

# Расчет и конструирование машин

УДК 539.3

DOI 10.18698/0536-1044-2016-8-3-10

## Определение параметров упругости полиуретана при больших деформациях по результатам испытаний образцов на кручение и растяжение

А.Е. Белкин<sup>1</sup>, И.З. Даштиев<sup>2</sup>, А.В. Костромицких<sup>1</sup><sup>1</sup> МГТУ им. Н.Э. Баумана, 105005, Москва, Российская Федерация, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1<sup>2</sup> ОАО «ЦНИИМС», 141371, Хотьково, Московская область, Российская Федерация, ул. Заводская, д. 1

## Determining Polyurethane Elastic Parameters at Large Strains Using Torsion and Tensile Test Results

A.E. Belkin<sup>1</sup>, I.Z. Dashtiev<sup>2</sup>, A.V. Kostromitskikh<sup>1</sup><sup>1</sup> BMSTU, 105005, Moscow, Russian Federation, 2<sup>nd</sup> Baumanskaya St., Bldg. 5, Block 1<sup>2</sup> Central Research Institute for Special Machinery ОАО TsNIISM, 141371, Khotkovo, Moscow region, Russian Federation, Zavodskaya St., Bldg. 1 e-mail: aefbelkin@gmail.com

**i** Проблема повышения достоверности расчетов деталей, выполненных из полиуретана, связана с разработкой надежных математических моделей упругого поведения материала. Для эластомеров в рамках феноменологического подхода предложены разнообразные модели упругости. Выбор закона и определения параметров упругости для конкретного материала на основе испытаний его образцов является актуальной задачей. В статье приведены результаты статических испытаний на кручение и растяжение образцов литьевого полиуретана СКУ-ПФЛ-100 твердостью 92...95 ед. по Шору по шкале А. Для идентификации упругого потенциала полиуретана проведен анализ осесимметричного напряженно-деформированного состояния цилиндрического образца по модели несжимаемого материала. При расчете резиновых деталей часто используют двухпараметрический потенциал Муни–Ривлина. С учетом сложившегося положительного опыта этот потенциал применен для описания упругости полиуретана. Значения параметров потенциала определены на основе результатов испытаний путем минимизации функции отклонений теоретических значений напряжений от экспериментальных. Показано, что выбранная модель описывает упругое поведение полиуретана с удовлетворительной точностью.

**Ключевые слова:** полиуретан, большие деформации, закон упругости, испытания образцов, кручение, растяжение, осесимметричная деформация, потенциал Муни–Ривлина.

**i** The problem of increasing the reliability of calculations of polyurethane elements of constructions is associated with the development of reliable mathematical models of elastic behavior of the material. Within the framework of the phenomenological approach, the authors propose various models of elasticity for elastomers. The choice of the law of

elasticity and the determination of elasticity parameters for a specific material based on sample testing is an important problem to consider. The results of static torsion and tensile tests performed on the cast polyurethane specimen SKU-PFL-100 with the hardness of 92...95 units according to the Shore A scale are presented in the article. To identify elastic potential of the polyurethane, the axially symmetric stress-strain state of a cylindrical sample is analyzed using a model of incompressible material. When performing calculations for rubber parts, the two-parameter Mooney–Rivlin constitutive model is often used. Taking into account the positive experience of using this model, it is applied to describe polyurethane elasticity. The parameter values of the strain energy potential are determined on the basis of the test results by minimizing the function of deviations of the stress theoretical values from the experimental ones. It has been shown that the selected model describes polyurethane elastic behavior with a satisfactory accuracy.

**Keywords:** polyurethane, large strains, law of elasticity, sample testing, torsion, tension, axially symmetric deformation, Mooney–Rivlin potential.

Для расчета полиуретановых деталей, в частности амортизаторов, работающих при больших деформациях, необходимы надежные математические модели упругого и вязкоупругого поведения полиуретана, апробированные для широкого диапазона деформаций при различных типах напряженного состояния. В настоящее время в расчетах эластомеров часто применяют «двухзвенную» модель Бергстрема–Бойс [1–4], которая характеризуется широким набором числовых параметров, определяемых на основе экспериментальных данных. В работе [5] параметры этой модели для полиуретана определены по результатам испытаний образцов на сжатие с умеренно высокими скоростями деформирования.

Цель работы — уточнение параметров упругости полиуретана SKU-PFL-100 при медленном статическом нагружении по результатам испытаний на кручение и растяжение.

При описании только упругих свойств полиуретана будем игнорировать наблюдаемые в экспериментах эффекты вязкости. Обработку экспериментальных данных будем проводить, рассматривая полиуретан как несжимаемый материал.

