

УДК 519.6

DOI 10.18698/0536-1044-2016-12-9-20

# Моделирование контактного взаимодействия системы термоупругих тел методом Шварца для многомерного случая<sup>\*</sup>

М.П. Галанин<sup>1</sup>, А.В. Крупкин<sup>2</sup>, В.И. Кузнецов<sup>2</sup>, В.В. Лукин<sup>1</sup>,  
В.В. Новиков<sup>2</sup>, А.С. Родин<sup>1</sup>, И.В. Станкевич<sup>3</sup>

<sup>1</sup> Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, 125047, Москва, Российская Федерация, Миусская пл., д. 4

<sup>2</sup> АО «Высокотехнологический научно-исследовательский институт неорганических материалов имени академика А.А. Бочвара», 123098, Москва, Российская Федерация, ул. Рогова, д. 5а

<sup>3</sup> МГТУ им. Н.Э. Баумана, 105005, Москва, Российская Федерация, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1

## Modeling of Contact Interaction of a Thermoelastic Body System using Schwartz Method for a Multidimensional Case

M.P. Galanin<sup>1</sup>, A.V. Krupkin<sup>2</sup>, V.I. Kuznetsov<sup>2</sup>, V.V. Lukin<sup>1</sup>,  
V.V. Novikov<sup>2</sup>, A.S. Rodin<sup>1</sup>, I.V. Stankevich<sup>3</sup>

<sup>1</sup> Institute of Applied Mathematics of the Russian Academy of Sciences KIAM, 125047, Moscow, Russian Federation, Miusskaya Sq., Bldg. 4

<sup>2</sup> Bochvar High-Technology Research Institute of Inorganic Materials VNIINM, 123098, Moscow, Russian Federation, Rogova St., Bldg. 5a

<sup>3</sup> BMSTU, 105005, Moscow, Russian Federation, 2<sup>nd</sup> Baumanskaya St., Bldg. 5, Block 1



e-mail: galan@keldysh.ru, avkrupkin@bochvar.ru, vikuznetsov@bochvar.ru, vvlukin@gmail.com, vvnovikov@bochvar.ru, rals@bk.ru, aplmex@yandex.ru



Описано применение разработанного алгоритма численного решения поликонтактных термомеханических задач для системы тел. Учет контактного взаимодействия различных элементов является важной составляющей оценки прочности исследуемой конструкции. Рассмотрена многомерная квазистационарная задача деформирования термоупругих тел под действием поверхностных сил и неоднородных температурных полей. Для дискретизации дифференциальной задачи применен метод конечных элементов. Для описания контактного взаимодействия использован алгоритм, основанный на итерационном методе Шварца и специальным образом модифицированный для решения задач с одновременным контактом нескольких тел. На примере задачи с известным решением продемонстрировано, что разработанный алгоритм позволяет получать правильные результаты для расчетов с различным количеством моделируемых тел. Выполнено сравнение результатов решения четырех задач (трех тестовых и одной демонстрационной) в двумерной осесимметричной и трехмерной постановках. Анализ сравнительных данных показал, что между ними наблюдается хорошее качественное и количественное соответствие.

**Ключевые слова:** поликонтактное взаимодействие, контактная задача, метод конечных элементов, метод Шварца.

<sup>\*</sup> Работа выполнена при частичной финансовой поддержке программы поддержки ведущих научных школ (грант № НШ-1432.2014.8) и при поддержке РФФИ (проект № 15-01-03073).

**i** The algorithm of numerical solutions for polycontact thermomechanical problems of interaction of a system of bodies is described in this article. When evaluating the strength of a construction, it is important to take into consideration contact interaction of its various elements. The multidimensional quasi-stationary problem of deformation of thermoelastic bodies under the action of surface forces and inhomogeneous temperature fields is considered. For the discretization of the differential problem the finite element method is used. An algorithm based on the Schwartz iterative method is used to describe the contact interaction. The algorithm is specially modified to solve problems with simultaneous contact between a number of bodies. Using the example of a problem with a known solution, it is demonstrated that the developed algorithm can be used to obtain correct results when performing calculations with different numbers of bodies. The calculations of solutions to four problems (three test problems and one demonstration problem) in 3D and 2D (axisymmetric) formulations are compared. Good qualitative and quantitative agreement of the compared data is observed.

**Keywords:** polycontact interaction, contact problem, finite element method, Schwartz method.

Расчетное обоснование прочности и надежности различных элементов конструкций, функциональных узлов оборудования является обязательным элементом проектирования. Такому обоснованию предшествует анализ температурного и напряженно-деформированного состояния исследуемых тел. Данный анализ часто должен учитывать контактное взаимодействие различных элементов конструкций, поскольку именно в зонах контакта могут возникнуть концентраторы напряжений, являющиеся наиболее критичными при оценке прочности.

В настоящее время известно сравнительно малое количество контактных задач, для которых получены аналитические решения, поэтому наиболее перспективным способом исследования контактного взаимодействия тел являются численные методы [1]. Для решения задач механики деформируемого твердого тела (МДТТ) чаще всего используют метод конечных элементов (МКЭ) [2–6].

В данной работе приведена достаточно общая постановка задачи термомеханического контактного взаимодействия нескольких тел. Для решения поликонтактных задач в работе [7] предложен численный алгоритм, основанный на специализированном варианте метода Шварца декомпозиции области. В статье [7] этот алгоритм использован для решения двумерных осесимметричных задач, в данной работе с его помощью решены четыре трехмерные задачи (три тестовые и одна демонстрационная). Выполнена оценка корректности полученных результатов.

Цель работы — исследование возможности применения и эффективности предложенного

метода для решения многомерных задач, в которых происходит контакт нескольких тел.

**Постановка поликонтактной задачи термомеханики деформируемого твердого тела.** Рассмотрим в трехмерном пространстве  $\mathbb{R}^3$  с декартовой системой координат  $Ox_1x_2x_3$  группу тел, занимающих область

$$G = \bigcup_{\alpha} G_{\alpha}$$

( $\alpha$  — индекс, обозначающий номер тела), ограниченную кусочно-гладкой границей

$$\partial G = \bigcup_{\alpha} \partial G_{\alpha}.$$

Предположим, что эффектом связанности (зависимостью температуры от деформации тела) можно пренебречь, поэтому задачу теплопроводности можно решать отдельно, а полученное температурное поле использовать при решении квазистатической задачи равновесия тел.

