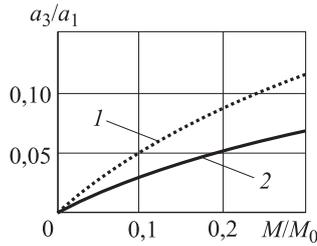


Рис. 3. Зависимость отношения амплитуд a_3/a_1 от относительной присоединенной массы M/M_0 при параметре волнообразования $\varepsilon = 0,5$ (1) и $0,3$ (2)

тот ω_{n2} , то форма его колебаний — синусоидальная (как и у кольца без массы), и масса при этом неподвижна (формы колебаний имеют узел в точке крепления массы).

На рис. 3 приведено отношение амплитуд в основном радиальных форм колебаний a_3 к преимущественно изгибным a_1 в зависимости от M/M_0 и ε , соответствующее меньшей из расщепленных собственных частот Ω_{n1} .

Увеличение присоединенной массы и параметра волнообразования повышает вклад радиальных колебаний в общую картину динамических деформаций бесконечно длинной оболочки. В целом, радиальные колебания малозаметны, однако именно их учет позволяет установить качественную особенность — влияние параметра волнообразования, зависящего от геометрических и волновых параметров кольца, на меньшую из расщепленных собственных частот.

Численное решение методом конечных элементов (МКЭ). В программном комплексе MSC

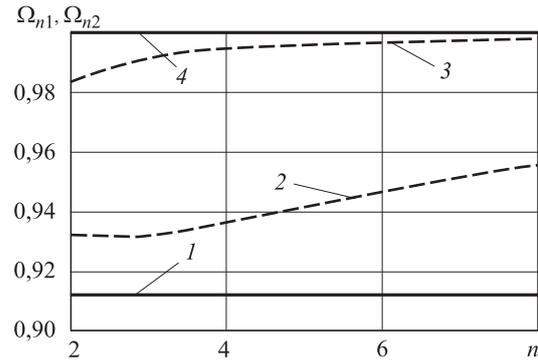


Рис. 4. Зависимость расщепленных безразмерных частот колебаний кольца с присоединенной массой Ω_{n1} (1, 2) и Ω_{n2} (3, 4) от числа окружных волн n :
1, 4 — новое аналитическое решение;
2, 3 — решение, полученное МКЭ

Nastran смоделирована и решена задача колебаний изолированного кольца ($R=1$ м, $R/h=200$, $E=2 \cdot 10^{11}$ МПа, $\rho=7800$ кг/м³), несущего присоединенную массу $M=0,1M_0$. Число конечных элементов — 2000.

Зависимость безразмерных собственных частот, соответствующих симметричной и антисимметричной (сопряженным) изгибным формам колебаний кольца с присоединенной массой, от числа окружных волн n приведена на рис. 4. Сплошные линии 1, 4 демонстрируют новое уточненное аналитическое решение, а штриховые 2, 3 — решение, полученное МКЭ.

Из рис. 4 следует, что в решении, полученном МКЭ, как и в уточненном аналитическом решении (система модальных уравнений (3)), при фиксированном значении M/M_0 и $n \geq 3$ мень-

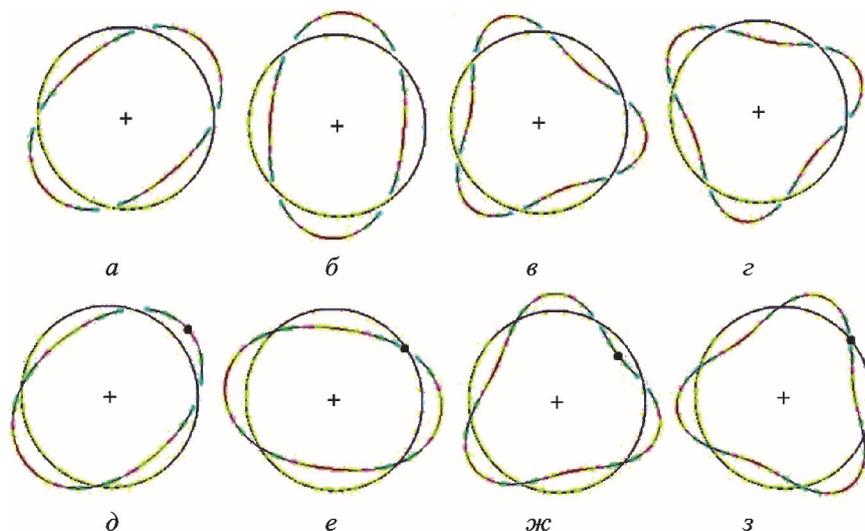


Рис. 5. Формы колебаний незатянутого кольца (а–г) и кольца с присоединенной массой (д–з):
а, б — $n=2$, $\lambda_2=3,12$ Гц; в, г — $n=3$, $\lambda_3=8,83$ Гц; д — $n=2$, $\lambda_{21}=2,76$ Гц; е — $n=2$, $\lambda_{22}=3,04$ Гц;
ж — $n=3$, $\lambda_{31}=7,88$ Гц; з — $n=3$, $\lambda_{32}=8,71$ Гц