**Краткие теоретические сведения.** Изложению результатов испытаний предположим краткие сведения по применению теории больших упругих деформаций [6, 7] для анализа растяжения и кручения образцов.

При изучении осесимметричной деформации цилиндрического образца используем цилиндрические координаты  $r, \varphi, z$  с ортами координатных линий  $\mathbf{i}_r, \mathbf{i}_\varphi, \mathbf{i}_z$ . Координаты произвольной точки в деформированном состоянии представим в виде

$$z^+ = \lambda_z z; \quad r^+ = \lambda_\varphi r; \quad \varphi^+ = \varphi + \psi(z), \quad (1)$$

где  $\lambda_z, \lambda_\varphi$  — кратности удлинений в осевом и окружном направлениях,  $\psi(z)$  — угол поворота поперечного сечения образца.

Считая осевое растяжение однородным, будем полагать  $\lambda_z = \text{const}$ . Что касается окружного удлинения, то на начальном этапе допустимо считать  $\lambda_\varphi(r)$ , хотя из последующих рассуждений становится ясно, что и это удлинение — величина постоянная.

Положение точки деформированного образца определяется в соответствии с преобразованием координат (1) радиусом-вектором

$$\mathbf{R} = \lambda_\varphi r \cos \psi \mathbf{i}_r + \lambda_\varphi r \sin \psi \mathbf{i}_\varphi + \lambda_z z \mathbf{i}_z.$$

Для выражения деформации материала через геометрические параметры  $\lambda_z, \lambda_\varphi, \psi$  найдем тензор градиента места

$$\mathbf{F}^T = \nabla \mathbf{R},$$

где

$$\nabla = \mathbf{i}_r \frac{\partial}{\partial r} + \mathbf{i}_\varphi \frac{\partial}{r \partial \varphi} + \mathbf{i}_z \frac{\partial}{\partial z}.$$

Компоненты тензора градиента места образуют матрицу

$$\mathbf{F}^T = \begin{bmatrix} \frac{d(\lambda_\varphi r)}{dr} \cos \psi & \frac{d(\lambda_\varphi r)}{dr} \sin \psi & 0 \\ -\lambda_\varphi \sin \psi & \lambda_\varphi \cos \psi & 0 \\ -\lambda_\varphi r \theta \sin \psi & \lambda_\varphi r \theta \cos \psi & \lambda_z \end{bmatrix},$$

где  $\theta = d\psi/dz$  — относительный угол закручивания образца.

Тензор меры деформации Коши–Грина определяется как  $\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \mathbf{F}$ . Его компоненты имеют значения

$$C_{rr} = \left[ \frac{d(\lambda_\varphi r)}{dr} \right]^2; \quad C_{\varphi\varphi} = \lambda_\varphi^2; \quad (2)$$

$$C_{zz} = (\lambda_\varphi r\theta)^2 + \lambda_z^2; \quad C_{\varphi z} = C_{z\varphi} = \lambda_\varphi^2 r\theta;$$

$$C_{r\varphi} = C_{\varphi r} = 0; \quad C_{rz} = C_{zr} = 0.$$

При преобразовании координат (1) мера объемной деформации материала  $J = \det \mathbf{F}$  имеет вид

$$J = \lambda_z \lambda_\varphi \frac{d(\lambda_\varphi r)}{dr}.$$

Из условия несжимаемости материала  $J = 1$  следует

$$\lambda_\varphi = \lambda_z^{-1/2} = \text{const}.$$

Таким образом, при растяжении и кручении цилиндрического образца из несжимаемого материала компоненты тензора меры деформации (2) получают значения

$$C_{rr} = C_{\varphi\varphi} = \lambda_z^{-1}; \quad C_{zz} = \lambda_z^{-1}(r\theta)^2 + \lambda_z^2;$$

$$C_{\varphi z} = C_{z\varphi} = \lambda_z^{-1} r\theta.$$

Тензор  $\mathbf{C}$  имеет инварианты

$$I_{1C} = 2\lambda_z^{-1} + \lambda_z^{-1}(r\theta)^2 + \lambda_z^2;$$

$$I_{2C} = 2\lambda_z + \lambda_z^{-2}(r\theta)^2 + \lambda_z^{-2}.$$

Напряжения в упругом изотропном несжимаемом материале определяют через функцию удельной энергии деформации  $W(I_{1C}, I_{2C})$  соотношением [7]

$$\mathbf{S} = 2\alpha_1 \mathbf{I} + 2\alpha_2 [I_{1C} \mathbf{I} - \mathbf{C}] + p \mathbf{C}^{-1}, \quad (3)$$

где  $\mathbf{S}$  — второй тензор напряжений Пиолы–Кирхгофа;  $\alpha_1 = \partial W / \partial I_{1C}$ ;  $\alpha_2 = \partial W / \partial I_{2C}$ ;  $p$  — гидростатическое давление;  $\mathbf{I}$  — единичный тензор.

