УДК 624.07:534.1 10.18698/0536-1044-2016-10-32-38

Анализ влияния высокочастотных случайных вибраций на нелинейную модель конструкции*

О.Н. Тушев, А.В. Маркианов

МГТУ им. Н.Э. Баумана, 105005, Москва, Российская Федерация, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1

The Analysis of Influence of High-Frequency Vibrations on the Nonlinear Model of a Construction

O.N. Tushev, A.V. Markianov

BMSTU, 105005, Moscow, Russian Federation, 2nd Baumanskaya St., Bldg. 5, Block 1

e-mail: markianov@gmail.com

Рассмотрен эффект воздействия высокочастотных аддитивных и мультипликативных нестационарных или стационарных вибраций на нелинейную механическую систему с конечным числом степеней свободы. Воздействия определены в рамках корреляционной теории. Считается, что интерес представляет только «медленное движение», определяемое математическим ожиданием. При этом высокочастотные колебания фазовых координат малы и их можно не учитывать, как это делают, например, при анализе ложных показаний («уходов») маятникового акселерометра при быстрых вибрациях. Вначале исходное уравнение движения статистически линеаризуется. Решение находят на основе представления вектора фазовых координат в форме интегростепенного ряда по матрице, содержащей центрированные случайные вибрации; учитываются члены до квадратических включительно. В результате получается удобная явная зависимость вектора математических ожиданий относительно элементов корреляционной матрицы вибраций, что позволяет выявить их иерархию в отношении вклада в «ошибку» (вибрационную составляющую решения). Фундаментальная матрица линеаризованной системы для организации вычислительной процедуры представляется в форме мультипликативного интеграла.

Ключевые слова: случайные вибрации, статистическая линеаризация, интегростепенной ряд, математическое ожидание, корреляционная функция, фундаментальная матрица, мультипликативный интеграл.

The authors analyze the effect of high-frequency additive and multiplicative non-stationary or stationary vibrations on a nonlinear mechanical system with a finite number of degrees of freedom. The influences are defined within the correlation theory. It is considered that only the «slow motion» determined by mathematical expectation is of interest. High-frequency vibrations of phase coordinates are small and may be omitted in the calculations. For example, this is done when false readings («walks») of the pendulum accelerometer are analyzed at fast vibrations. First, the initial equation of motion is statistically linearized. To find the solution, the phase coordinate vector is represented as an integro-power series by the matrix containing the aligned random vibrations, and members up to quadratic ones are considered, inclusively. As a result, a convenient explicit dependence of the expectation

* Работа поддержана грантом РФФИ 09-08-00699-а.

vector on the elements of the correlation matrix is obtained. Using this equation, it is possible to establish a hierarchy with regards to their contribution to the «error» (vibration component of the solution). The fundamental matrix of the linearized system for the organization of the computing procedure is represented in the form of a multiplicative integral.

Keywords: random vibrations, statistical linearization, integro-power series, the expectation, correlation function, fundamental matrix, multiplicative integral.

Решение задачи анализа влияния аддитивных и мультипликативных (параметрических) воздействий на динамическую систему в различных вариантах приведено в работах [1–3]. Классическим примером является «уход» маятника при действии «быстрой» периодической вибрации, приложенной к точке подвеса. Его движение описывается уравнениями Матье или Хилла. При высокочастотных воздействиях на динамическую систему опасность представляют, как правило, не катастрофические режимы, связанные с явными поломками и разрушениями, а частичная или даже полная потеря функциональности, обусловленная появлением в «медленной» части решения вибрационной составляющей [4]. Например, в измерительных приборах она рассматривается как ложный сигнал. При этом в силу большой инерционности высокочастотные вибрации фазовых координат системы имеют низкий уровень и существенной роли не играют.

При случайных вибрациях суть рассмотренного явления не меняется. В стохастической постановке эта задача рассматривалась, например, в работах [5–7]. Если вибрации являются стационарными с дробно-рациональными спектрами, то задача может быть решена численным моделированием методом статистических испытаний. При этом возможные сложности расчетной модели и точность вычислений непосредственно определяются располагаемой вычислительной мощностью компьютера. Представляет интерес решение этой задачи в более общей постановке, а именно для нестационарных случайных вибраций на основе многомерной нелинейной модели конструкции. Для линейной модели она решена в работе [8].

