УДК 681.5

Учет наложенных внешних связей в математической модели древовидного исполнительного механизма двуногого шагающего робота

КОВАЛЬЧУК
Александр Кондратьевич
кандидат технических наук, доцент,
директор МИПК
(МГТУ им. Н.Э. Баумана)

А.К. Ковальчук

Предлагается блочно-матричный способ записи математической модели древовидного исполнительного механизма двуногого шагающего робота, с учетом наложенных на него внешних связей. Данный способ позволяет получать математическую модель в форме, традиционной для моделей роботов с линейной (разомкнутой) кинематической цепью.

Ключевые слова: двуногий шагающий робот, древовидный исполнительный механизм, математическая модель.

The blochno-matrix way of record of mathematical model of the treelike executive mechanism of the biped walking robot, taking into account the external relations imposed on it is offered. The given way allows to receive mathematical model in the form traditional for models of robots with a linear (opened) kinematic chain.

Keywords: the biped walking robot, the treelike executive mechanism, mathematical model.

Уравнение динамики двуногого шагающего робота, имеющего древовидную кинематическую структуру, записывается в виде [1, 2]

$$A(q)\ddot{q} + B(q,\dot{q}) - C(q)^0 f_{\text{в}} - H(q)^0 n_{\text{в}} = \tau, \tag{1}$$

где

$$\begin{aligned} A(q) = \sigma\left({}^0 z^d\right)^{\text{т}} \Big(-\left(\Lambda({}^0 c_f^D)\right)^{\text{т}} m^d \Big(D^0 z^d (E-\sigma) + \\ + \Lambda^{\text{т}}({}^0 c_{f_D})^0 z^d \sigma\Big) + D^{\text{т}}\, {}^0 J_C^d D^0 z^d \sigma\Big) + (E-\sigma)\left({}^0 z^d\right)^{\text{т}} \times \\ \times D^{\text{т}} m^d \Big(D^0 z^d (E-\sigma) + \Lambda^{\text{т}}({}^0 c_{f_D})^0 z^d \sigma\Big); \end{aligned} \tag{2}$$

$$B(q,\dot q)=\sigma\left({}^0z^d\right)^{\mathrm{т}}\Big\{-\left(\Lambda({}^0c_f^D)\right)^{\mathrm{т}}m^d\times$$
$$\times\Big[\Lambda^{\mathrm{т}}({}^0c_{f_D})\Lambda^{\mathrm{т}}({}^0z^d\sigma\dot q^d)(D-E)+\Lambda^{\mathrm{т}}\times$$
$$\times\Big(\Lambda^{\mathrm{т}}({}^0c_{f_D})\sigma\dot q^{d\,0}z^dD+\Lambda^{\mathrm{т}}({}^0c_{f_D})\times$$
$$\times\left((D-E)\sigma^0z^d\dot q\right)^d\Big)+$$
$$+2D\Lambda^{\mathrm{т}}\left({}^0z^d(E-\sigma)\dot q^d\right)(D-E)\Big]+$$
$$+D^{\mathrm{т}\,0}J_C^dD\sigma\dot q^d\Lambda^{\mathrm{т}}({}^0z^d)(D-E)+D^{\mathrm{т}}\Lambda\times \qquad (3)$$
$$\times\left(D^0z^d\sigma\dot q\right)^{d\ 0}J_C^dD\Big\}\,{}^0z^d\sigma\dot q+(E-\sigma)\times$$
$$\times\left({}^0z^d\right)^{\mathrm{т}}D^{\mathrm{т}}m^d\Big[\Lambda^{\mathrm{т}}({}^0c_{f_D})\Lambda^{\mathrm{т}}\times$$
$$\times({}^0z^d\sigma\dot q^d)(D-E)+2D\Lambda^{\mathrm{т}}\left({}^0z^d(E-\sigma)\dot q^d\right)\times$$
$$\times(D-E)+\Big(\Lambda^{\mathrm{т}}({}^0c_{f_D})\sigma\dot q^{d\,0}z^dD+\Lambda^{\mathrm{т}}({}^0c_{f_D})\times$$
$$\times\left((D-E)\sigma^0z^d\dot q\right)^d\Big)\Big]\,{}^0z^d\sigma\dot q;$$