Заметим, что при упругих потенциалах общего вида коэффициенты  $\alpha_1, \alpha_2$  в соотношениях упругости (3) являются функциями инвариантов  $I_{1C}, I_{2C}$ . Однако в частных случаях потенциалов Трелоара и Муни–Ривлина эти коэффициенты — постоянные величины.

Подставляя компоненты тензоров  $\mathbf{C}, \mathbf{C}^{-1}$  и инвариант  $I_{1C}$  в соотношение упругости (3), получаем следующие выражения для напряжений Пиолы–Кирхгофа:

$$S_{rr} = 2\alpha_1 + 2\alpha_2 [\lambda_z^{-1} + \lambda_z^{-1}(r\theta)^2 + \lambda_z^2] + p\lambda_z;$$

$$S_{\varphi\varphi} = 2\alpha_1 + 2\alpha_2 [\lambda_z^{-1} + \lambda_z^{-1}(r\theta)^2 + \lambda_z^2] + p[\lambda_z + \lambda_z^{-2}(r\theta)^2];$$

$$S_{zz} = 2\alpha_1 + 4\alpha_2 \lambda_z^{-1} + p\lambda_z^{-2}; \quad (4)$$

$$S_{\varphi z} = S_{z\varphi} = -2\alpha_2 \lambda_z^{-1} r\theta - p\lambda_z^{-2} r\theta;$$

$$S_{r\varphi} = S_{\varphi r} = 0;$$

$$S_{rz} = S_{zr} = 0.$$

Напряжения (4) определены в векторном базисе деформированного объема:

$$\mathbf{E}_r = \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial r} = \lambda_z^{-1/2} (\cos \psi \mathbf{i}_r + \sin \psi \mathbf{i}_\varphi);$$

$$\mathbf{E}_\varphi = \frac{\partial \mathbf{R}}{r \partial \varphi} = \lambda_z^{-1/2} (-\sin \psi \mathbf{i}_r + \cos \psi \mathbf{i}_\varphi);$$

$$\mathbf{E}_z = \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial z} = \lambda_z^{-1/2} r\theta (-\sin \psi \mathbf{i}_r + \cos \psi \mathbf{i}_\varphi) + \lambda_z \mathbf{i}_z.$$

На рис. 1 показан малый элемент образца в исходном и деформированном состояниях с указанием действующих по его граням напряжений.

Для перехода к истинным напряжениям  $\boldsymbol{\sigma}$  введем единичные векторы радиального  $\mathbf{e}_r$  и окружного  $\mathbf{e}_\varphi$  направлений для деформированного объема:

$$\mathbf{e}_r = \cos \psi \mathbf{i}_r + \sin \psi \mathbf{i}_\varphi; \quad \mathbf{e}_\varphi = -\sin \psi \mathbf{i}_r + \cos \psi \mathbf{i}_\varphi.$$

Связь базиса  $\mathbf{E}_r, \mathbf{E}_\varphi, \mathbf{E}_z$  с ортонормированным базисом  $\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\varphi, \mathbf{i}_z$  определяется соотношениями

$$\mathbf{E}_r = \lambda_z^{-1/2} \mathbf{e}_r; \quad \mathbf{E}_\varphi = \lambda_z^{-1/2} \mathbf{e}_\varphi;$$

$$\mathbf{E}_z = \lambda_z^{-1/2} r\theta \mathbf{e}_\varphi + \lambda_z \mathbf{i}_z.$$

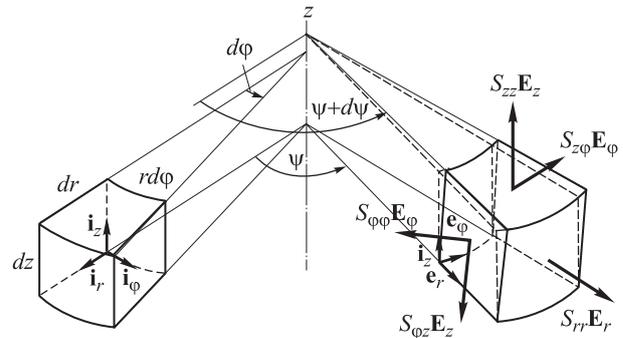


Рис. 1. Малый элемент образца в исходном и деформированном состояниях

Переходя к базису  $\mathbf{e}_r$ ,  $\mathbf{e}_\varphi$ ,  $\mathbf{i}_z$ , получаем напряжения