Цель работы — получение явной зависимости медленного движения нелинейной многомерной модели от элементов матрицы корреляционных функций вектора внешних воздействий.

Считаем, что динамика системы определяется векторным дифференциальным уравнением в форме Коши

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{A}_2(t)\mathbf{\Phi}(\mathbf{X}, t) + \mathbf{A}_1(t); \quad \mathbf{X}(t_0) = \mathbf{X}_0, \tag{1}$$

где $\mathbf{X} = (x_1, x_2, ..., x_n)^{\text{т}}$ — вектор фазовых координат; $\mathbf{A}_2(t)$ — матрица случайных мультипликативных воздействий; $\mathbf{\Phi}(\mathbf{X}, t)$ — статистически линеаризованная зависимость; $\mathbf{A}_1(t)$ — вектор случайных аддитивных воздействий; $\mathbf{X}_0$ — детерминированный начальный вектор.

Для удобства обозначений будем считать, что элементы $a_{ij}(t)$ $\forall i, j$ матрицы $\mathbf{A}_2(t)$ и $a_i(t)$ вектора $\mathbf{A}_1(t)$ составляют единый вектор $\mathbf{A}(t)$ с элементами $a_k(t)$, где $k = 1, 2, ..., m$ ($m = n^2 + n$). Элементы с номерами $1, 2, ..., n^2$ — мультипликативные составляющие, пронумерованные построчно, а элементы с номерами $n^2 + 1, ..., m$ — аддитивные. Вектор $\mathbf{A}(t)$ задан вектором математических ожиданий $\mathbf{M}_A(t)$ и матрицей корреляционных функций $\mathbf{K}_A(t, t')$.

Статистически линеаризованная зависимость в общем виде записывается следующим образом [9]:

$$\mathbf{\Phi}(\mathbf{X}, t) = \mathbf{L}(\mathbf{M}_X(t), \mathbf{K}_X(t), t) + \mathbf{R}(\mathrm{M}_X(t), \mathbf{K}_X(t), t)\mathbf{X}^0, \tag{2}$$

где $\mathbf{L}(t)$ — векторная статистическая характеристика по математическому ожиданию; $\mathbf{M}_X(t)$ и $\mathbf{K}_X(t)$ — вектор математических ожиданий и матрица корреляционных моментов вектора $\mathbf{X}$; $\mathbf{R}(t)$ — матрица статистических коэффициентов по центрированному вектору $\mathbf{X}^0$.

Различие в обозначениях матриц корреляционных функций $\mathbf{K}_X(t, t')$ и корреляционных моментов $\mathbf{K}_X(t)$, а также их элементов заключается только в количестве аргументов.

Как показано в работе [9], формулу (2) можно трансформировать к более простому варианту статистической линеаризации (автор Р.К. Бутон). Подставив выражение $\mathbf{X}^0 = \mathbf{X} - \mathbf{M}_X$ в формулу (2), получим

$$\mathbf{\Phi} = (\mathbf{L} - \mathbf{R}\mathbf{M}_X) + \mathbf{R}\mathbf{X}.$$

В первом приближении можно положить $\mathbf{L} - \mathbf{R}\mathbf{M}_X \cong 0$. Тогда упрощенный вариант линеаризации с учетом того, что уровень высокочастотных вибраций вектора $\mathbf{X}$ пренебрежимо мал $(\mathbf{K}_X(t)\equiv 0)$, выражается в следующем виде:

$$\mathbf{\Phi}(\mathbf{X},t)=\mathbf{R}(\mathbf{M}_X,t)\mathbf{X}(t). \qquad (3)$$

После подстановки выражения (3) в уравнение (1) имеем

$$\dot{\mathbf{X}}=\mathbf{A}_2(t)\mathbf{R}(\mathbf{M}_X,t)\mathbf{X}+\mathbf{A}_1(t). \qquad (4)$$

Проведем формальное преобразование неоднородного уравнения (4) к однородному путем расширения размерности фазового пространства на единицу. Дополним векторное уравнение (4) тривиальными скалярными уравнениями $\dot{x}_{n+1}=0$; $x_{n+1}(t_0)=1$. Тогда, оставив прежнее обозначение для вектора фазовых координат, получим

$$\dot{\mathbf{X}}=\mathbf{G}(t)\mathbf{X}, \qquad (5)$$

где $\mathbf{X}=(x_1,x_2,...,x_{n+1})^{\text{т}}$; $\mathbf{X}_0=(x_{01},x_{02},...,x_{0n},1)^{\text{т}}$;

$$\mathbf{G}=\begin{pmatrix}\mathbf{A}_2\mathbf{R} & \mathbf{A}_1\\ \mathbf{O} & 0\end{pmatrix},$$

$\mathbf{O}$ — нулевая строка.