Рассмотрим следующую начально-краевую задачу для нелинейного уравнения теплопроводности:

$$c_{\varepsilon}(\mathbf{x}, T) \rho(\mathbf{x}, T) \frac{\partial T}{\partial t} = (k_{ij}(\mathbf{x}, T) T_{,j})_{,i} + \varphi(\mathbf{x}, t, \bar{T}),$$

$$(\mathbf{x}, T) \in G \times (0, t_M];$$

$$T(\mathbf{x}, 0) = T_0(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \bar{G};$$

$$T(\mathbf{x}, t)|_{S_1} = T_w(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x} \in S_1 \subset \partial G, \quad t > 0;$$

$$-n_i k_{ij}(\mathbf{x}, t) T_{,j}|_{S_2} = q_w(\mathbf{x}, t, T), \quad \mathbf{x} \in S_2 \subset \partial G, \quad t > 0;$$

$$-n_i k_{ij}(\mathbf{x}, t) T_{,j}|_{S_3} = \alpha_w(\mathbf{x}, t, T) [T(\mathbf{x}, t) - T_f(\mathbf{x}, t)],$$

$$\mathbf{x} \in S_3 \subset \partial G, \quad t > 0,$$

(1)

где  $c_\varepsilon(\mathbf{x}, T)$  — удельная теплоемкость среды;  $\rho(\mathbf{x}, T)$  — плотность среды;  $t$  — время;  $k_{ij}(\mathbf{x}, T)$ ,  $\bar{T} = (T, T_{,1}, T_{,2}, T_{,3})$  — компоненты тензора теплопроводности  $\underline{K} = k_{ij}(\mathbf{x}, T) \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j$  ( $\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j$  — базисные диады);  $T_{,j} = \partial T / \partial x_j$  — производная по соответствующей координате;  $\varphi(\mathbf{x}, t, \bar{T})$  — мощность внутренних источников (стоков) тела;  $t_M$  — момент времени, обозначающий конец рассматриваемого временного интервала;  $T_0(\mathbf{x})$  — начальная температура;  $T(\mathbf{x}, t)$  — температура в момент времени  $t$ ;  $T_w(\mathbf{x}, t)$  — температура поверхности  $S_1$ ;  $n_i$  — компоненты единичного вектора внешней нормали  $\mathbf{n} = n_i \mathbf{e}_i$  к границе  $\partial G$ ;  $q_w(\mathbf{x}, t, T)$  — плотность теплового потока на поверхности  $S_2$ ;  $\alpha_w(\mathbf{x}, t, T)$  — коэффициент теплоотдачи на поверхности  $S_3$ ;  $T_f(\mathbf{x}, t)$  — температура среды у поверхности  $S_3$ . Здесь  $\text{mes}(S_1 \cap S_2) = \text{mes}(S_1 \cap S_3) = \text{mes}(S_2 \cap S_3) = 0$ .

При решении контактной задачи в качестве температуры среды  $T_f(\mathbf{x}, t)$  на границе  $S_3$ , где задано условие теплообмена, будем рассматривать температуру в точках соседнего контактирующего тела.

Математическая формулировка квазистатической несвязанной задачи МДТТ в рассматриваемой термоупругой постановке включает в себя следующие соотношения (для каждого тела  $G_\alpha$ ,  $i, j = 1, 3$ ):

- уравнения равновесия

$$\sigma_{ji,j}(\mathbf{u}, T) + Q_i(\mathbf{x}, t) = 0, \quad \mathbf{x} \in G_\alpha; \quad (2)$$

- кинематические граничные условия

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)|_{S_1^\alpha} = \mathbf{u}^0(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x} \in S_1^\alpha \subset \partial G_\alpha; \quad (3)$$

- силовые граничные условия

$$\sigma_{ji}(\mathbf{u}, T) n_j|_{S_2^\alpha} = p_i(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x} \in S_2^\alpha \subset \partial G_\alpha; \quad (4)$$

- соотношения Коши для компонент тензора полной деформации

$$\varepsilon_{ij}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right), \quad \mathbf{x} \in G_\alpha, \quad \alpha \in \{A, B\};$$

- определяющие уравнения (закон Гука) для компонент тензора напряжений

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl}^e = C_{ijkl} (\varepsilon_{kl} - \varepsilon_{kl}^0),$$

где  $\sigma_{ji}(\mathbf{u}, T)$  — компоненты тензора напряжений,  $\sigma_{ji,j} = \partial \sigma_{ji} / \partial x_j$ ;  $Q_i(\mathbf{x}, t)$  — компоненты вектора массовых сил ( $\mathbf{x} \in G_\alpha$ );  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$  — вектор перемещения точки, определяемой радиус-вектором  $\mathbf{x} = x_i \mathbf{e}_i$ ;  $\mathbf{u}^0(\mathbf{x}, t)$  — вектор перемещения точки, расположенной на поверхности  $S_1^\alpha$ ;

$n_j$  — компоненты вектора внешней нормали к поверхности  $S_2^\alpha$ ;  $p_i(\mathbf{x}, t)$  — компоненты вектора внешней нагрузки, действующей на поверхности  $S_2^\alpha$  ( $\mathbf{x} \in S_2^\alpha \subset \partial G_\alpha$ );  $C_{ijkl}$  — компоненты тензора коэффициентов упругости;  $\varepsilon_{kl}^e$  — компоненты тензора упругой деформации;  $\varepsilon_{kl}$  — компоненты тензора полной деформации;  $\varepsilon_{kl}^0$  — компоненты тензора начальной деформации (для термоупругого тела таковыми являются температурные деформации).

При решении контактной задачи на поверхностях контакта тел дополнительно должны быть выполнены условия контактного взаимодействия по перемещениям и напряжениям. Для упрощения записи ограничимся случаем двух тел с одной парой контактных поверхностей. Рассмотрим два термоупругих контактирующих тела  $A$  и  $B$ , занимающих в пространстве  $\mathbb{R}^3$  области  $G_A$  и  $G_B$ , ограниченные кусочно-гладкими границами  $\partial G_A$  и  $\partial G_B$  (рис. 1).

На поверхности контакта  $S_k = S_k^A = S_k^B$  (см. рис. 1) должны быть выполнены:

- кинематическое условие сопряжения по перемещениям

$$u_n^A(\mathbf{x}, t) - u_n^B(\mathbf{x}, t) = \delta_n(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in S_k; \quad (5)$$

- силовое условие сопряжения по напряжениям

$$\sigma_n^A(\mathbf{x}, t) = \sigma_n^B(\mathbf{x}, t) \leq 0, \quad \mathbf{x} \in S_k, \quad (6)$$

где  $u_n^A$ ,  $u_n^B$  — проекции векторов перемещений граничных точек на направление внешней нормали  $\mathbf{n}_A$  к границе тела  $A$ ;  $\delta_n$  — начальное расстояние (зазор) по нормали между граничными точками тел  $A$  и  $B$ ;  $\sigma_n^A$  и  $\sigma_n^B$  — проек-