$$\begin{aligned}\sigma_{rr} &= \lambda_z^{-1} S_{rr} = 2\alpha_1 \lambda_z^{-1} + \\ &+ 2\alpha_2 \left[ \lambda_z^{-2} + \lambda_z^{-2} (r\theta)^2 + \lambda_z \right] + p; \\ \sigma_{\varphi\varphi} &= \lambda_z^{-1} S_{\varphi\varphi} + 2\lambda_z^{-1} (r\theta) S_{\varphi z} + \lambda_z^{-1} (r\theta)^2 S_{zz} = \\ &= 2\alpha_1 \left[ \lambda_z^{-1} + \lambda_z^{-1} (r\theta)^2 \right] + \\ &+ 2\alpha_2 \left[ \lambda_z^{-2} + \lambda_z^{-2} (r\theta)^2 + \lambda_z \right] + p; \\ \sigma_{zz} &= \lambda_z^2 S_{zz} = 2\alpha_1 \lambda_z^2 + 4\alpha_2 \lambda_z + p; \\ \sigma_{z\varphi} &= \lambda_z^{\frac{1}{2}} S_{z\varphi} + \lambda_z^{\frac{1}{2}} r\theta S_{zz} = 2\lambda_z^{\frac{1}{2}} r\theta (\alpha_1 + \alpha_2 \lambda_z^{-1}).\end{aligned}\quad (5)$$

Гидростатическое давление определяется из уравнения равновесия в радиальном направлении

$$\frac{d(r^+ \sigma_{rr})}{dr^+} = \sigma_{\varphi\varphi},$$

которое с учетом соотношений упругости (5) и свойства однородности окружной деформации ( $\lambda_\varphi = \text{const}$ ) преобразуется к виду

$$\frac{d\sigma_{rr}}{dr} = 2\alpha_1 \lambda_z^{-1} r\theta^2. \quad (6)$$

Интегрируя уравнение (6) и выполняя условие  $\sigma_{rr} = 0$  на ненагруженной цилиндрической поверхности образца, находим радиальное напряжение

$$\sigma_{rr} = -2\lambda_z^{-1} \theta^2 \int_r^R \alpha_1 r dr$$

и гидростатическое давление

$$p = \sigma_{rr} - 2\alpha_1 \lambda_z^{-1} - 2\alpha_2 \left[ \lambda_z^{-2} + \lambda_z^{-2} (r\theta)^2 + \lambda_z \right].$$

Тогда окружные и осевые нормальные напряжения (5) принимают вид

$$\begin{aligned}\sigma_{\varphi\varphi} &= 2\lambda_z^{-1} \theta^2 \left( \alpha_1 r^2 - \int_r^R \alpha_1 r dr \right); \\ \sigma_{zz} &= 2\alpha_1 (\lambda_z^2 - \lambda_z^{-1}) + 2\alpha_2 (\lambda_z - \lambda_z^{-2}) - \\ &- 2\lambda_z^{-1} \theta^2 \left( \int_r^R \alpha_1 r dr + \alpha_2 \lambda_z^{-1} r^2 \right).\end{aligned}$$

Напряжения на поперечном сечении образца приводятся к нормальной силе

$$N = 2\pi \int_0^R \sigma_{zz} \lambda_\varphi^2 r dr =$$

$$= 4\pi \left[ (\lambda_z - \lambda_z^{-2}) I_1 + (1 - \lambda_z^{-3}) I_2 - \lambda_z^{-2} \theta^2 I_3 \right] \quad (7)$$

и крутящему моменту

$$M = 2\pi \int_0^R \lambda_\varphi r \sigma_{z\varphi} \lambda_\varphi^2 r dr = 4\pi (\lambda_z^{-1} I_4 + \lambda_z^{-2} I_5) \theta, \quad (8)$$

где

$$\begin{aligned}I_1 &= \int_0^R \alpha_1 r dr; \quad I_2 = \int_0^R \alpha_2 r dr; \\ I_3 &= \int_0^R \left( \int_r^R \alpha_1 r dr + \alpha_2 \lambda_z^{-1} r^2 \right) r dr; \quad I_4 = \int_0^R \alpha_1 r^3 dr; \\ I_5 &= \int_0^R \alpha_2 r^3 dr.\end{aligned}$$

Испытания образцов на кручение проводят при отсутствии либо осевых деформаций (т. е. при  $\lambda_z = 1$ ), либо нормальной силы (7). В первом случае крутящий момент и нормальная сила выражаются формулами

$$M = 4\pi (I_4 + I_5) \theta; \quad (9)$$

$$N = -4\pi I_3 \theta^2.$$

Во втором случае решение несколько сложнее. Сначала из условия  $N = 0$  устанавливают зависимость кратности удлинения от относительного угла закручивания образца, т. е.  $\lambda_z(\theta)$ , а затем с помощью соотношения (8) — взаимосвязь этого угла и крутящего момента.