Нетрудно убедиться, что уравнения (4) и (5) различаются только по форме, а по существу идентичны.

Запишем решение уравнения (5) в виде

$$\mathbf{X}(t)=\mathbf{\Omega}_{t_0}^t(\mathbf{G})\mathbf{X}_0,$$

где $\mathbf{\Omega}_{t_0}^t(\mathbf{G})$ — фундаментальная матрица, определяемая на отрезке времени $[t_0,t]$. Представим матрицу $\mathbf{G}$ в виде суммы двух матриц, одна из которых зависит только от математических ожиданий, а вторая — от центрированных составляющих:

$$\mathbf{U}=\begin{pmatrix}\mathbf{M}_2\mathbf{R} & \mathbf{M}_1\\ 0 & 0\end{pmatrix};\quad \mathbf{V}=\begin{pmatrix}\mathbf{A}_2^0\mathbf{R} & \mathbf{A}_1^0\\ 0 & 0\end{pmatrix},$$

где $\mathbf{M}_2$ и $\mathbf{M}_1$ — матрица и вектор математических ожиданий аддитивных и мультипликативных воздействий.

Используя известное преобразование фундаментальной матрицы от суммы двух матриц [10], получим

$$\mathbf{X}(t)=\mathbf{\Omega}_{t_0}^t(\mathbf{U})\mathbf{\Omega}_{t_0}^t(\mathbf{D})\mathbf{X}_0, \qquad (6)$$

где

$$\mathbf{D}(t)=\left[\mathbf{\Omega}_{t_0}^t(\mathbf{U})\right]^{-1}\mathbf{V}(t)\mathbf{\Omega}_{t_0}^t(\mathbf{U}). \qquad (7)$$

В работе [10] показано, что любую фундаментальную матрицу можно разложить в интегростепенной ряд. При этом он абсолютно и равномерно сходится на любом замкнутом интервале изменения аргумента t, если элементы матрицы коэффициентов ограничены и имеют конечное число разрывов на участке интегрирования. После разложения $\mathbf{\Omega}_{t_0}^t(\mathbf{D})$ в такой ряд выражение (6) трансформируется к виду

$$\mathbf{X}(t)=\mathbf{\Omega}_{t_0}^t(\mathbf{U})\left(\mathbf{E}+\int_{t_0}^t\mathbf{D}(\tau)d\tau+\int_{t_0}^t\mathbf{D}(\tau_2)\int_{t_0}^{\tau_2}\mathbf{D}(\tau_1)d\tau_1 d\tau_2+...\right)\mathbf{X}_0, \qquad (8)$$

где $\mathbf{E}$ — единичная матрица.

Ограничимся в выражении (8) тремя членами, что соответствует квадратическому приближению. Согласно поставленной задаче, представляет интерес только «медленное» движение, которое определяется математическим ожиданием. Осреднение выражения (8) с учетом того, что $\mathbf{M}[\mathbf{D}(t)]\equiv 0$, приводит к следующему соотношению:

$$\mathbf{M}_X(t)=\mathbf{\Omega}_{t_0}^t(\mathbf{U})\times$$

$$\times\left[\mathbf{E}+\mathbf{M}\left(\int_{t_0}^t\mathbf{D}(\tau_2)\int_{t_0}^{\tau_2}\mathbf{D}(\tau_1)d\tau_1 d\tau_2\right)\right]\mathbf{X}_0. \qquad (9)$$

Преобразуем формальное равенство (9) и представим вектор $\mathbf{M}_X(t)$ в виде явной зависимости от элементов $k_{ij}^{(A)}(t,t')$ матрицы $\mathbf{K}_A(t,t')$. Для этого используем так называемую матричную единицу J_{ij} — матрицу со всеми нулевыми элементами, за исключением элемента с номером ij, равного единице. Нумерация элементов может быть любой, например, при сквозной построчной нумерации элементов матрицы — J_i $(i=1,2,...,n)$. Разложим вектор $\mathbf{A}_1^0(t)$ и матрицу $\mathbf{A}_2^0(t)$ по матричным единицам:

$$\mathbf{A}_1^0(t)=\sum_{i=1}^m a_i^0(t)J_i;\quad \mathbf{A}_2(t)=\sum_{i,j=1}^n a_{ij}^0(t)J_{ij}.$$