$$C(q)=\sigma\left({}^0z^d\right)^{\mathrm{т}}\Big(\left(D^{\mathrm{т}}-E\right)\Lambda({}^0s^d)D^{\mathrm{т}}+$$
$$+D^{\mathrm{т}}\Lambda({}^0t^d)\Big)+(E-\sigma)\left({}^0z^d\right); \qquad (4)$$

$$H(q)=\sigma\left({}^0z^d\right)^{\mathrm{т}}D^{\mathrm{т}}, \qquad (5)$$

где $q=(q_1,q_2,..,q_N)^{\mathrm{т}}$ — обобщенные координаты исполнительного механизма, записанные в виде вектора-столбца;

$q^d=diag(q_1,q_2,..,q_N)$ — обобщенные координаты исполнительного механизма, записанные в виде элементов диагональной матрицы;

$\Lambda(\bar a)\bar b=\bar a\times\bar b=-\Lambda(\bar b)\bar a=\Lambda^{\mathrm{т}}(\bar b)\bar a$ — выражение для векторного произведения;

D — матрица достижимости звеньев исполнительного механизма;

${}^0z$ — блочный вектор-столбец, определяющий последовательность осей ${}^0\bar z_{ik}$, связанных систем координат звеньев исполнительного механизма;

σ — диагональная матрица, определяющая типы сочленений звеньев исполнительного механизма;

${}^0l_D$ — блочная матрица, объединяющая векторы $\bar l_{i,j}$, соединяющие начала систем координат $f(j),ns(j)$ с началами основных систем координат звеньев i, в соответствии с взаимной достижимостью звеньев, описываемой матрицей достижимости D, ($d_{i,j}$ — соответствующие элементы матрицы достижимости):

$${}^0l_D=\begin{pmatrix} d_{1,1}\cdot{}^0\bar l_1 & d_{1,2}\cdot{}^0\bar l_{1,2} & \cdot & d_{1,N}\cdot{}^0\bar l_{1,N}\\ d_{2,1}\cdot{}^0\bar l_{2,1} & d_{2,2}\cdot{}^0\bar l_2 & \cdot & d_{2,N}\cdot{}^0\bar l_{2,N}\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ d_{N,1}\cdot{}^0\bar l_{N,1} & d_{N,2}\cdot{}^0\bar l_{N,2} & \cdot & d_{N,N}\cdot{}^0\bar l_N\end{pmatrix}; \ (6)$$

${}^0s=(0\ \ {}^0\bar s_2^{\mathrm{т}},\dots,\ {}^0\bar s_N^{\mathrm{т}})^{\mathrm{т}}$ — блочный вектор, объединяющий векторы $\bar s_i$, соединяющие начала систем координат $f\left(f(i)\right),ns\left(f(i)\right)$ с началами систем координат $f(i),ns(i)$ (первый элемент блочного вектора s нулевой, поскольку для первого звена вектор $\bar s_i$ не существует);

${}^0c=({}^0\bar c_1^{\mathrm{т}}\ \ {}^0\bar c_2^{\mathrm{т}}\ ..\ {}^0\bar c_N^{\mathrm{т}})^{\mathrm{т}}$ — блочный вектор, определяющий положения центров масс звеньев относительно начал их основных систем координат;

${}^0c_{f_D}$ — матрица, объединяющая векторы $\bar c_{f_{i,j}}$, соединяющие начала систем координат звеньев $f(j),ns(j)$ с центрами масс звеньев i, в соответствии со взаимной достижимостью звеньев, описываемой матрицей достижимости D ($d_{i,j}$ — соответствующие элементы матрицы достижимости):

$${}^0c_{f_D}=\begin{pmatrix} d_{1,1}\cdot{}^0\bar c_{f_1} & d_{1,2}\cdot{}^0\bar c_{f_{1,2}} & \cdot & d_{1,N}\cdot{}^0\bar c_{f_{1,N}}\\ d_{2,1}\cdot{}^0\bar c_{f_{2,1}} & d_{2,2}\cdot{}^0\bar c_{f_2} & \cdot & d_{2,N}\cdot{}^0\bar c_{f_{2,N}}\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ d_{N,1}\cdot{}^0\bar c_{f_{N,1}} & d_{N,2}\cdot{}^0\bar c_{f_{N,2}} & \cdot & d_{N,N}\cdot{}^0\bar c_{f_N}\end{pmatrix}=;(7)$$
$$={}^0l_D+{}^0c^dD$$