При одноосном растяжении нормальная сила и кратность удлинения в продольном направлении связаны зависимостью

$$N/A = 2\alpha_1 (\lambda_z - \lambda_z^{-2}) + 2\alpha_2 (1 - \lambda_z^{-3}), \quad (10)$$

где  $A$  — площадь поперечного сечения недеформированного образца.

### Результаты испытаний на кручение образцов полиуретана SKU-ПФЛ-100.

Испытания проводили на машине Instron 55MT5-SPL, используя цилиндрические образцы круглого сплошного сечения диаметром  $D = 25$  мм с длиной рабочей части  $L = 120$  мм. Каретку испытательной машины закрепляли с помощью скоб так, что при закручивании отсутствовало продольное удлинение образца, т. е. выполнялось условие  $\lambda_z = 1$ .

Для каждого образца проводили пять нагружений. Установление диаграммы кручения наблюдалось уже после второго цикла нагрузка-разгрузка. В качестве примера на рис. 2 показана

ны масштабированные диаграммы кручения одного из образцов в координатах  $\theta R$ ,  $MR/J_p$ , где  $J_p = \pi R^4/2$  — полярный момент инерции поперечного сечения образца. Как видно из рисунка, после первого нагружения происходит размягчение материала, однако при последующих нагружениях его жесткостные характеристики стабильны. Обработывались данные последнего нагружения.

Все испытания проводили с малой скоростью закручивания образцов 1 рад/мин, соответствующей скорости деформирования  $\dot{\theta}R \approx 0,0017 \text{ с}^{-1}$ .

В экспериментах с разными образцами зафиксирована весьма высокая повторяемость результатов. Разброс характеристик испытанных образцов незначителен, о чем можно судить по близости кривых 1 и 2, показанных на рис. 3.

Следует отметить, что в испытаниях на кручение изучаемые деформации материала ограничены, поскольку при некотором угле закручивания образец теряет устойчивость (рис. 4). Именно потеря устойчивости при малых деформациях является причиной, по которой приходится отказываться от испытания тонкостенных полиуретановых трубок.

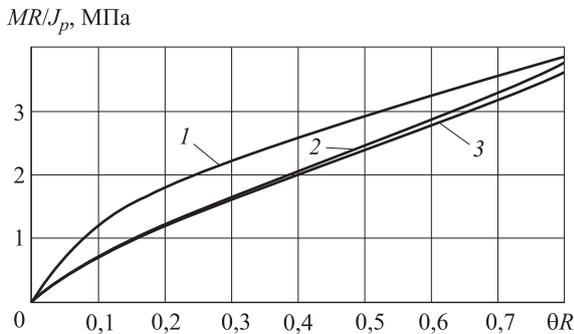


Рис. 2. Диаграммы кручения полиуретанового образца при первом (1), втором (2) и третьем (3) циклах нагружения

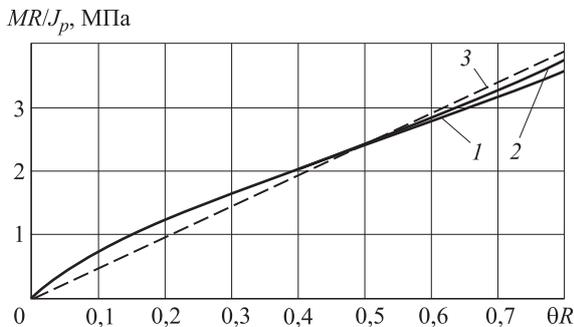


Рис. 3. Диаграммы кручения «тренированных» образцов, построенные по экспериментальным данным (1, 2) и модели Муни–Ривлина (3)



Рис. 4. Потеря устойчивости цилиндрического образца сплошного сечения при кручении

**Результаты испытаний на растяжение.** Испытания проводили на образцах — «лопатках» (рис. 5) на машине Instron Electropuls 1000.

На начальном этапе деформирования образцов для повышения точности измерения удлинений использовали экстензометр Instron с базой 12,5 мм (рис. 6), с помощью которого

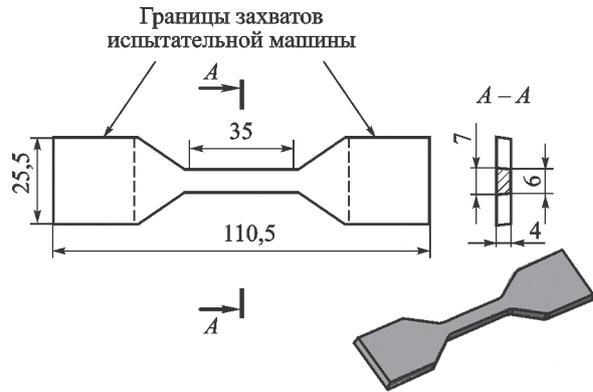


Рис. 5. Образец для испытаний на растяжение



Рис. 6. Образец в захватах испытательной машины Instron Electropuls 1000 с установленным экстензометром