шая из расщепленных собственных частот растет с увеличением числа n , входящего в состав формулы для определения параметра волнообразования, и расщепление частотного спектра уменьшается. Несколько неожиданной является особенность динамического поведения частот в диапазоне $2 \leq n \leq 4$, которая не отображена в известных аналитических решениях. Частота сначала снижается, а затем возрастает по отношению к частоте колебаний геометрически идеального кольца. Такая специфическая особенность обнаружена и в другой работе при численном изучении совместного влияния начальных отклонений от идеальной круговой формы и присоединенной массы [27].

На рис. 5 представлены сопряженные формы колебаний незагруженного кольца ($a-z$) и кольца с присоединенной массой ($d-z$). Точкой обозначено место крепления дополнительной массы.

Проведенное исследование и анализ рис. 5. позволили сделать вывод о том, что эффект снижения частоты в численном решении, как и в уточненном аналитическом, зависит не только от значения присоединенной массы, но и от геометрических и волновых параметров кольца.

Частоты, соответствующие радиальным формам колебаний, в численном расчете не рассматривались, поскольку в задачах колебаний кольца с присоединенной массой они возникают на высших частотах спектра, что выходит за практическую значимость исследований. Однако, учет именно радиальных колебаний в математической модели меняет представление о динамическом поведении колец на низших частотах спектра.

При движении кольца с большей из расщепленных собственных частот λ_{n2} форма его колебаний синусоидальная (как и у кольца без массы), и масса, при этом, неподвижна (ее положение по окружности совпадает с узлом формы). Если кольцо совершает колебания с меньшей из расщепленных собственных частот λ_{n1} , то форма его колебаний преимущественно косинусоидальная, а масса подвижна. Кроме того, наблюдается небольшое смещение амплитуд окружных волн к центру кривизны кольца, несущего присоединенную массу, что свидетельствует о наличии радиальных колебаний, которые учтены в новом аналитическом решении [28, 42–44].

В таблице приведено сопоставление абсолютных значений низших частот колебаний

Сопоставление значений частот

Число окружных волн n	Частота λ_{n1} , Гц		Расхождение Δ , %
	Предлагаемая методика	МКЭ	
2	4,5	2,9	35,3
3	9,6	8,2	14,3
4	17,1	15,8	7,2
5	27	25,7	4,5
6	39,4	38,0	3,4
7	54,2	52,6	2,9
8	71,1	69,5	2,3
9	90,1	88,7	1,5

кольца с присоединенной массой, вычисленных по предлагаемой методике (выражение (2)) и МКЭ.

Таким образом, предложенная математическая модель дает приемлемые результаты при условии $n > 4$, которое, практически всегда выполняется для оболочек конечной длины.

Выводы

1. Предложенный подход к построению математической модели колебаний оболочки, несущей присоединенную массу, позволил установить, что присоединенная масса является тем фактором динамической асимметрии, который уже в линейной постановке приводит к расщеплению изгибного частотного спектра и инерционному взаимодействию сопряженных изгибных форм колебаний с радиальными. Характеристическое уравнение, соответствующее полученной системе модальных уравнений, определяет три частоты: двум из них соответствуют преимущественно изгибные, а третьей — в основном радиальные формы колебаний. Эффект снижения меньшей из расщепленных собственных частот преимущественно изгибных колебаний зависит не только от значения присоединенной массы, но и от геометрических и волновых параметров бесконечно длинной оболочки (изолированного кольца). Большая из расщепленных собственных частот и в новом, и в традиционном решениях равна единице, т. е. равна частоте колебаний незагруженного кольца, а в численном решении близка к единице.

2. Выявлено, что частоты и амплитуды преимущественно радиальных и изгибных колебаний могут быть соизмеримы. Это означает, что

при динамическом воздействии на оболочку эффект резонанса может возникать не только на частотах изгибных колебаний, но и при близких им частотах, соответствующих радиальным формам колебаний. Данные обстоятельства свидетельствуют о необходимости учета осесимметричных колебаний в конечномер-

ной модели оболочек с инерционными неоднородностями.

3. Полученные результаты качественно согласуются с известными экспериментальными и расчетными данными и могут быть обобщены для случая колебаний оболочек конечной длины.