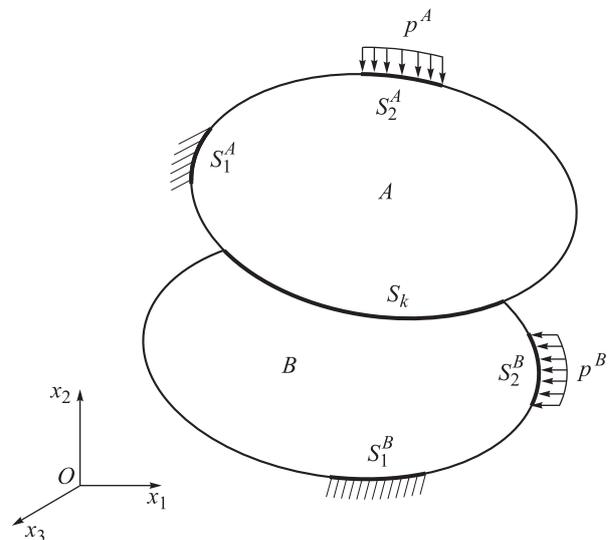


Рис. 1. Схема контактного взаимодействия двух тел

ции векторов напряжений  $\sigma^A$  и  $\sigma^B$  на направления внешних нормалей  $n_A$  и  $n_B$ . Здесь  $S_1^\alpha \cup S_2^\alpha \cup S_k^\alpha = \partial G_\alpha$ ,  $\text{mes}(S_1^\alpha \cap S_2^\alpha) = 0$ ,  $\text{mes}(S_1^\alpha \cap S_k^\alpha) = 0$ ,  $\text{mes}(S_2^\alpha \cap S_k^\alpha) = 0$ ,  $\alpha \in \{A, B\}$ .

При контакте тел нормальные проекции  $\sigma_n^A$  и  $\sigma_n^B$  векторов напряжений  $\sigma^A$  и  $\sigma^B$  меньше нуля, при выходе из контакта они равны нулю [1]. Таким образом, контактные нормальные напряжения могут быть только сжимающими.

Часть прикладных задач требует учета сил трения на контактных поверхностях. В данной работе трение учитывалось в рамках закона Амонта — Кулона [1]. Касательные контактные напряжения  $\sigma_\tau^\alpha = \sigma^\alpha \tau_\alpha$  ( $\tau_\alpha$  — вектор, касательный к контактной границе соответствующего тела;  $\alpha \in \{A, B\}$ ) вычислялись по формуле

$$|\sigma_\tau^\alpha| = \mu |\sigma_n^\alpha|,$$

где  $\mu$  — коэффициент трения скольжения.

Совокупность соотношений (1)–(6) составляет математическую формулировку контактной задачи МДТТ. Предполагается, что все функции, входящие в данную формулировку, обладают достаточной гладкостью.

Поликонтактный характер рассматриваемой задачи определяется, прежде всего, геометрическими особенностями взаимодействующих тел. Взаимодействовать могут как два тела (и иметь несколько несвязных поверхностей контакта), так и несколько тел. Эти обстоятельства необходимо учитывать при разработке алгоритма численного решения задачи (1)–(6).

**Метод численного решения контактной задачи на основе альтернирующего метода Шварца.** Для численного решения поставленной задачи использован МКЭ [2–6]. Процедура его применения описана во многих руководствах, в частности, вариант МКЭ, использованный для данной задачи, рассмотрен в работах [6, 8].

При решении контактных задач термоупругости применяют различные итерационные методы. Самыми популярными из них являются методы штрафных функций и множителей Лагранжа [1]. В данной работе использован метод Шварца (один из вариантов метода декомпозиции [9, 10]).

Суть данного метода состоит в следующем: на первом шаге на контактных поверхностях тел задают начальное приближение для компонент вектора перемещений (приближение выбирают из диапазона ожидаемых значений для зоны контактного взаимодействия). После ре-

шения этой задачи кинематическое условие (5) на контактной поверхности будет выполнено, но вычисленные контактные давления на противоположащих контактных поверхностях, принадлежащих взаимодействующим телам, оказываются не равными (нарушено условие (6)). На следующем шаге с помощью коррекции, проведенной специальным образом, достигается равенство контактных напряжений, но полученные перемещения не удовлетворяют условию (5). Далее на очередной итерации снова используют скорректированные кинематические условия (совмещают контактирующие поверхности). Чередование силовых и кинематических итераций выполняют до достижения сходимости, когда кинематические и силовые условия на контакте (5) и (6) выполнены с заданной точностью. Более подробно данный метод описан в работах [8, 11, 12].

В случае поликонтактного взаимодействия системы тел на одной части контактных поверхностей необходимо задавать кинематические граничные условия, а на другой — силовые. В соответствии с общим алгоритмом метода Шварца указанные условия чередуются в зависимости от номера текущей итерации.

Одним из главных преимуществ метода Шварца является то, что он позволяет рассматривать каждое тело в отдельности, а не решать одну общую систему линейных уравнений для всех тел. Для задач с большим количеством контактирующих тел такое преимущество позволяет существенно снизить время расчета.

В работе [7] рассмотрено несколько примеров таких задач в двумерной осесимметричной постановке. На основании проведенных расчетов сделан вывод, что при применении классического метода Шварца для большого количества контактирующих тел крайне важным становится вопрос выбора хорошего начального приближения для перемещений на первой итерации. Поскольку предполагается, что подобное приближение задается пользователем напрямую перед началом решения задачи, то выбор хорошего приближения становится самостоятельной и часто очень непростой задачей.

В связи с этим в работе [7] предложен альтернативный алгоритм, позволяющий обходить такое ограничение. Рассмотрен класс поликонтактных задач, предполагающий наличие системы тел, расположенных одно на другом и образующих вертикально ориентированную составную конструкцию (столб). В каждом теле

(кроме нижнего и верхнего) можно выделить нижнюю и верхнюю контактные поверхности. Наиболее важными факторами, влияющими на напряженно-деформированное состояние всей системы, являются объемные силы или температурные деформации в каждом теле, а также давление, приложенное к верхней поверхности верхнего тела.

Тогда можно использовать следующий алгоритм: на первой итерации каждое тело рассматривается отдельно: на нижней контактной поверхности задаются нулевые вертикальные перемещения, а на верхней контактной поверхности — давление, приложенное к самому верхнему телу, спроецированное на данную поверхность рассматриваемого тела. В конце первой итерации осуществляется пересчет перемещений, учитывающий сборку тел в единую конструкцию, после которого получают скорректированные поля перемещений и напряжений для конструкции в целом. Результатом первой итерации является некоторое начальное приближение, учитывающее приложенные к системе термомеханические нагрузки. Это приближение не задается пользователем, а получается из решения приведенных выше вспомогательных задач. На следующих итерациях используют стандартные соотношения метода Шварца для получения кинематических и силовых условий.

В работе [7] постановка задачи и расчетные формулы приведены в общем виде для многомерного случая, но все расчеты выполнены для двумерных осесимметричных задач. В данной работе описанный алгоритм использован для решения трехмерных задач.

**Результаты численных исследований.** Представим несколько примеров контактного взаимодействия системы осесимметричных тел, чтобы сравнить результаты, полученные при решении задач в трехмерной (для сектора  $90^\circ$ ) и двумерной осесимметричной постановках. Использовались конечные элементы первого порядка на четырехугольной сетке (2D) или на сетке из призм с четырехугольным основанием (3D).