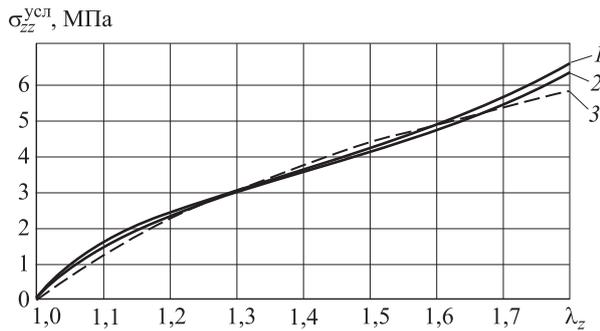


Рис. 7. Диаграммы растяжения полиуретана SKU-ПФЛ-100, построенные по экспериментальным данным (1, 2) и модели Муни-Ривлина (3)

определяли относительные удлинения до 40 %. Заметим, что большие удлинения измерить с применением экстензометра невозможно из-за технических ограничений.

Большие удлинения образца определяли по положению захватов испытательной машины, поэтому измеряли удлинения как рабочей части образца, так и его переходных частей, прилежащих к захватам. Для исправления машинной диаграммы вводился коэффициент коррекции относительных удлинений, определенный как отношение деформации по экстензометру к деформации, полученной по положению захватов. Исправленные машинные диаграммы двух образцов приведены на рис. 7 (кривые 1, 2).

**Определение параметров упругости.** В рамках феноменологического подхода предложены разнообразные модели упругости эластомеров [8, 9]. Для резины часто используют двухпараметрический потенциал Муни-Ривлина

$$W(I_{1C}, I_{2C}) = D_{10}(I_{1C} - 3) + D_{01}(I_{2C} - 3), \quad (11)$$

где  $D_{10}, D_{01}$  — коэффициенты, подлежащие определению по результатам испытаний.

Рассмотрим использование этого потенциала применительно к полиуретану. Исходя из выражения (11), находим  $\alpha_1 = D_{10}, \alpha_2 = D_{01}$ . В соответствии с формулой (9) устанавливаем, что при кручении образца в условиях запрета продольных деформаций ( $\lambda_z = 1$ ) связь крутящего момента и относительного угла закручивания образца является линейной даже при больших деформациях:

$$M = 2(D_{10} + D_{01})J_p\theta. \quad (12)$$

Диаграммы кручения, полученные по экспериментальным данным (см. рис. 3), не соответствуют линейному закону, однако отклонения

от него незначительны, и он может рассматриваться как удовлетворительное приближение.

Из последней формулы (5) следует, что распределение касательных напряжений такое же, как и в задаче линейной теории упругости:

$$\sigma_{z\varphi} = 2(D_{10} + D_{01})r\theta. \quad (13)$$

Причем величина  $G = 2(D_{10} + D_{01})$  имеет смысл модуля сдвига материала.

Значения касательных напряжений (13) и крутящего момента (12) пропорциональны сумме параметров упругости ( $D_{10} + D_{01}$ ), поэтому по результатам испытаний на кручение или простой сдвиг невозможно определить каждый из параметров в отдельности. В связи с этим потребовались испытания второго вида, в качестве которого используем растяжение.

При одноосном растяжении образца из материала Муни-Ривлина условные напряжения (10) подчиняются закону

$$\sigma_{zz}^{усл} = 2(D_{10} + \lambda_z^{-1}D_{01})(\lambda_z - \lambda_z^{-2}). \quad (14)$$

Для поиска параметров упругости  $D_{10}$  и  $D_{01}$  использовали алгоритм минимизации функции отклонений теоретических значений напряжений от экспериментальных. Поиск осуществляли двумя способами. В первом варианте по результатам испытаний на кручение и растяжение составлялась совместная функция отклонений

$$F = \sum_{i=1}^I \left[ 1 - \sigma_{z\varphi}^{th}(D_{10}, D_{01}) / \sigma_{z\varphi}^{exp} \right]_i^2 + \sum_{j=1}^J \left[ 1 - \sigma_{zz}^{th}(D_{10}, D_{01}) / \sigma_{zz}^{exp} \right]_j^2, \quad (15)$$

где индексы «th» и «exp» соответствуют теоретическим и экспериментальным данным;  $\sigma_{z\varphi}^{th}$  — касательные напряжения (13) у лицевой поверхности образца ( $r = R$ ) при кручении;  $\sigma_{z\varphi}^{exp} = M^{exp}R/J_p$ ;  $\sigma_{zz}^{th}$  — условные напряжения растяжения (14);  $\sigma_{zz}^{exp} = N^{exp}/A$ ;  $i, j$  — номера точек сравнения.