Литература

- [1] Леоненко Д.В., Старовойтов Э.И. Импульсные воздействия на трехслойные круговые цилиндрические оболочки в упругой среде. *Известия Саратовского университета. Новая серия. Сер. Математика. Механика. Информатика*, 2015, т. 15, № 2, с. 202–209.
- [2] Журавлева Е.Н., Габбасов Р.Ф., Нгуен Х.А., Хоанг Т.А. Численное решение циклически симметричной задачи по расчету круговой цилиндрической оболочки. *Промышленное и гражданское строительство*, 2015, № 6, с. 10–14.
- [3] Спасская М.В., Трещев А.А. Изгиб круговой цилиндрической оболочки из анизотропного разносопротивляющегося материала. *Строительство и реконструкция*, 2015, № 3 (59), с. 53–59.
- [4] Бочкарев С.А., Лекомцев С.В., Матвеев В.П. Собственные колебания и устойчивость функционально-градиентных цилиндрических оболочек вращения под действием механических и температурных нагрузок. *Механика композиционных материалов и конструкций*, 2015, т. 21, № 2, с. 206–220.
- [5] Боярская М.Л., Филиппов С.Б. Устойчивость цилиндрической оболочки, подкрепленной шпангоутами с тавровым поперечным сечением. *Вестник Санкт-Петербургского университета. Сер. 1. Математика. Механика. Астрономия*, 2015, т. 2, № 3, с. 431–442.
- [6] Зелинская А.В., Товстик П.Е. Устойчивость при осевом сжатии трансверсально изотропной цилиндрической оболочки со слабо закрепленным криволинейным краем. *Вестник Санкт-Петербургского университета. Сер. 1. Математика. Механика. Астрономия*, 2015, т. 2, № 2, с. 235–248.
- [7] Яковлев С.С., Ремнев К.С. Условие потери устойчивости в виде гофров при обжиге трубной заготовки из анизотропного материала. *Известия высших учебных заведений. Машиностроение*, 2014, № 8(653), с. 20–27.
- [8] Адамович И.А., Филиппов С.Б. Оптимизация параметров подкрепленной цилиндрической оболочки. *Вестник Санкт-Петербургского университета. Сер. 1. Математика. Механика. Астрономия*, 2015, т. 2, № 2, с. 226–234.
- [9] Спасская М.В., Трещев А.А. Термоупругое деформирование цилиндрической оболочки из анизотропного разносопротивляющегося материала. *Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Сер. Механика предельного состояния*, 2015, № 1 (23), с. 65–74.
- [10] Мочалин А.А. Параметрические колебания неоднородной круговой цилиндрической оболочки переменной плотности при различных краевых условиях. *Известия Саратовского университета. Новая серия. Сер. Математика. Механика. Информатика*, 2015, т. 15, № 2, с. 210–215.
- [11] Нетребко А.В., Пшеничнов С.Г. Некоторые задачи динамики линейно-вязкоупругих цилиндрических оболочек конечной длины. *Проблемы прочности и пластичности*, 2015, т. 77, № 1, с. 14–22.
- [12] Кузнецова Е.Л., Леоненко Д.В., Старовойтов Э.И. Собственные колебания трехслойных круговых цилиндрических оболочек в упругой среде. *Известия Российской академии наук. Механика твердого тела*, 2015, № 3, с. 152–160.
- [13] Бочкарев С.А., Лекомцев С.В. Собственные колебания частично заполненных жидкостью некруговых цилиндрических оболочек с учетом плескания свободной поверхности. *Вычислительная механика сплошных сред*, 2014, т. 7, № 4, с. 471–480.