В тестовых задачах на контактных поверхностях везде принято условие скольжения без трения, постановка задач и результаты расчетов приведены в безразмерных величинах.

**Первая тестовая задача.** Рассмотрим несколько одинаковых цилиндров с отверстием (внутренний радиус  $r_1 = 1$ , внешний радиус

$r_2 = 4$ , высота — 3), стоящих один на другом. Нижний торец нижнего цилиндра закреплен по вертикали, на верхний торец верхнего цилиндра действует равномерное давление 10. Каждый цилиндр нагрет относительно начального состояния на значение, равное 100. Поскольку нагрев является равномерным, а поверхности цилиндров свободны от кинематических ограничений, температурных напряжений в телах не возникает. Поэтому контактное давление на всех поверхностях должно совпадать с давлением, приложенным к верхнему телу (т. е. давление должно быть равно 10).

Использование рассмотренного выше варианта метода Шварца позволило получить точное решение данной задачи за одну итерацию вне зависимости от количества цилиндров в конструкции (рассматривалось от 2 до 10 тел). Это объясняется тем, что проекция постоянного давления, приложенного к верхнему телу, на контактные поверхности нижних тел и учет температурных деформаций позволяют получить в результате первой итерации точные поля перемещений и напряжений для каждого тела в отдельности. После того как в соответствии с описанным алгоритмом в конце первой итерации будет осуществлен пересчет перемещений, учитывающий сборку тел в единый столб, алгоритм дает точные поля перемещений и напряжений для конструкции в целом.

**Вторая тестовая задача.** Рассмотрим контакт пяти цилиндров с отверстием (внутренний радиус  $r_1 = 1$ , внешний радиус  $r_2 = 4$ , высота — 3). На верхний торец верхнего цилиндра действует равномерное давление 50. Температурное поле в конструкции определяется по формуле

$$T(z) = T_0 + 200(r/r_2 + z/L),$$

где  $L$  — высота конструкции,  $L = 15$ ;  $T_0 = 300$ .

В данной задаче аналитическое решение для перемещений или напряжений неизвестно, поэтому при расчете контролировалось значение максимальной относительной ошибки в определении перемещений на силовой и кинематической итерациях. После 25-й итерации максимальная относительная ошибка составила 1 %. На рис. 2 показаны поля осевых напряжений для двумерного и трехмерного расчетов. Их сравнение показало, что полученные результаты являются практически идентичными. На контактных поверхностях

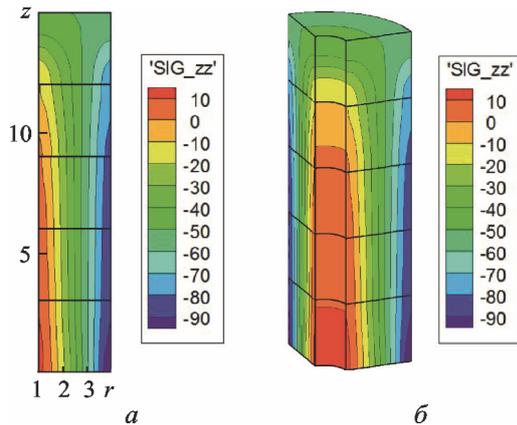


Рис. 2. Распределение осевых напряжений в расчетной области:  
*a* — двумерный расчет; *б* — трехмерный расчет

выполнены равенства осевых перемещений и напряжений.

**Третья тестовая задача.** Рассмотрим контакт трех цилиндров с отверстиями: нижний цилиндр имеет внешний радиус, равный 5, средний — 4, верхний — 3,2. Для всех цилин-

дров внутренний радиус равен 1, а высота — 1,6. Нижний торец нижнего цилиндра закреплен, на верхний торец верхнего цилиндра действует равномерное давление 50. Температурное поле в данной задаче не используется.

В проведенных двумерном и трехмерном расчетах после 18-й итерации максимальная относительная ошибка для перемещений составила 1 %. На рис. 3 приведены поля осевых перемещений и напряжений. Сравнение результатов, полученных для двумерного и трехмерного расчетов, показало, что они являются практически идентичными. На контактных поверхностях выполнены равенства осевых перемещений и напряжений.

На основании результатов тестовых расчетов можно сделать вывод, что обобщение алгоритма решения поликонтактных задач, изложенного в работе [7], на трехмерный случай проведено корректно. Количество итераций, требуемое для достижения заданной точности по перемещениям, почти не отличается от такового, полученного для аналогичного двумерного расчета.

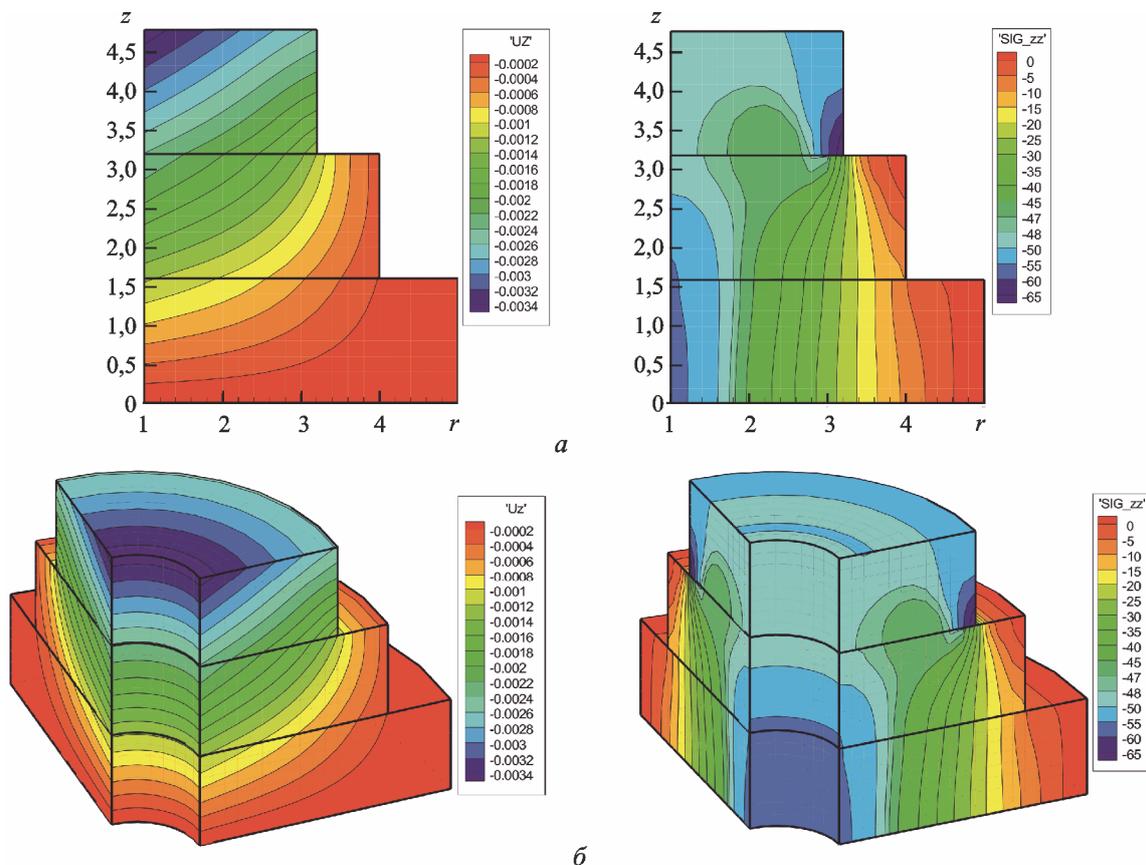


Рис. 3. Распределение осевых перемещений (слева) и осевых напряжений (справа) в расчетной области:  
*a* — двумерный расчет; *б* — трехмерный расчет