${}^0\bar f_{\text{в}}=\left({}^0\bar f_{\text{в}}^{\mathrm{т}_1}\ \ {}^0\bar f_{\text{в}}^{\mathrm{т}_2}\ \ ,\dots,\ {}^0\bar f_{\text{в}}^{T_N}\right)^T$ — блочная матрица внешних сил, приложенных к звеньям исполнительного механизма со стороны окружающей среды;

${}^0t=({}^0\bar t_1^{\mathrm{т}}\ \ {}^0\bar t_2^{\mathrm{т}}\ ,\dots,\ {}^0\bar t_N^{\mathrm{т}})^{\mathrm{т}}$ — блочный вектор, объединяющий векторы $\bar t_i$, соединяющие начала систем координат звеньев $f(i),ns(i)$ с точками, через которые проходят равнодействующие внешних сил, приложенных к звеньям i;

$^0\bar{n}_f = \left({}^0\bar{n}_f^{\text{т}_1} \quad {}^0\bar{n}_f^{\text{т}_2} \quad ,..., \quad {}^0\bar{n}_f^{\text{т}_N} \right)^{\text{т}}$ — блочная матрица моментов, от приведения внешних сил, приложенных к звеньям со стороны окружающей среды, к началам систем координат их звеньев-отцов, определяется в соответствии с выражением: $^0\bar{n}_f = {}^0\bar{t}^{\,d\,0}\bar{f}_{\text{в}}$;

$^0\bar{n}_{\text{в}} = \left({}^0\bar{n}_{\text{в}}^{\text{т}_1} \quad {}^0\bar{n}_{\text{в}}^{\text{т}_2} \quad ,..., \quad {}^0\bar{n}_{\text{в}}^{\text{т}_N} \right)^{\text{т}}$ — блочная матрица внешних моментов, действующих на звенья исполнительного механизма со стороны окружающей среды;

$^0\bar{n}'_{\text{в}} = {}^0\bar{n}_{\text{в}} + {}^0\bar{n}_f$ — блочная матрица суммарных внешних моментов, действующих на звенья i относительно начал систем координат $f(i),ns(i)$ их звеньев отцов;

$m = (m_1, m_2, ..., m_N)^{\text{т}}$ — матрица масс звеньев;

$J_C = (J_{C_1}, J_{C_2}, ..., J_{C_N})^{\text{т}}$ — блочная матрица тензоров инерции звеньев.

В этом выражении третье слагаемое $C(q)^0 f_{\text{в}}$ определяется внешними силами, действующими на звенья исполнительного механизма и моментами, от приведения этих сил к началам соответствующих систем координат их звеньев отцов.

При наложенных на исполнительный механизм связях в уравнении (1) к внешним силам, моментам добавятся силы, моменты реакций этих связей. И уравнение (1) запишется в виде:

$$A(q)\ddot{q} + B(q,\dot{q}) - C(q)\,{}^0 f_{\text{в}} - C_R(q)\,{}^0 R_f - , \\ -H(q)({}^0 n_{\text{в}} + {}^0 R_n) = \tau, \tag{8}$$

где

$^0R_f = \left({}^0R_{f_1} \quad {}^0R_{f_2} \quad ,..., \quad {}^0R_{f_N} \right)^{\text{т}}$ — блочный вектор сил-реакций связей, приложенных к звеньям исполнительного механизма;

$^0R_n = \left({}^0R_{n_1} \quad {}^0R_{n_2}\& \quad ,..., \quad {}^0R_{n_N} \right)^{\text{т}}$— блочный вектор моментов-реакций связей, приложенных к звеньям исполнительного механизма;

N — число звеньев исполнительного механизма;

$C(q) = J_f^{\text{т}}$ — транспонированная матрица Якоби для линейных перемещений точек приложения равнодействующих внешних сил, действующих на звенья исполнительного механизма, определяется в соответствии с выражением

$$C(q) = \sigma\left({}^0 z^d \right)^{\text{т}} \left(\left(D^{\text{т}} - E\right)\Lambda({}^0 s^d)D^{\text{т}} + \right. \\ \left. + D^{\text{т}}\Lambda({}^0 t^d) \right) + (E - \sigma)\left({}^0 z^d \right)^{\text{т}} D^{\text{т}}. \tag{9}$$