- [14] Козарь Д.М., Крауиньш П.Я. Определение собственной частоты колебаний упругой оболочки и ее присоединенной массы. *Теоретические и прикладные аспекты современной науки*, 2014, № 1, с. 21–29.
- [15] Кирпичников В.Ю., Кошечев А.П., Савенко В.В. Экспериментальное исследование вибраций и звукоизлучения оболочки с распределенной по участку ее поверхности массой. *Труды ЦНИИ им. акад. А.Н. Крылова*, 2014, № 80(364), с. 53–64.
- [16] Полуниин А.И. Математическое моделирование влияния точечных масс на динамику вращающейся оболочки с опорами. *Вестник Белгородского государственного технологического университета им. В.Г. Шухова*, 2010, № 3, с. 197–199.
- [17] Склезнев А.А. Влияние технологических отверстий на собственные частоты колебаний сетчатых композитных конструкций летательных аппаратов. *Вестник Гомельского государственного технического университета им. П.О. Сухого*, 2012, № 4(51), с. 3–10.
- [18] Antufev V.A. Vibrations of a shell with the discretely attached dynamic subsystem. *Russian Aeronautics*, 2008, vol. 51, no. 3, pp. 227–231.
- [19] Antufev V.A., Smiyan A.B. Experimental study of strain for plates discretely connected to a cylindrical shell. *Russian Aeronautics*, 2012, vol. 55, no. 4, pp. 339–342.
- [20] Antufev V.A., Konovalov A.V. Effect of heating on the dynamic behavior of a shell with partially damaged thermal insulation. *Russian Aeronautics*, 2014, vol. 57, № 1, pp. 1–5.
- [21] Кубенко В.Д., Ковальчук П.С., Краснопольская Т.С. *Нелинейное взаимодействие форм изгибных колебаний цилиндрических оболочек*. Киев, Москва, Наукова думка, 1984. 220 с.
- [22] Серёгин С.В., Лейзерович Г.С. Влияние присоединенной массы на динамические характеристики тонкой оболочки. *Проблемы машиностроения и автоматизации*, 2015, № 4, с. 83–89.
- [23] Андреев Л.В., Станкевич А.И., Дышко А.Л., Павленко И.Д. *Динамика тонкостенных конструкций с присоединенными массами*. Москва, Изд-во МАИ, 2012. 214 с.
- [24] Серёгин С.В. Исследование динамических характеристик оболочек с отверстиями и присоединенной массой. *Вестник МГСУ*, 2014, № 4, с. 52–58. Doi: 10.22227/1997-0935.2014.4.52-58.
- [25] Серёгин С.В. Влияние присоединенного тела на частоты и формы свободных колебаний цилиндрических оболочек. *Строительная механика и расчет сооружений*, 2014, № 3, с. 35–39.
- [26] Лейзерович Г.С., Приходько Н.Б., Серёгин С.В. О влиянии малой присоединенной массы на колебания разнотолщинного кругового кольца. *Строительство и реконструкция*, 2013, № 4, с. 38–42.
- [27] Лейзерович Г.С., Приходько Н.Б., Серёгин С.В. О влиянии малой присоединенной массы на расщепление частотного спектра кругового кольца с начальными неправильностями. *Строительная механика и расчет сооружений*, 2013, № 6, с. 49–51.
- [28] Серёгин С.В. Численное и аналитическое исследование свободных колебаний круговых цилиндрических оболочек, несущих присоединенную массу, линейно распределенную вдоль образующей. *Вычислительная механика сплошных сред*, 2014, т. 7, № 4, с. 378–384. Doi: 10.7242/1999-6691/2014.7.4.36.
- [29] Серёгин С.В. Влияние площади контакта и величины линейно распределенной и сосредоточенной массы с круговой цилиндрической оболочкой на частоты и формы свободных колебаний. *Вестник МГСУ*, 2014, № 7, с. 64–74. Doi: 10.22227/1997-0935.2014.7.64-74.
- [30] Серёгин С.В. Об эффекте расщепления изгибного частотного спектра тонких круговых цилиндрических оболочек, несущих присоединенную массу. *Строительная механика и расчет сооружений*, 2014, № 6(257), с. 59–61.
- [31] Серёгин С.В. Свободные колебания тонкой круговой цилиндрической оболочки, ослабленной отверстием. *Известия высших учебных заведений. Авиационная техника*, 2015, № 3, с. 9–13. Doi: 10.3103/S1068799815030022.
- [32] Паламарчук В.Г. Свободные колебания системы, состоящей из ребристой цилиндрической оболочки и абсолютно твердого тела. *Прикладная механика*, 1978, т. 14, № 4, с. 56–62.
- [33] Кононенко В.О., Паламарчук В.Г., Носаченко А.М. Свободные колебания ребристой цилиндрической оболочки с присоединенной массой. *Прикладная механика*, 1977, 13, № 1, с. 40–46.

- [34] Жигалко Ю.П., Шалабанов А.К. Влияние внешнего демпфирования на частоты колебаний пластин и оболочек, несущих сосредоточенные массы. *Исследования по теории пластин и оболочек*, 1975, вып. 11, с. 261–269.
- [35] Вольмир А.С. *Нелинейная динамика пластин и оболочек*. Москва, Наука, 1972. 431 с.
- [36] Evensen D.A. Nonlinear flexural vibrations of thin circular rings. *Trans ASME. J. Appl. Mech.*, 1965, vol. 33, no. 3, pp. 553–560.
- [37] Бидерман В.Л. *Теория механических колебаний*. Москва, Высшая школа, 1980. 408 с.
- [38] Басараб М.А., Ивойлов М.А., Матвеев В.А. Оптимизация балансировки волнового твердотельного гироскопа с помощью нейронной сети хопфилда. *Наука и образование. МГТУ им. Н.Э. Баумана*, 2012, № 7. URL: <http://technomag.bmstu.ru/doc/416090.html> (дата обращения 12 февраля 2016).
- [39] Матвеев В.А., Лунин Б.С., Басараб М.А., Чуманкин Е.А. Балансировка металлических резонаторов волновых твердотельных гироскопов низкой и средней точности. *Наука и образование. МГТУ им. Н.Э. Баумана*, 2013, № 6. URL: <http://technomag.bmstu.ru/doc/579179.html> (дата обращения 12 февраля 2016).
- [40] Матвеев В.А., Липатников В.И., Алехин А.В. *Проектирование волнового твердотельного гироскопа*. Москва, Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 1998. 168 с.
- [41] Абакумов А.И., Егуннов В.В., Мохов В.Н., Певницкая А.В., Соловьев В. П., Учаев А.А. Поведение сферической оболочки с присоединенной массой при импульсном нагружении. *Прикладные проблемы прочности и пластичности*, 1984, № 1, с. 109–113.
- [42] Серёгин С.В. *Динамика тонких цилиндрических оболочек с присоединенной массой*. Комсомольск-на-Амуре, КнАГТУ, 2016. 175 с.
- [43] Серёгин С.В. Свободные изгибно-радиальные колебания тонкой круговой цилиндрической оболочки, несущей присоединенную массу. *Вестник МГСУ*, 2014, № 11, с. 74–81. Doi: 10.22227/1997-0935.2014.11.74-81.
- [44] Серёгин С.В., Лейзерович Г.С. Свободные колебания бесконечно длинной круговой цилиндрической оболочки с начальными неправильностями и малой присоединенной массой. *Ученые записки Комсомольского-на-Амуре государственного технического университета*, 2014, т. 1, № 4(20), с. 36–43.