**Демонстрационная задача о контакте пяти тел.** Рассмотрим толстостенную трубу, внутри которой расположен столб из четырех поставленных друг на друга одинаковых цилиндров, имеющих внутреннее отверстие и фаски на обоих торцах. В цилиндрах задано равномерное тепловыделение по следующему закону: происходит линейный подъем мощности тепловыделения за некоторое время  $\Delta t$  до предельного значения  $q_{l\max}$ , после чего мощность остается постоянной. Температура наружной поверхности трубы принята постоянной, равной  $T_1$ . Нижние торцы трубы и

нижнего цилиндра закреплены по вертикали. На наружной поверхности трубы задано постоянное давление  $p_1$ , а на верхней поверхности верхнего цилиндра — постоянное давление  $p_2$ . В начальный момент времени между цилиндрами и трубой задан малый зазор, но в процессе теплового расширения цилиндров они вступают в контакт с внутренней поверхностью трубы. На контактных поверхностях выполняется условие трения с коэффициентом 0,1. Данная задача моделирует некоторые термомеханические эффекты, происходящие в тепловыделяющем элементе.

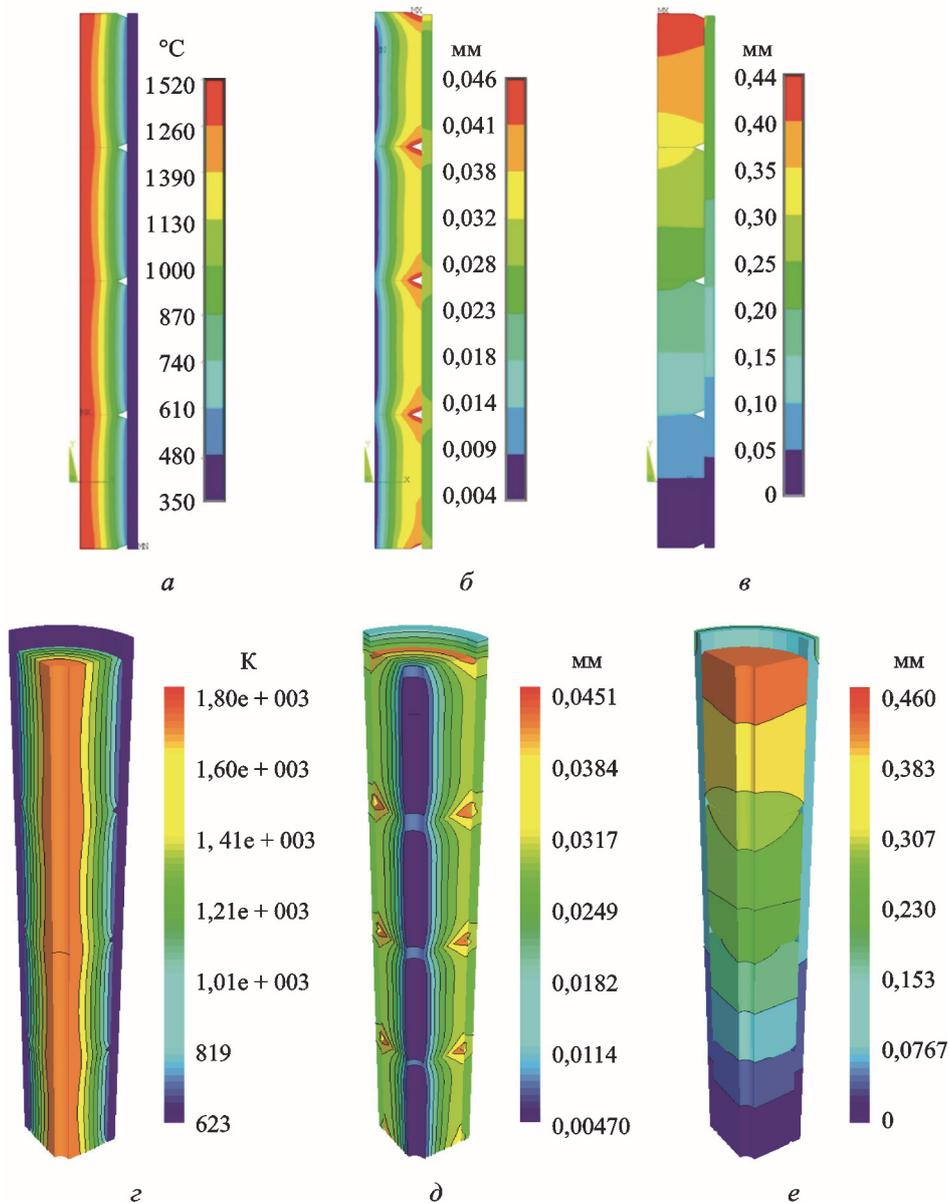


Рис. 4. Распределение температуры (а, г), радиальных (б, д) и осевых (в, е) перемещений в расчетной области: а-в — двумерный расчет (ANSYS); г-е — трехмерный расчет