Для объединенного вектора $\mathbf{A}^0(t)$ имеем

$$\mathbf{A}(t)=\sum_{i=1}^m a_i^0(t)J_i.$$

Тогда

$$\mathbf{V}(\mathbf{A})=\sum_{i=1}^m a_i^0(t)\mathbf{V}_i(t), \qquad (10)$$

где $\mathbf{V}_i(t)=\mathbf{V}\big(J_i,t\big)$.

Подставив выражение (10) в формулу (7), получим

$$\mathbf{D}(t) = \sum_{i=1}^{m} a_i^0(t)\mathbf{D}_i(t), \qquad (11)$$

где

$$\mathbf{D}_i(t) = \left[\mathbf{\Omega}_{t_0}^t(\mathbf{U})\right]^{-1} \mathbf{V}_i(t)\mathbf{\Omega}_{t_0}^t(\mathbf{U}).$$

Подставив формулу (11) в соотношение (9), после преобразований получим математическое ожидание в виде

$$\mathbf{M}_X(t) = \mathbf{\Omega}_{t_0}^t(\mathbf{U})\left(\mathbf{E} + \sum_{i,j=1}^{m} \int_{t_0}^{t} \mathbf{D}_i(\tau_2) \int_{t_0}^{\tau_2} \mathbf{D}_j(\tau_1) k_{ij}^{(A)}(\tau_1, \tau_2) d\tau_1 d\tau_2\right)\mathbf{X}_0. \qquad (12)$$

Второй член в формуле (12) представляет собой вибрационную составляющую «медленного» движения. На практике матрица $\mathbf{K}_A(t, t')$ сильно разрежена. Явный вид формулы (12) позволяет априори исключить те члены суммы, которые заведомо равны нулю.

В процессе вывода разрешающей зависимости (9) приняты два допущения. Первое из них необходимо при использовании статистической линеаризации и предполагает близость законов распределения фазовых координат к нормальному. На практике это необходимо только для тех элементов вектора, которые входят в нелинейную вектор-функцию. Известно [9], чем инерционнее система, тем ближе законы распределения ее фазовых координат к нормальному. Для механических систем это условие во многих случаях выполняется.

Второе допущение связано с разложением фундаментальной матрицы в ряд с учетом членов до квадратических включительно. Следовательно, для обеспечения приемлемой точности уровень параметрических воздействий должен быть достаточно мал. Это традиционное допущение при рассмотрении параметрических задач. Заметим, что с качественной точки зрения второе допущение «вкладывается» в первое, так как высокий уровень параметрических воздействий может привести к существенному нарушению нормальности закона распределения $\mathbf{X}$.

Рассмотрим вычислительные аспекты полученного результата. Вычисление прямой и обратной фундаментальных матриц удобно осуществить, если трактовать их как мультипликативные интегралы. Выберем во времени две точки: t и $t + \Delta t$. Тогда на основании известного свойства фундаментальных матриц можно записать

$$\begin{aligned} &\mathbf{\Omega}_{t_0}^{t+\Delta t}(\mathbf{U}) = \mathbf{\Omega}_t^{t+\Delta t}(\mathbf{U})\mathbf{\Omega}_{t_0}^t(\mathbf{U}); \\ &\left[\mathbf{\Omega}_{t_0}^{t+\Delta t}(\mathbf{U})\right]^{-1} = \left[\mathbf{\Omega}_{t_0}^t(\mathbf{U})\right]^{-1}\left[\mathbf{\Omega}_t^{t+\Delta t}(\mathbf{U})\right]^{-1}; \qquad (13) \\ &\mathbf{\Omega}_{t_0}^{t_0}(\mathbf{U}) = \mathbf{\Omega}_{t_0}^{t_0}(\mathbf{U}) = \mathbf{E}. \end{aligned}$$