References

- [1] Leonenko D.V., Starovoitov E.I. Impul'snye vozdeistviia na trekhslonnye krugovye tsilindricheskie obolochki v uprugoi srede [Impulsive Action on the Three-layered Circular Cylindrical Shells in Elastic Media]. *Izvestiia Saratovskogo universiteta. Novaia seriia. Seriia: Matematika. Mekhanika. Informatika* [Izvestiya of Saratov University. New Series. Series: Mathematics. Mechanics. Informatics]. 2015, vol. 15, no. 2, pp. 202–209.
- [2] Zhuravleva E.N., Gabbasov R.F., Nguen Kh.A., Khoang T.A. Chislennoe reshenie tsiklicheski simmetrichnoi zadachi po raschetu krugovoi tsilindricheskoi obolochki [Numerical Solution of Cyclically Symmetric Problem for Calculation of a Cylindrical Shell]. *Promyshlennoe i grazhdanskoe stroitel'stvo* [Industrial and Civil Engineering]. 2015, no. 6, pp. 10–14.
- [3] Spasskaia M.V., Treshchev A.A. Izgib krugovoi tsilindricheskoi obolochki iz anizotropnogo raznosoprotivliaiushchegosia materiala [Bending of the circular cylindrical shell made of anisotropic different resistant material]. *Stroitel'stvo i rekonstruktsiia* [Building and reconstruction]. 2015, no. 3(59), pp. 53–59.
- [4] Bochkarev S.A., Lekomtsev S.V., Matveenko V.P. Sobstvennyye kolebaniia i ustoichivost' funktsional'no-gradientnykh tsilindricheskikh obolochek vrashcheniia pod deistviem mekhanicheskikh i temperaturnykh nagruzok [Natural vibrations and stability of functionally graded cylindrical shells under mechanical and thermal loads]. *Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruktsii* [Journal on Composite Mechanics and Design]. 2015, vol. 21, no. 2, pp. 206–220.
- [5] Boiarskaia M.L., Filippov S.B. Ustoichivost' tsilindricheskoi obolochki, podkreplennoi shpangoutami s tavrorym poperechnym secheniem [Buckling of cylindrical shell stiffened by rings with T-shaped cross-section]. *Vestnik Sankt-Peterburgskogo universiteta. Seriia 1: Matematika. Mekhanika. Astronomiia* [Vestnik of the St. Petersburg University: Mathematics]. 2015, vol. 2, no. 3, pp. 431–442.