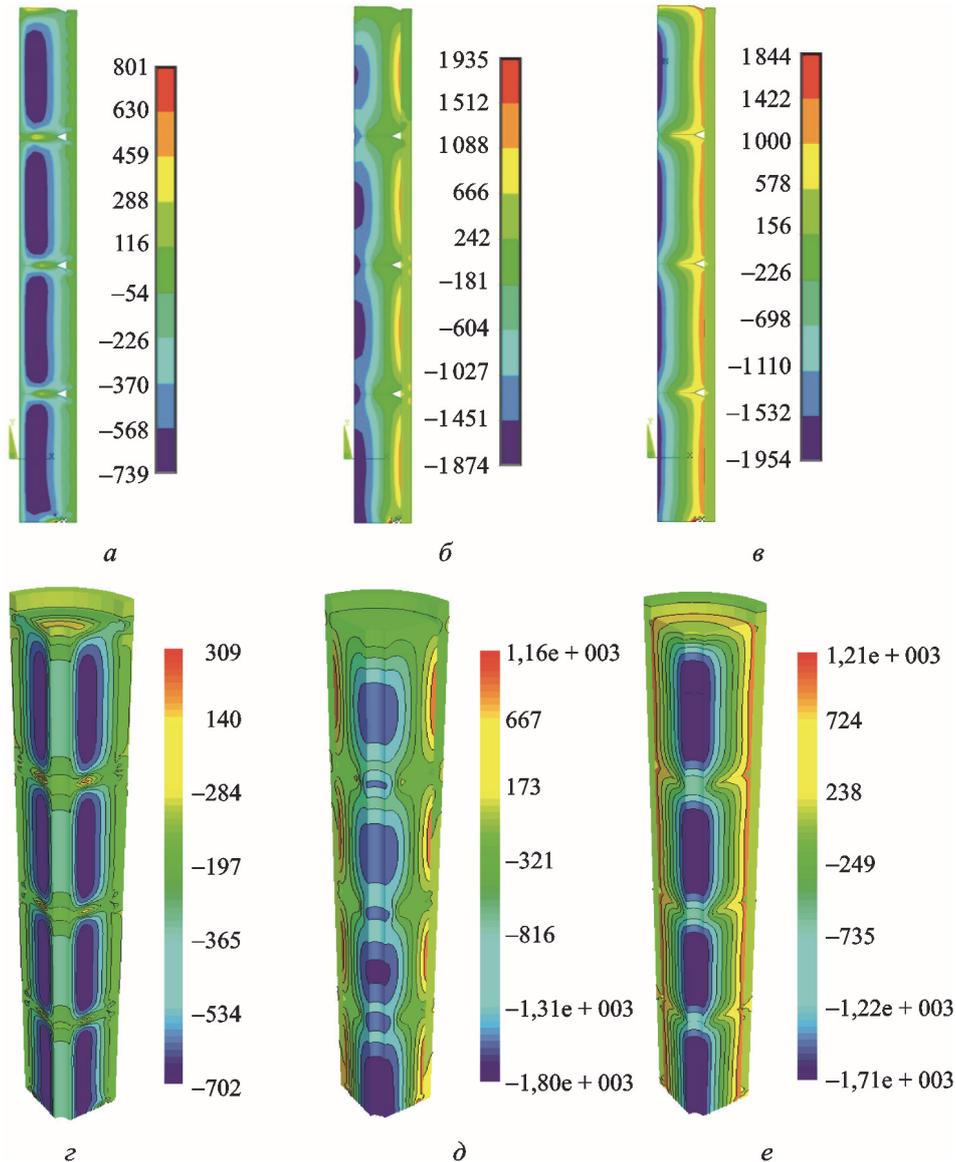


Рис. 5. Распределение радиальных (*а, г*), осевых (*б, д*) и окружных (*в, е*) напряжений, МПа, в расчетной области:

*а-в* — двумерный расчет (ANSYS); *г-е* — трехмерный расчет

Постановка задачи позволяет использовать разработанный вариант метода Шварца. Промежуток времени  $\Delta t$  разбивался на 10 временных шагов. На каждом шаге сначала решалась динамическая температурная задача, затем полученные поля температур учитывались при решении квазистационарного уравнения равновесия. На первой итерации первого временного шага для каждого цилиндра задавались следующие условия: осевые перемещения на нижнем торце принимались равными нулю, а на верхний торец действовало давление  $p_2$ . На следующих временных шагах на первой итерации для каждого цилиндра ставились

следующие условия: осевые перемещения на нижнем торце фиксировались с предыдущего временного шага, а на верхний торец действовали контактные силы, полученные на предыдущем временном шаге. По итогам первой итерации выполнялась сборка столба цилиндров путем последовательного перемещения каждого верхнего тела на торец нижнего. В среднем на каждом шаге по времени проводилось около 10 итераций.

Отметим, что в данной задаче итоговая система линейных уравнений для каждого тела решалась самостоятельно, что позволило существенно сократить время расчета.

На рис. 4, 5 приведены результаты трехмерного расчета, выполненного на основе разработанного авторского алгоритма и соответствующего программного комплекса, и результаты решения данной задачи (в *rz* постановке) в коде программы ANSYS (с помощью метода множителей Лагранжа с использованием конечных элементов второго порядка на четырехугольной сетке).

На рис. 4, *a–e* показано распределение температуры, радиальных и осевых перемещений, полученных при двумерном расчете по коду ANSYS и при трехмерном авторском расчете. Из сравнения соответствующих рисунков видно, что качественно структуры полей температуры и перемещений для обоих расчетов совпадают. Максимальные температуры в области, полученные при двумерном и трехмерном расчетах, составляют соответственно 1520 °С и 1800 К (1527 °С). В обоих расчетах максимум температуры достигается на внутренней поверхности цилиндров. При расчете по коду

ANSYS максимальные перемещения равны 0,046 мм (радиальные) и 0,44 мм (осевые), а при трехмерном расчете — 0,045 мм (радиальные) и 0,46 мм (осевые).

На рис. 5, *a–e* показано распределение радиальных, осевых и окружных напряжений, полученных при двумерном и трехмерном расчетах. Из сравнения соответствующих рисунков видно, что качественно структуры полей напряжений в обоих расчетах совпадают. В центральных частях цилиндров возникают зоны со сжимающими напряжениями (радиальными, осевыми и окружными), на краях цилиндров — растягивающие осевые и окружные напряжения. При расчете по коду ANSYS максимальные сжимающие напряжения равны -739 МПа (радиальные), -1874 МПа (осевые) и -1954 МПа (окружные), а при трехмерном авторском расчете -702 МПа (радиальные), -1800 МПа (осевые) и -1710 МПа (окружные). Сравнить максимальные значения растягивающих напряжений не совсем корректно, потому что они