Представим фундаментальные матрицы в форме абсолютно и равномерно сходящихся интегростепенных рядов

$$\begin{aligned} &\mathbf{\Omega}_{t_0}^t(\mathbf{U}) = \mathbf{E} + \int_{t_0}^{t} \mathbf{U}(\tau_1)d\tau_1 + \\ &+ \int_{t_0}^{t} \mathbf{U}(\tau_2) \int_{t_0}^{\tau_2} \mathbf{U}(\tau_1)d\tau_1 d\tau_2 + \ldots; \\ &\left[\mathbf{\Omega}_{t_0}^t(\mathbf{U})\right]^{-1} = \mathbf{E} - \int_{t_0}^{t} \mathbf{U}(\tau_1)d\tau_1 + \\ &+ \int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{\tau_2} \mathbf{U}(\tau_1)\mathbf{U}(\tau_2)d\tau_1 d\tau_2 - \ldots . \end{aligned} \qquad (14)$$

Определим фундаментальные матрицы на малом отрезке $[t, t + \Delta t]$. При этом считаем, что $\mathbf{U}(\tau_1) = \mathbf{U}(\tau_2) = \mathbf{U}(t) = \text{const}$. Тогда на основании выражений (14) имеем

$$\begin{aligned} &\mathbf{\Omega}_t^{t+\Delta t}(\mathbf{U}) = \mathbf{E} + \mathbf{U}(t)\Delta t + \frac{1}{2}\mathbf{U}^2(t)\Delta t^2 + \ldots; \\ &\left[\mathbf{\Omega}_t^{t+\Delta t}(\mathbf{U})\right]^{-1} = \mathbf{E} - \mathbf{U}(t)\Delta t + \frac{1}{2}\mathbf{U}^2(t)\Delta t^2 - \ldots . \end{aligned} \qquad (15)$$

Если в соотношениях (15) ограничиться линейными членами, то несложно показать, что вычисление по рекуррентным формулам (13) в точности соответствует процедуре численного интегрирования методом Эйлера. При этом зависимость элементов матрицы $\mathbf{U}$ от $\mathbf{M}_X$ не приводит к дополнительным трудностям. Представление фундаментальных матриц в виде выражений (13) называется мультипликативным интегралом. На основе этого алгоритма можно построить аналог процедур интегрирования любого порядка, например, использовать квадратические члены в соотношениях (15) или по двум шагам выполнить вычисления методом Эйлера – Коши.

Важным обстоятельством, которое необходимо учесть при организации рациональной вычислительной процедуры, является то, что матричная единица состоит преимущественно из нулей, а значит, и матрица $\mathbf{V}_i(t)$ чрезвычайно сильно разрежена.

Таким образом, использование обычного правила умножения матриц при вычислении $\mathbf{D}_i(t)$ связано с многочисленными бесполезными умножениями на ноль. Для исправления этого недостатка необходимо модифицировать

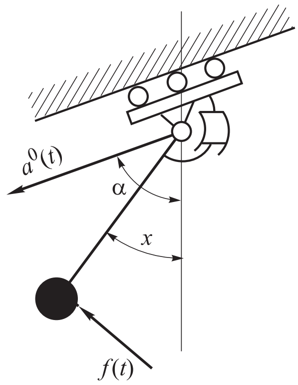

Рис. 1. Маятник с подвижной точкой подвеса

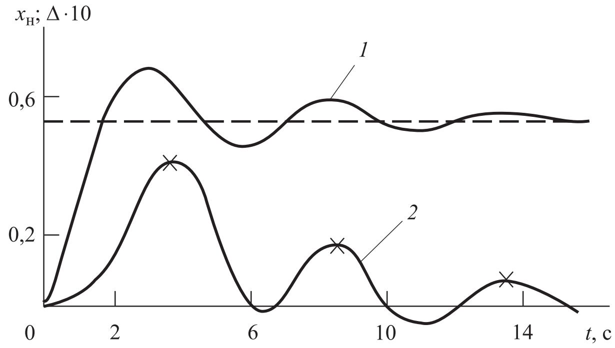

Рис. 2. Зависимость номинального решения $x_н$ (*1*) и вибрационной составляющей Δ (*2*) от времени t

правило умножения матриц, если одна из них является матричной единицей. Несложно показать, что справедливы следующие простые правила умножения:

$$\mathbf{J}_{ik}\mathbf{R} = \mathbf{R}_i^{(k)},$$

где $\mathbf{R}_i^{(k)}$ — нулевая матрица, за исключением i-й строки, которая замещается k-й строкой.