- [6] Zelinskaya A.V., Tovstik P.E. Buckling of an axially compressed transversely isotropic cylindrical shell with a weakly supported curvilinear edge. *Vestnik of the St. Petersburg University: Mathematics*, 2015, vol. 48, no. 2, pp. 109–118.
- [7] Iakovlev S.S., Remnev K.S. Uslovie poteri ustoichivosti v vide gofrov pri obzhime trubnoi zagotovki iz anizotropnogo materiala [Buckling of an anisotropic round billet subject to external overpressure]. *Izvestiia vysshikh uchebnykh zavedenii. Mashinostroenie* [Proceedings of Higher Educational Institutions. Machine Building]. 2014, no. 8(653), pp. 20–27.
- [8] Adamovich I.A., Filippov S.B. Optimizations of parameters of a stiffened cylindrical shell. *Vestnik of the St. Petersburg University: Mathematics*, 2015, vol. 48, no. 2, pp. 102–108.
- [9] Spasskaia M.V., Treshchev A.A. Termouprugoe deformirovanie tsilindricheskoi obolochki iz anizotropnogo raznosoprotivliaiushchegosia materiala [Thermoelastic deformation of the cylindrical shell made of anisotropic different resistant material]. *Vestnik Chuvashskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta im. I.Ia. Iakovleva. Seriya: Mekhanika predel'nogo sostoianiia* [Bulletin of the Chuvash State Pedagogical University named after I. Yakovlev. Series: Mechanics limit state]. 2015, no. 1(23), pp. 65–74.
- [10] Mochalin A.A. Parametricheskie kolebaniia neodnorodnoi krugovoi tsilindricheskoi obolochki peremennoi plotnosti pri razlichnykh kraevykh usloviakh [The Parametric Oscillations of Heterogeneous Round Cylindrical Shell of Variable Density on Different Boundary Conditions]. *Izvestiia Saratovskogo universiteta. Novaia seriya. Ser. Matematika. Mekhanika. Informatika* [Izvestiya of Saratov University. New Series. Ser. Mathematics. Mechanics. Informatics]. 2015, vol. 15, no. 2, pp. 210–215.
- [11] Netrebko A.V., Pshenichnov S.G. Nekotorye zadachi dinamiki lineino-viazkoupругikh tsilindricheskikh obolochek konechnoi dliny [Some dynamic problems for linearly viscoelastic cylindrical finite length shells]. *Problemy prochnosti i plastichnosti* [Journal Problems of Strength and Plasticity]. 2015, vol. 77, no. 1, pp. 14–22.
- [12] Kuznetsova E.L., Leonenko D.V., Starovoitov E.I. Natural vibrations of three-layer circular cylindrical shells in an elastic medium. *Mechanics of Solids*, 2015, vol. 50, no. 3, pp. 359–366.
- [13] Bochkarev S.A., Lekomtsev S.V. Sobstvennyye kolebaniia chastichno zapolnennykh zhidkost'iu nekrugovykh tsilindricheskikh obolochek s uchetom pleskaniia svobodnoi poverkhnosti [Natural vibrations of non-circular cylindrical shells partially filled with fluid with sloshing of free surface]. *Vychislitel'naiia mekhanika sploshnykh sred* [Computational continuum mechanics]. 2014, vol. 7, no. 4, pp. 471–480.
- [14] Kozar' D.M., Krauin'sh P.Ia. Opredelenie sobstvennoi chastoty kolebanii uprugoi obolochki i ee prisoedinnoi massy [Determination of the natural frequency of the elastic membrane and its associated mass fluctuations]. *Teoreticheskie i prikladnye aspekty sovremennoi nauki* [Theoretical and applied aspects of modern science]. 2014, no. 1, pp. 21–29.
- [15] Kirpichnikov V.Iu., Koshcheev A.P., Savenko V.V. Eksperimental'noe issledovanie vibratsii i zvukoizlucheniia obolochki s raspredelennoi po uchastku ee poverkhnosti massoi [Experimental study of vibrations and acoustic emission of shell with the mass distributed throughout an area on its surface]. *Trudy TsNII im. akad. A.N. Krylova* [Proceedings of Krylov Shipbuilding Research Institute]. 2014, no. 80(364), pp. 53–64.
- [16] Polunin A.I. Matematicheskoe modelirovanie vliianiia tochechnykh mass na dinamiku vrashchaiushcheisia obolochki s oporami [Mathematical modeling of the dynamics of point masses on a rotating shell with supports]. *Vestnik Belgorodskogo gosudarstvennogo tekhnologicheskogo universiteta im. V.G. Shukhova* [Bulletin of the Belgorod State Technological University named after V.G. Shukhov]. 2010, no. 3, pp. 197–199.
- [17] Skleznev A.A. Vliianie tekhnologicheskikh otverstii na sobstvennyye chastoty kolebanii setchatykh kompozitnykh konstruksii letatel'nykh apparatov [Influence of technological hole self-oscillation frequency mesh composite structures of aircraft]. *Vestnik Gomel'skogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta im. P.O. Sukhogo* [Bulletin of the Gomel State Technical University named after P.O. Sukhoi]. 2012, no. 4(51), pp. 3–10.
- [18] Antufev B.A. Vibrations of a shell with the discretely attached dynamic subsystem. *Russian Aeronautics*, 2008, vol. 51, no. 3, pp. 227–231.
- [19] Antufev B.A., Smiyan A.B. Experimental study of strain for plates discretely connected to a cylindrical shell. *Russian Aeronautics*, 2012, vol. 55, no. 4, pp. 339–342.
- [20] Antufev B.A., Kononov A.V. Effect of heating on the dynamic behavior of a shell with partially damaged thermal insulation. *Russian Aeronautics*, 2014, vol. 57, no. 1, pp. 1–5.