Здесь $C_R(q) = J_V^{\text{т}_R}$ — транспонированная матрица Якоби для линейных перемещений точек приложения реакций связей, определяется в соответствии с выражением

$$C_R(q) = \sigma\left({}^0 z^d \right)^{\text{т}} \left(\left(D^{\text{т}} - E\right)\Lambda({}^0 s^d)D^{\text{т}} + \right. \\ \left. + D^{\text{т}}\Lambda({}^0 t_R^d) \right) + (E - \sigma)\left({}^0 z^d \right)^{\text{т}} D^{\text{т}}; \tag{10}$$

$\bar{t}_{R_i}$ — вектор, соединяющий начало системы координат звена $f(i),ns(i)$ с точкой, через которую проходит сила реакции связи, наложенной на звено i;

$^0t_R = ({}^0\bar{t}_{R_1}^{\text{т}} \quad {}^0\bar{t}_{R_2}^{\text{т}} \; ,..., \; {}^0\bar{t}_{R_N}^{\text{т}})^{\text{т}}$ — блочный вектор, объединяющий векторы $\bar{t}_{R_i}$ для всех звеньев исполнительного механизма;

$H(q) = J_\omega^{\text{т}}$ — транспонированная матрица Якоби для угловых перемещений звеньев, которая определяется в соответствии с выражением

$$H(q) = \sigma\left({}^0 z^d \right)^{\text{т}} D^{\text{т}}. \tag{11}$$

Введем следующие обозначения:

$^0F_{\text{в}} = ({}^0 f_{\text{в}}^{\text{т}} \quad {}^0 n_{\text{в}}^{\text{т}})^{\text{т}}$ — блочный вектор внешних сил, моментов, приложенных к звеньям исполнительного механизма;

$R = \left(R_f^{\text{т}} \quad R_n^{\text{т}} \right)^{\text{т}}$ — блочный вектор усилий реакций связей, наложенных на исполнительный механизм;

$L(q) = \left(C(q) \quad H(q) \right)$ — матрица Якоби размерностью $N(2N)$, объединяющая матричные коэффициенты внешних сил и внешних моментов, действующих на звенья исполнительного механизма;

$L_R(q) = \left(C_R(q) \quad H(q)\right)$ — матрица Якоби размерностью $N(2N)$, объединяющая матричные коэффициенты сил и моментов реакций связей, наложенных на звенья исполнительного механизма.

С учетом введенных коэффициентов, уравнение (8) запишется в следующем виде:

$$A(q)\ddot{q} + B(q,\dot{q}) - L(q)^0 F_{\text{в}} - L_R(q)^0 R = \tau. \quad (12)$$

В процессе движения исполнительного механизма могут изменяться как количество наложенных связей, так и вид уравнений описывающих эти связи. Связи можно разделить на кинематические и геометрические. Первые определяются тем, что задаются уравнения кривых, по которым двигаются характерные точки исполнительного механизма. Вторые определяются зависимостями внешних усилий, приложенных к роботу, как функций от координат характерных точек исполнительного механизма и их производных. В общем случае, эти функции могут быть существенно нелинейные.

Выводы

Предложен блочно-матричный способ записи математической модели динамики древовидного исполнительного механизма двуногого шагающего робота с учетом наложенных на него внешних связей.

Достоинство данного способа состоит в том, что он позволяет получить математическую модель для древовидного исполнительного механизма в форме, традиционной для моделей роботов с линейной (разомкнутой) кинематической цепью.

Литература

1. *Ковальчук А.К., Кулаков Д.Б., Семенов С.Е.* Блочно-матричные уравнения движения исполнительных механизмов роботов с древовидной кинематической структурой // Известия вузов. Машиностроение. М.: МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2008. № 12. С. 5—21.

2. *Ковальчук А.К., Кулаков Д.Б., Семенов С.Е.* Математическое описание кинематики и динамики исполнительных механизмов роботов с древовидной кинематической структурой // Известия вузов. Машиностроение. М.: МГТУ им. Н.Э.Баумана, 2008. № 11. С. 13—25.

Статья поступила в редакцию 02.06.2011 г.