Для произвольных квадратных матриц $\mathbf{B}$ и $\mathbf{C}$ имеем

$$\mathbf{B}\mathbf{J}_{ij}\mathbf{C} = \mathbf{B}_i\mathbf{C}_j, \qquad (16)$$

где $\mathbf{B}_i$ — i-й столбец, $\mathbf{C}_j$ – j-я строка.

Использование этих правил полностью исключает паразитные операции. Для аддитивных элементов $a_i^0(t)$ $(i = n^2+1, ..., m)$ при вычислении $\mathbf{D}_i(t)$ применяют правило (16). Для мультипликативных составляющих $a_i^0(t)$ $(i = 1, 2, ..., n^2)$ вначале следует преобразовать произведение типа $\mathbf{B}\mathbf{R}_i^{(k)}\mathbf{C}$, которое можно представить в виде

$$\mathbf{B}\mathbf{R}_i^{(k)}\mathbf{C} = \sum_{j=1}^{n^2} r_{ij}^{(k)}\mathbf{B}\mathbf{J}_{ij}\mathbf{C},$$

где $r_{ij}^{(k)}$ — элементы i-й строки матрицы $\mathbf{R}_i^{(k)}$.

Далее следует использовать правило (16) для каждого слагаемого.

В качестве примера рассмотрим систему, приведенную на рис. 1 и представляющую собой маятник с подвижной точкой подвеса и нелинейным демпфером. Непосредственно к маятнику приложено детерминированное воздействие $f(t) = 0,841(t-0)$, а к точке подвеса — центрированная случайная квазистационарная вибрация с ускорением $a^0(t)$, корреляционная функция которого задана выражением

$$K_a(t,t') = \sigma^2 \exp\left[-0,5\left|t-t'\right|\right]\times$$
$$\times\left[\exp(-0,4\tau) - \exp(-\tau)\right],$$

где

$$\tau = \begin{cases} t & \text{при } t \le t'; \\ t' & \text{при } t > t'. \end{cases}$$

Уравнение движения системы для малых углов имеет вид

$$\ddot{x} + c_1\dot{x} + c_2\dot{x}^3 + c_3\left[1 + a^0(t)\cos\alpha\right]x =$$
$$= c_3 a^0(t)\sin\alpha + f(t).$$

Для вычисления выбраны следующие значения: $c_1 = 0,4$; $c_2 = 5,5$; $c_3 = 1,6$; $\alpha = 45°$. Коэффициент статистической линеаризации для кубической нелинейности [9]

$$r(m_x) = 3c_2 m_x^2,$$

где m_x — математическое ожидание.

На рис. 2 показаны номинальное решение $x_н$ уравнения движения при $a^0(t) \equiv 0$ и вибрационная составляющая («ошибка») Δ = m_x – $x_н$. Решение оценивали методом статистических испытаний с числом реализаций 10^3. Расхождение пиковых значений $\Delta(t)$, обозначенных на рис. 2 знаком «×», в интервале времени [0, 15] не превосходило 3,8 %.

Выводы

1. Предлагаемый подход позволил получить явную зависимость медленного движения нелинейной многомерной модели от элементов матрицы корреляционных функций вектора внешних воздействий.

2. Представление фундаментальной матрицы в виде мультипликативного интеграла и применение специальных операций умножения при наличии разреженных матриц позволило получить простой и экономичный в отношении машинных ресурсов вычислительный алгоритм.

Литература

[1] Gottwald G., Harlim J. The role of additive and multiplicative noise in filtering complex dynamics systems. *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 2013, № 469, pp. 96–112.

[2] Li C., Duan J. Impact of correlated noises on additive dynamical systems. *Mathematical Problems in Engineering*, 2014, article no. 678976. URL: http://dx.doi.org/10.1155/2014/678976 (дата обращения 24 апреля 2016).

[3] Поляк Б.Т., Хлебников М.В., Щербаков П.С. Нелинейные системы с ограниченными или мультипликативными возмущениями. *Проблемы устойчивости и управления. Сб. науч. ст., посвященный 80-летию академика В.М. Матросова*, Москва, Физматлит, 2013, с. 270–299.

[4] Блехман И.И. *Вибрационная механика*. Москва, Физматлит, 1994. 394 с.

[5] Гусев А.С. *Вероятностные методы в механике машин и конструкций*. Москва, Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2009. 224 с.

[6] Светлицкий В.А. *Стохастическая механика и теория надежности*. Москва, Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2002. 504 с.