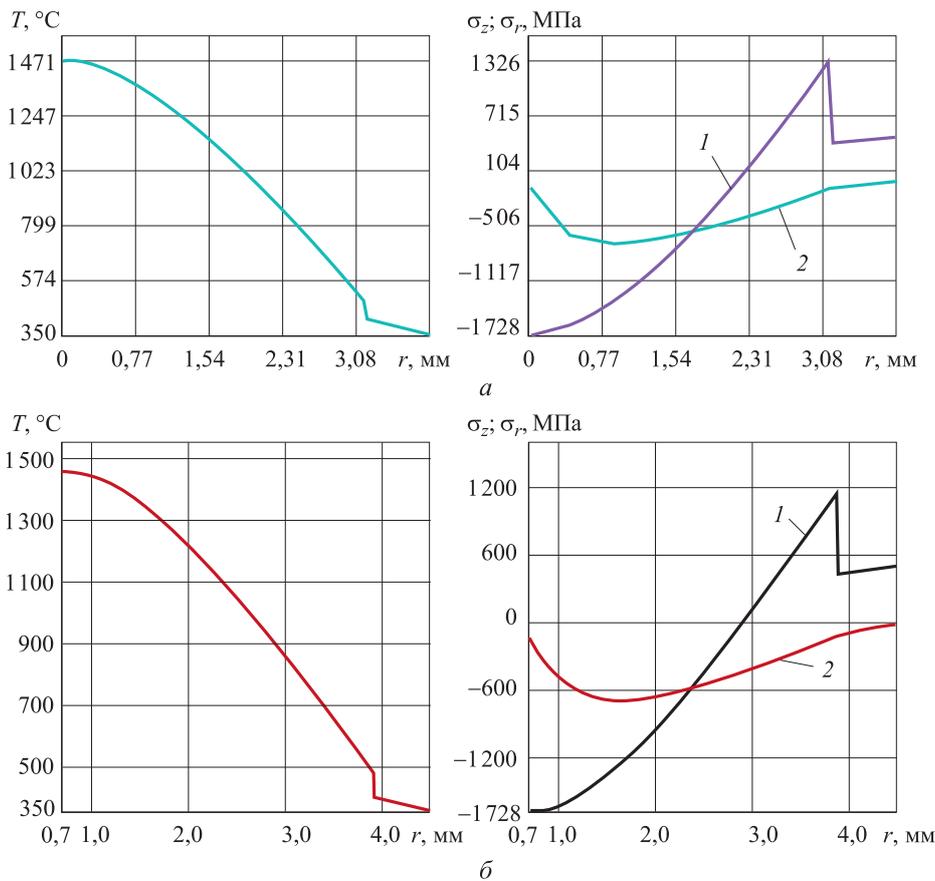


Рис. 6. Распределение температуры  $T$  (слева), осевых  $\sigma_z$  (1) и радиальных  $\sigma_r$  (2) напряжений (справа) по радиусу  $r$  для одномерного сечения: *a* — двумерный расчет (ANSYS); *b* — трехмерный расчет

достигаются в точках закрепления нижнего торца нижнего цилиндра. Соответствующие величины очень чувствительны к используемой расчетной сетке.

В обоих расчетах края контактирующих цилиндров под действием теплового расширения выходят из контакта, а центральные части цилиндров остаются в контакте, при этом для них выполнены условия равенства осевых перемещений и напряжений. На поверхностях контакта цилиндров с трубой выполнены равенства радиальных напряжений и координат (радиальные перемещения отличаются, так как изначально между телами существовал зазор).

Для более корректного количественного сравнения на рис. 6 показано распределение температуры, радиальных и осевых напряжений по радиусу для сечения, соответствующего центру нижнего цилиндра (одномерного сечения).

При двумерном расчете по коду ANSYS (рис. 6, а) температура на внутренней поверхности цилиндра составила 1 471 °С, а температурный скачок при переходе от цилиндра к трубе — около 80 °С. Осевые напряжения на внутренней поверхности цилиндра равны — 1 728 МПа (сжимающие), на внешней поверхности 1 325 МПа (растягивающие) и на внутренней поверхности трубы 410 МПа (растягивающие). Максимальные сжимающие радиальные напряжения достигают ~700 МПа, а контактное давление на поверхностях контакта около 100 МПа.

При трехмерном расчете (рис. 6, б) температура на внутренней поверхности цилиндра составила 1 468 °С, температурный скачок при переходе от цилиндра к трубе — около 75 °С. Осевые напряжения на внутренней поверхности цилиндра равны –1 675 МПа (сжимаю-

щие), на внешней поверхности 1 150 МПа (растягивающие), на внутренней поверхности трубы 450 МПа (растягивающие). Максимальные сжимающие радиальные напряжения составили ~690 МПа, контактное давление на поверхностях контакта около 107 МПа.

Анализ результатов, полученных при двумерном осесимметричном расчете с помощью кода ANSYS и при трехмерном авторском расчете, показал достаточно хорошее качественное и количественное соответствие между ними.

## Выводы

1. Изложена постановка многомерной задачи контактного взаимодействия системы термоупругих тел. Представлено обобщение алгоритма численного решения контактной задачи, предложенного в работе [7], на трехмерный случай для указанного класса задач. Данный алгоритм основан на альтернирующем методе Шварца со специальным заданием начальных условий на первой итерации.

2. На примере тестовых осесимметричных задач показано, что обобщение алгоритма на трехмерный случай выполнено корректно: результаты решения задач в двумерной и трехмерной постановках совпадают друг с другом.

3. Рассмотрен демонстрационный расчет, описывающий контакт пяти тел. Проведено сравнение результатов, полученных для двумерного осесимметричного расчета по коду ANSYS, и для трехмерного расчета, выполненного с помощью описанного выше метода. Анализ показал, что между результатами наблюдается достаточно хорошее качественное и количественное сходство.

## Литература

- [1] Бураго Н.Г., Кукуджанов В.Н. Обзор контактных алгоритмов. *Известия РАН. МТТ*, 2005, № 1, с. 45–87.
- [2] Зенкевич О. *Метод конечных элементов в технике*. Москва, Мир, 1975. 540 с.
- [3] Бате К.Ю. *Методы конечных элементов*. Москва, Физматлит, 2010. 1024 с.
- [4] Галанин М.П., Савенков Е.Б. *Методы численного анализа математических моделей*. Москва, Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2010. 591 с.
- [5] Зарубин В.С., Станкевич И.В. *Расчет теплонпряженных конструкций*. Москва, Машиностроение, 2005. 352 с.
- [6] Котович А.В., Станкевич И.В. *Решение задач теории упругости методом конечных элементов*. Москва, Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2012. 106 с.

- [7] Галанин М.П., Лукин В.В., Родин А.С., Станкевич И.В. Применение метода Шварца для моделирования контактного взаимодействия системы тел. *Журнал вычислительной математики и вычислительной физики*, 2015, т. 55, № 8, с. 1429–1443.
- [8] Станкевич И.В., Яковлев М.Е., Си Ту Хтет. Разработка алгоритма контактного взаимодействия на основе альтернирующего метода Шварца. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки*, 2011, Спец. вып. Прикладная математика, с. 134–141.
- [9] Марчук Г.И. *Методы вычислительной математики*. Москва, Наука, 1989. 608 с.
- [10] Toselli A., Widlund O. *Domain Decomposition methods — Algorithms and Theory*. Berlin, New York, Springer Heidelberg, 2005. 450 p.
- [11] Цвик Л.Б. Принцип поочередной непрерывности при решении задач теории поля по частям. *Докл. АН СССР*, 1978, т. 243, вып. 1, с. 74–77.
- [12] Цвик Л.Б. Принцип поочередности в задачах о сопряжении и контакте твердых деформируемых тел. *Прикладная механика*, 1980, т. 16, № 1, с. 13–18.