Из условия  $F(D_{10}, D_{01}) \rightarrow \min$  определяли значения  $D_{10}, D_{01}$ .

Во втором варианте сначала обрабатывали результаты испытаний на кручение и из условия

$$F_1(G) = \sum_{i=1}^I \left[ 1 - \sigma_{z\varphi}^{th}(G) / \sigma_{z\varphi}^{exp} \right]_i^2 \rightarrow \min \quad (16)$$

определяли значение модуля сдвига  $G = 2(D_{10} + D_{01})$ .

Затем решали задачу минимизации отклонений при одноосном растяжении. Из соотношения упругости (14) исключали параметр  $D_{01} = G/2 - D_{10}$  и минимизировали функцию

$$F_2(D_{10}) = \sum_{j=1}^J \left[ 1 - \sigma_{zz}^{\text{th}}(D_{10}) / \sigma_{zz}^{\text{exp}} \right]_j^2. \quad (17)$$

Таким образом достигалось возможное наилучшее приближение теоретических диаграмм к экспериментальным.

При формировании функций цели (15)–(17) точки сравнения касательных напряжений распределялись равномерно по оси угловой деформации в интервале  $0 \leq \theta R \leq 0,8$ ; аналогично точки сравнения нормальных напряжений следовали с равным шагом по переменной  $\lambda_z$  в интервале  $1 \leq \lambda_z \leq 1,8$ .

В таблице приведены значения параметров закона упругости Муни–Ривлина при различном числе точек сравнения.

Из данных таблицы следует, что реализованные способы поиска постоянных упругости приводят к практически одинаковым результатам, устойчивым по отношению к числу точек сравнения. На рис. 3 и 7 показаны теоретические диаграммы кручения и растяжения, построенные по модели Муни–Ривлина при найденных значениях постоянных. Их сравнение с экспериментальными диаграммами свидетельствует о том, что двухпараметрическая модель Муни–Ривлина (11) в целом позволяет описать упругое поведение полиуретана СКУ-ПФЛ-100 при статическом нагружении в рассмотренном диапазоне деформаций с достаточной для практических целей точностью. Точ-

Значения параметров закона упругости Муни–Ривлина

Число точек сравнения	$D_{10}$ , МПа	$D_{01}$ , МПа	$G$ , МПа
10	1,48/1,43	0,91/1,00	4,78/4,86
20	1,44/1,42	0,95/0,99	4,78/4,82
30	1,45/1,42	0,94/0,99	4,78/4,82
50	1,44/1,41	0,95/1,00	4,78/4,82
100	1,44/1,41	0,96/1,00	4,80/4,82

*Примечание.* Значения в числителе дроби получены при совместной, а в знаменателе — при отдельной последовательной обработке данных.

ность описания начального участка кривых деформирования, где, согласно испытаниям, наблюдается снижение жесткости полиуретана (рис. 3), можно повысить путем учета в потенциале дополнительных по отношению к модели (11) слагаемых.

## Выводы

1. Представлен подробный анализ больших упругих деформаций цилиндрических образцов при кручении и растяжении, предназначенный для идентификации модели упругости полиуретана.

2. Приведены результаты статических испытаний образцов из литьевого полиуретана СКУ-ПФЛ-100 на кручение и растяжение, по которым определены значения параметров закона упругости Муни–Ривлина, обеспечивающие наилучшее приближение к эксперименту в рамках рассматриваемой модели.

## Литература

- [1] Bergström J.S., Boyce M.C. Constitutive Modeling of the Large Strain Time-Dependent Behavior of Elastomers. *Journal of Mechanic Physics Solids*, 1998, vol. 46, pp. 931–954.
- [2] Bergström J.S., Boyce M.C. Mechanical behavior of particle filled elastomers. *Rubber Chemistry and Technology*, 1999, vol. 72, pp. 633–656.
- [3] Quintavalla S.J., Johnson S.H. Extension of the Bergström-Boyce model to high strain rates. *Rubber Chemistry and Technology*, 2004, vol. 77, pp. 972–981.
- [4] Qi H.J., Boyce M.C. Stress-Strain Behavior of Thermoplastic Polyurethane. *Mechanics of Materials*, 2005, vol. 37, is. 8, pp. 817–839.
- [5] Белкин А.Е., Даштиев И.З., Семенов В.К. Математическая модель вязкоупругого поведения полиуретана при сжатии с умеренно высокими скоростями деформирования. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Машиностроение*, 2014, № 6, с. 44–58.
- [6] Лурье А.И. *Нелинейная теория упругости*. Москва, Наука, 1980. 512 с.
- [7] Голованов А.И., Султанов Л.У. *Математические модели вычислительной нелинейной механики деформируемых тел*. Казань, Изд-во Казанского государственного ун-та, 2009. 465 с.