- [21] Kubenko V.D., Koval'chuk P.S., Krasnopol'skaia T.S. *Nelineinoe vzaimodeistvie form izgibnykh kolebaniy tsilindricheskikh obolochek* [Nonlinear interaction of forms of flexural vibrations of cylindrical shells]. Kiev, Moscow, Naukova dumka publ., 1984. 220 p.
- [22] Seregin S.V., Leizerovich G.S. Vliianie prisoedinennoi massy na dinamicheskie kharakteristiki tonkoi obolochki [Influence of the added mass on the dynamic characteristics of thin shells]. *Problemy mashinostroeniia i avtomatizatsii* [Engineering and Automation Problems]. 2015, no. 4, pp. 83–89.
- [23] Andreev L.V., Stankevich A.I., Dyshko A.L., Pavlenko I.D. *Dinamika tonkostennykh konstruksii s prisoedinennymi massami* [The dynamics of thin-walled structures with attached masses]. Moscow, MAI publ., 2012. 214 p.
- [24] Seregin S.V. Issledovanie dinamicheskikh kharakteristik obolochek s otverstiiami i prisoedinennoi massoi [Investigation of dynamic characteristics of shells with holes and added mass]. *Vestnik MGSU* [Proceedings of Moscow State University of Civil Engineering]. 2014, no. 4, pp. 52–58. Doi: 10.22227/1997-0935.2014.4.52-58.
- [25] Seregin S.V. Vliianie prisoedinennogo tela na chastoty i formy svobodnykh kolebaniy tsilindricheskikh obolochek [Influence of body attached to the frequencies and forms of free oscillations of cylindrical shells]. *Stroitel'naia mekhanika i raschet sooruzhenii* [Building mechanics and calculation of constructions]. 2014, no. 3, pp. 35–39.
- [26] Leizerovich G.S., Prikhod'ko N.B., Seregin S.V. O vliianii maloi prisoedinennoi massy na kolebaniia raznotolshchinnogo krugovogo kol'tsa. *Stroitel'stvo i rekonstruktsiia* [Building and reconstruction]. 2013, no. 4, pp. 38–42.
- [27] Leizerovich G.S., Prikhod'ko N.B. Seregin S.V., O vliianii maloi prisoedinennoi massy na rassheplenie chastotnogo spektra krugovogo kol'tsa s nachal'nymi nepravil'nostiami [On the influence of small weight attached to the splitting of the frequency spectrum of a circular ring with initial irregularities]. *Stroitel'naia mekhanika i raschet sooruzhenii* [Building mechanics and calculation of constructions]. 2013, no. 6, pp. 49–51.
- [28] Seregin S.V. Chislennoe i analiticheskoe issledovanie svobodnykh kolebaniy krugovykh tsilindricheskikh obolochek, nesushchikh prisoedinennuiu massu, lineino raspredelennuiu vdol' obrazuiushchei [Numerical and analytical investigation of free vibrations of circular cylindrical shells with added mass linearly distributed along generatrix]. *Vychislitel'naia mekhanika sploshnykh sred* [Computational continuum mechanics]. 2014, vol. 7, no. 4, pp. 378–384. Doi: 10.7242/1999-6691/2014.7.4.36.
- [29] Seregin S.V. Vliianie ploschadi kontakta i velichiny lineino raspredelennoi i sosredotochennoi massy s krugovoi tsilindricheskoi obolochkoi na chastoty i formy svobodnykh kolebaniy [Influence of the contact area and value of the linearly distributed and concentrated mass with a circular cylindrical shell on the frequency and modes of natural oscillations]. *Vestnik MGSU* [Proceedings of Moscow State University of Civil Engineering]. 2014, no. 7, pp. 64–74. Doi: 10.22227/1997-0935.2014.7.64-74.
- [30] Seregin S.V. Ob effekte rasshepleniia izgibnogo chastotnogo spektra tonkikh krugovykh tsilindricheskikh obolochek, nesushchikh prisoedinennuiu massu [On the effect of splitting the frequency spectrum of the bending of thin circular cylindrical shells, bearing the associated mass]. *Stroitel'naia mekhanika i raschet sooruzhenii* [Building mechanics and calculation of constructions]. 2014, no. 6(257), pp. 59–61.
- [31] Seregin S.V. Svobodnye kolebaniia tonkoi krugovoi tsilindricheskoi obolochki, oslablennoi otverstiem [Free Vibrations of a Thin Circular Cylindrical Shell Weakened by a Hole]. *Izvestiia vysshikh uchebnykh zavedenii. Aviatsionnaia tekhnika* [Russian Aeronautics]. 2015, no. 3, pp. 9–13. Doi: 10.3103/S1068799815030022.
- [32] Palamarchuk V.G. Svobodnye kolebaniia sistemy, sostoiashechei iz rebristoi tsilindricheskoi obolochki i absoliutno tverdogo tela [Free oscillations of a system consisting of a ribbed cylindrical shell and an absolutely rigid body]. *Prikladnaia mekhanika* [International Applied Mechanics]. 1978, vol. 14, no. 4, pp. 56–62.
- [33] Kononenko V.O., Palamarchuk V.G., Nosachenko A.M. Svobodnye kolebaniia rebristoi tsilindricheskoi obolochki s prisoedinennoi massoi [Free oscillations of ribbed cylindrical shell with the attached weight]. *Prikladnaia mekhanika* [International Applied Mechanics]. 1977, 13, no. 1, pp. 40–46.
- [34] Zhigalko Iu.P., Shalabanov A.K. Vliianie vneshnego dempfirovaniia na chastoty kolebaniy plastin i obolochek, nesushchikh sosredotochennye massy [Influence of external damping