## References

- [1] Burago N.G., Kukudzhanov V.N. Obzor kontaktnykh algoritmov [Overview of contact algorithms]. *Izvestiia RAN. MTT [Mechanics of Solids]*. 2005, no. 1, pp. 45–87.
- [2] Zenkevich O. *Metod konechnykh elementov v tekhnike* [The finite element method in the art]. Moscow, Mir publ., 1975. 540 p.
- [3] Bate K.-Iu. *Metody konechnykh elementov* [Finite element methods]. Moscow, Fizmatlit publ., 2010. 1024 p.
- [4] Galanin M.P., Savenkov E.B. *Metody chislennogo analiza matematicheskikh modelei* [Methods of numerical analysis of mathematical models]. Moscow, Bauman Press, 2010. 591 p.
- [5] Zarubin V.S., Stankevich I.V. *Raschet teplonapriazhennykh konstruksii* [Calculation of heat-stressed designs]. Moscow, Mashinostroenie publ., 2005. 352 p.
- [6] Kotovich A.V., Stankevich I.V. *Reshenie zadach teorii uprugosti metodom konechnykh elementov* [Solution of elasticity problems by finite element method]. Moscow, Bauman Press, 2012. 106 p.
- [7] Galanin M.P., Lukin V.V., Rodin A.S., Stankevich I.V. Application of the Schwarz alternating method for simulating the contact interaction of a system of bodies. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2015, vol. 55, no. 8, pp. 1393–1406.
- [8] Stankevich I.V., Iakovlev M.E., Si Tu Khtet. Razrabotka algoritma kontaktnogo vzaimodeistviia na osnove al'terniruiushchego metoda Shvartsa [Development of contact interaction algorithm on the basis of Schwarz alternating method]. *Vestnik MGTU im. N.E. Baumana. Ser. Estestvennye nauki* [Herald of the Bauman Moscow State Technical University. Series Natural Sciences]. 2011, special issue Prikladnaia matematika, pp. 134–141.
- [9] Marchuk G.I. *Metody vychislitel'noi matematiki* [Methods of computational mathematics]. Moscow, Nauka publ., 1989. 608 p.
- [10] Toselli A., Widlund O. *Domain Decomposition methods — Algorithms and Theory*. Berlin, New York, Springer Heidelberg, 2005. 450 p.
- [11] Tsvik L.B. Printsip poocherednoi nepreryvnosti pri reshenii zadach teorii polia po chasti-am [The principle of sequential continuity in solving problems of field theory in parts]. *Dokl. AN SSSR* [Reports of the USSR Academy of Sciences]. 1978, vol. 243, is. 1, pp. 74–77.
- [12] Tsvik L.B. Printsip poocherednosti v zadachakh o sopriazhenii i kontakte tverdykh deformiruemykh tel [The principle for the sequence in the problems of interfacing and contacting the solid deformable bodies]. *Prikladnaia mekhanika* [International Applied Mechanics]. 1980, vol. 16, no. 1, pp. 13–18.

## Информация об авторах

**ГАЛАНИН Михаил Павлович** (Москва) — доктор физико-математических наук, профессор, зав. отделом. Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН (125047, Москва, Российская Федерация, Миусская пл., д. 4, e-mail: galan@keldysh.ru).

**КРУПКИН Антон Владимирович** (Москва) — главный специалист. АО «Высокотехнологический научно-исследовательский институт неорганических материалов имени академика А.А. Бочвара» (123098, Москва, Российская Федерация, ул. Рогова, д. 5а, e-mail: avkrupkin@bochvar.ru).

**КУЗНЕЦОВ Владимир Иванович** (Москва) — начальник отдела. АО «Высокотехнологический научно-исследовательский институт неорганических материалов имени академика А.А. Бочвара» (123098, Москва, Российская Федерация, ул. Рогова, д. 5а, e-mail: vikuznetsov@bochvar.ru).

**ЛУКИН Владимир Владимирович** (Москва) — кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник. Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН (125047, Москва, Российская Федерация, Миусская пл., д. 4, e-mail: vvlukin@gmail.com).

**НОВИКОВ Владимир Владимирович** (Москва) — кандидат технических наук, заместитель генерального директора. АО «Высокотехнологический научно-исследовательский институт неорганических материалов имени академика А.А. Бочвара» (123098, Москва, Российская Федерация, ул. Рогова, д. 5а, e-mail: vvnovikov@bochvar.ru).

**РОДИН Александр Сергеевич** (Москва) — кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник. Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН (125047, Москва, Российская Федерация, Миусская пл., д. 4, e-mail: rals@bk.ru).

**СТАНКЕВИЧ Игорь Васильевич** (Москва) — доктор технических наук, профессор кафедры «Прикладная математика». МГТУ им. Н.Э. Баумана (105005, Москва, Российская Федерация, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1, e-mail: aplmex@yandex.ru).

## Information about the authors

**GALANIN Mikhail Pavlovitch** (Moscow) — Doctor of Science (Physics and Maths), Professor, Department Head. Keldysh Institute of Applied Mathematics of the Russian Academy of Sciences KIAM (125047, Moscow, Russian Federation, Miusskaya Sq., Bldg. 4, e-mail: galan@keldysh.ru).

**KRUPKIN Anton Vladimirovich** (Moscow) — Senior Specialist. Bochvar High-Technology Research Institute of Inorganic Materials VNIINM (123098, Moscow, Russian Federation, Rogova St., Bldg. 5a, e-mail: avkrupkin@bochvar.ru).

**KUZNETSOV Vladimir Ivanovich** (Moscow) — Department Head. Bochvar High-Technology Research Institute of Inorganic Materials VNIINM (123098, Moscow, Russian Federation, Rogova St., Bldg. 5a, e-mail: vikuznetsov@bochvar.ru).

**LUKIN Vladimir Vladimirovich** (Moscow) — Candidate of Science, Senior Researcher. Keldysh Institute of Applied Mathematics of the Russian Academy of Sciences KIAM (125047, Moscow, Russian Federation, Miusskaya Sq., Bldg. 4, e-mail: vvlukin@gmail.com).

**NOVIKOV Vladimir Vladimirovich** (Moscow) — Candidate of Science, Deputy General Director. Bochvar High-Technology Research Institute of Inorganic Materials VNIINM (123098, Moscow, Russian Federation, Rogova St., Bldg. 5a, e-mail: vvnovikov@bochvar.ru).

**RODIN Aleksandr Sergeevich** (Moscow) — Candidate of Science, Senior Researcher. Keldysh Institute of Applied Mathematics of the Russian Academy of Sciences KIAM (125047, Moscow, Russian Federation, Miusskaya Sq., Bldg. 4, e-mail: rals@bk.ru).

**STANKEVICH Igor Vasilevich** (Moscow) — Doctor of Science (Eng.), Professor, Department of Applied Mathematics. Bauman Moscow State Technical University (105005, Moscow, Russian Federation, 2<sup>nd</sup> Baumanskaya St., Bldg. 5, Block 1, e-mail: aplmex@yandex.ru).