- [8] Киричевский В.В., Сахаров А.С. *Нелинейные задачи термомеханики конструкций из слабосжимаемых эластомеров*. Киев, Будівельник, 1992. 216 с.
- [9] Черных К.Ф. *Нелинейная теория упругости в машиностроительных расчетах*. Ленинград, Машиностроение, 1986. 336 с.

## References

- [1] Bergström J.S., Boyce M.C. Constitutive Modeling of the Large Strain Time-Dependent Behavior of Elastomers. *Journal of Mechanic Physics Solids*, 1998, vol. 46, pp. 931–954.
- [2] Bergström J.S., Boyce M.C. Mechanical behavior of particle filled elastomers. *Rubber Chemistry and Technology*, 1999, vol. 72, pp. 633–656.
- [3] Quintavalla S.J., Johnson S.H. Extension of the Bergström-Boyce model to high strain rates. *Rubber Chemistry and Technology*, 2004, vol. 77, pp. 972–981.
- [4] Qi H.J., Boyce M.C. Stress-Strain Behavior of Thermoplastic Polyurethane. *Mechanics of Materials*, 2005, vol. 37, is. 8, pp. 817–839.
- [5] Belkin A.E., Dashtiev I.Z., Semenov V.K. Matematicheskaya model' viazkouprugogo povedeniia poliuretana pri szhatii s umerenno vysokimi skorostiami deformirovaniia [Mathematical Model of Viscoelastic Behavior of Polyurethane under Compression with Moderately High Strain Rates]. *Vestnik MGTU im. N.E.Baumana. Ser. Mashinostroenie* [Herald of the Bauman Moscow State Technical University. Ser. Mechanical Engineering]. 2014, no. 6, pp. 44–58.
- [6] Lur'e A.I. *Nelineinaya teoriya uprugosti* [Nonlinear Theory of Elasticity]. Moscow, Nauka publ., 1980. 512 p.
- [7] Golovanov A.I., Sultanov L.U. *Matematicheskie modeli vychislitel'noi nelineinoi mekhaniki deformiruemykh tel* [Mathematical models of the nonlinear computational mechanics of deformable bodies]. Kazan', KSU publ., 2009. 465 p.
- [8] Kirichevskii V.V., Sakharov A.S. *Nelineinye zadachi termomekhaniki konstruksii iz slaboszhimaemykh elastomerov* [Nonlinear problems for strongly thermomechanics designs of elastomers]. Kiev, Budivel'nik publ., 1992. 216 p.
- [9] Chernykh K.F. *Nelineinaya teoriya uprugosti v mashinostroitel'nykh raschetakh* [Nonlinear theory of elasticity in engineering calculations]. Leningrad, Mashinostroenie publ., 1986. 336 p.

Статья поступила в редакцию 08.04.2016

## Информация об авторах

**БЕЛКИН Александр Ефимович** (Москва) — доктор технических наук, профессор кафедры «Прикладная механика». МГТУ им. Н.Э. Баумана (105005, Москва, Российская Федерация, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1, e-mail: aefbelkin@gmail.com).

**ДАШТИЕВ Идрис Зилфикарович** (Хотьково) — доктор технических наук, зам. главного конструктора. ОАО «ЦНИИСМ» (141371, Хотьково, Московская область, Российская Федерация, ул. Заводская, д. 1).

**КОСТРОМИЦКИХ Алексей Викторович** (Москва) — инженер НИИАПП. МГТУ им. Н.Э. Баумана (105005, Москва, Российская Федерация, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1).

## Information about the authors

**BELKIN Aleksandr Efimovich** (Moscow) — Doctor of Science, Professor, Department of Applied Mechanics. Bauman Moscow State Technical University (105005, Moscow, Russian Federation, 2<sup>nd</sup> Baumanskaya St., Bldg. 5, Block 1, e-mail: aefbelkin@gmail.com).

**DASHTIEV Idris Zilfikarovich** (Khotkovo) — Doctor of Science, Deputy Chief Designer. Central Research Institute for Special Machinery ОАО TsNIISM (141371, Khotkovo, Moscow region, Russian Federation, Zavodskaya St., Bldg. 1).

**KOSTROMITSKIKH Aleksey Viktorovich** (Moscow) — Engineer, Scientific and Research Institute for Automation of Manufacturing Processes NIIAPP. Bauman Moscow State Technical University (105005, Moscow, Russian Federation, 2<sup>nd</sup> Baumanskaya St., Bldg. 5, Block 1).