- on the frequency of vibrations of plates and shells, carrying concentrated masses]. *Issledovaniia po teorii plastin i obolochek* [Investigations in the theory of plates and shells]. 1975, is. 11, pp. 261–269.
- [35] Vol'mir A.S. *Nelineinaia dinamika plastin i obolochek* [Nonlinear dynamics of plates and shells]. Moscow, Nauka publ., 1972. 431 p.
- [36] Evensen D.A. Nonlinear flexural vibrations of thin circular rings. *Trans ASME. J. Appl. Mech.*, 1965, vol. 33, no. 3, pp. 553–560.
- [37] Biderman V.L. *Teoriia mekhanicheskikh kolebanii* [The theory of mechanical vibrations]. Moscow, Vysshiaia shkola publ., 1980. 408 p.
- [38] Basarab M.A., Ivoilov M.A., Matveev V.A. Optimizatsiia balansirovki volnovogo tverdotel'nogo giroskopa s pomoshch'iu neuronnoi seti khopfilda [Optimization of solid-state wave gyro balancing with the use of the Hopfield neural network]. *Nauka i obrazovanie. MGTU im. N.E. Baumana* [Science and Education. Bauman MSTU]. 2012, no. 7, pp. 289–298. Available at: <http://technomag.bmstu.ru/doc/416090.html> (accessed 12 February 2016).
- [39] Matveev V.A., Lunin B.S., Basarab M.A., Chumankin E.A. Balansirovka metallicheskh rezonatorov volnovykh tverdotel'nykh giroskopov nizkoi i srednei tochnosti [Balancing of metallic resonators of cylindrical vibratory gyroscopes for low and medium accuracy applications]. *Nauka i obrazovanie. MGTU im. N.E. Baumana* [Science and Education. Bauman MSTU]. 2013, no. 6, pp. 251–266. Available at: <http://technomag.bmstu.ru/doc/579179.html> (accessed 12 February 2016).
- [40] Matveev V.A., Lipatnikov V.I., Alekhin A.V. *Proektirovanie volnovogo tverdotel'nogo giroskopa* [Designing a hemispherical resonator gyro]. Moscow, Bauman Press, 1998. 168 p.
- [41] Abakumov A.I., Egunov V.V., Mokhov V.N., Pevnitskaia A.V., Solov'ev V. P., Uchaev A.A. Povedenie sfericheskoi obolochki s prisoedinennoi massoi pri impul'snom nagruzhenii [The behavior of a spherical shell with an attached weight under impact loading]. *Prikladnye problemy prochnosti i plastichnosti* [Applied problems of strength and ductility]. Gor'kii, 1984, no. 1, pp. 109–113.
- [42] Seregin S.V. *Dinamika tonkikh tsilindricheskikh obolochek s prisoedinennoi massoi* [Dynamics of thin cylindrical shells with added mass]. Komsomolsk-na-Amure, KnASTU publ., 2016. 175 p.
- [43] Seregin S.V. Svobodnye izgibno-radial'nye kolebaniiia tonkoi krugovoi tsilindricheskoi obolochki, nesushchei prisoedinennuiu massu [Free flexural radial vibrations of a thin circular cylindrical shell bearing added mass]. *Vestnik MGSU* [Vestnik MGSU]. 2014, no. 11, pp. 74–81. Doi: 10.22227/1997-0935.2014.11.74-81.
- [44] Seregin S.V. Leizerovich G.S. Svobodnye kolebaniiia beskonechno dlinnoi krugovoi tsilindricheskoi obolochki s nachal'nymi nepravil'nostiami i maloi prisoedinennoi massoi [Free vibration of infinite length circular cylindrical shell with initial imperfections and a small added mass]. *Uchenye zapiski Komsomol'skogo-na-Amure gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta* [Scholarly Notes of Komsomolsk-na-Amure State Technical University]. 2014, vol. 1, no. 4(20), pp. 36–43.

Статья поступила в редакцию 07.09.2016

Информация об авторе

СЕРЁГИН Сергей Валерьевич (Комсомольск-на-Амуре) — кандидат технических наук, старший научный сотрудник управления научно-исследовательской деятельностью. Комсомольский-на-Амуре государственный технический университет (681024, Комсомольск-на-Амуре, Российская Федерация, пр-т Ленина, д. 27, e-mail: Seregin-komsHome@yandex.ru).

Information about the author

SEREGIN Sergey Valerievich (Komsomolsk-on-Amur) — Candidate of Science (Eng.), Senior Researcher, Department of Scientific and Research Work. Komsomolsk-na-Amure State Technical University (681024, Komsomolsk-on-Amur, Russian Federation, Lenin Ave, Bldg. 27, e-mail: Seregin-komsHome@yandex.ru).