[7] Makarov R.N., Shkarupa E.V. Stochastic algorithms with Hermit cubic spline interpolation for global estimation of solutions of boundary value problems. *SIAM Journal of Scientific Computing*, 2008, vol. 30, № 1, pp. 169–188.

[8] Зайцев С.Э., Тушев О.Н. Оценка влияния случайных аддитивных и мультипликативных вибраций на динамическое поведение системы. *Известия РАН. МТТ*, 2001, № 6, с. 163–167.

[9] Казаков И.Е. *Статистическая теория систем уравнения в пространстве состояний*. Москва, Наука, 1975. 432 с.

[10] Гонтмахер Ф.Р. *Теория матриц*. Москва, Наука, 1967. 432 с.

References

[1] Gottwald G., Harlim J. The role of additive and multiplicative noise in filtering complex dynamics systems. *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 2013, № 469, pp. 96–112.

[2] Li C., Duan J. Impact of correlated noises on additive dynamical systems. *Mathematical Problems in Engineering*, 2014, article no. 678976. Available at: http://dx.doi.org/10.1155/2014/678976 (accessed 24 April 2016).

[3] Poliak B.T., Khlebnikov M.V., Shcherbakov P.S. Nelineinye sistemy s ogranichennymi ili mul'tiplikativnymi vozmushcheniiami [Nonlinear systems with limited or multiplicative perturbations. Problems of stability and control]. *Problemy ustoichivosti i upravleniia. Sb. nauch. st., posviashchennyi 80-letiiu akademika V.M. Matrosova* [Problems of stability and control. Collection of articles dedicated to the 80th anniversary of academician V.M. Matrosov]. Moscow, Fizmatlit publ., 2013, pp. 270–299.

[4] Blekhman I.I. *Vibratsionnaia mekhanika* [Mechanical Vibration]. Moscow, Fizmatlit publ., 1994. 394 p.

[5] Gusev A.S. *Veroiatnostnye metody v mekhanike mashin i konstruktsii* [Probabilistic methods in the mechanics of machines and structures]. Moscow, Bauman Press, 2009. 224 p.

[6] Svetlitskii V.A. *Stokhasticheskaia mekhanika i teoriia nadezhnosti* [Stochastic mechanics and the theory of reliability]. Moscow, Bauman Press, 2002. 504 p.

[7] Makarov R.N., Shkarupa E.V. Stochastic algorithms with Hermit cubic spline interpolation for global estimation of solutions of boundary value problems. *SIAM Journal of Scientific Computing*, 2007, vol. 3, no. 1, pp. 169–188.

[8] Zaitsev S.E., Tushev O.N. Otsenka vliianiia sluchainykh additivnykh i mul'tiplikativnykh vibratsii na dinamicheskoe povedenie sistemy [Assessing the impact of random additive and multiplicative vibration on the dynamic behavior of the system]. *Izvestiia RAN. MTT* [Mechanics of Solids]. 2001, no. 6, pp. 163–167.

[9] Kazakov I.E. *Statisticheskaia teoriia sistem uravneniia v prostranstve sostoianii* [Statistical theory of the equation systems in the state space]. Moscow, Nauka publ., 1975. 432 p.
[10] Gontmakher F.R. *Teoriia matrits* [The theory of matrices]. Moscow, Nauka publ., 1967. 432 p.

Статья поступила в редакцию 25.05.2016

Информация об авторах

ТУШЕВ Олег Николаевич (Москва) — доктор технических наук, профессор, зав. кафедрой «Аэрокосмические системы». МГТУ им. Н.Э. Баумана (105005, Москва, Российская Федерация, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1).

МАРКИАНОВ Андрей Владимирович (Москва) — аспирант кафедры «Аэрокосмические системы». МГТУ им. Н.Э. Баумана (105005, Москва, Российская Федерация, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1, e-mail: markianov@gmail.com).

Information about the authors

TUSHEV Oleg Nikolaevich (Moscow) — Doctor of Science (Eng.), Professor, Head of Aerospace Systems Department. Bauman Moscow State Technical University (105005, Moscow, Russian Federation, 2nd Baumanskaya St., Bldg. 5, Block 1).

MARKIANOV Andrey Vladimirovich (Moscow) — Postgraduate, Aerospace Systems Department. Bauman Moscow State Technical University (105005, Moscow, Russian Federation, 2nd Baumanskaya St., Bldg. 5, Block 1, e-mail: markianov@gmail.com).