

# Расчет и конструирование машин

УДК 536.2; 539.3

DOI 10.18698/0536-1044-2016-4-5-15

## Термонапряженное состояние оболочки цилиндрического криогенного бака при его заполнении<sup>\*</sup>

А.А. Александров, В.С. Зарубин, В.Н. Зимин

МГТУ им. Н.Э. Баумана, 105005, Москва, Российская Федерация, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1

## Thermo-Stressed State of the Shell of a Cylindrical Cryogenic Tank when it is Being Filled

A.A. Aleksandrov, V.S. Zarubin, V.N. Zimin

Bauman Moscow State Technical University, 105005, Moscow, Russian Federation, 2<sup>nd</sup> Baumanskaya St., Bldg. 5, Block 1

e-mail: rector@bmstu.ru, zarubin@bmstu.ru, zimin@bmstu.ru



Рассмотрен процесс заполнения емкости криогенной жидкостью. Построена комплексная математическая модель, описывающая термонапряженное состояние круговой цилиндрической оболочки емкости при неравномерном распределении температуры вдоль ее образующей, вызванном движением уровня жидкости. В общем случае оболочка нагружена внутренним давлением в полости емкости и гидростатическим давлением жидкости, а также осевой сжимающей силой. Количественный анализ модели для случая перемещения уровня жидкости с постоянной скоростью позволил оценить время установления квазистационарного распределения температуры вдоль образующей оболочки емкости и влияние определяющих параметров на неравномерность распределения температуры и радиального перемещения оболочки, распределение изгибающего момента в ее поперечном сечении и наибольшее по абсолютному значению осевое сжимающее напряжение. Представленные расчетные зависимости могут быть полезны при расчете и проектировании оболочек криогенных емкостей.

**Ключевые слова:** криогенная емкость, математическая модель, квазистационарное распределение температуры, напряженное состояние оболочки.



The process of filling a tank with cryogenic liquid is considered in this paper. A complex mathematical model is built that describes the thermo-stressed state of the circular cylindrical shell of the tank when the temperature along the generatrix is distributed non-uniformly, which is caused by the fluctuation of the liquid level. In the general case, the shell is loaded by the internal pressure in the tank chamber, hydrostatic pressure of the liquid and axial compressive force. The quantitative analysis of the model simulating the displacement of the liquid level at a constant speed allowed the estimation of the time required to establish quasi-stationary temperature distribution along the shell generatrix, and the effect of the governing parameters on the non-uniform temperature distribution and radial displacement of the shell. It also allowed the evaluation of the distribution of the bending

<sup>\*</sup> Работа выполнена по гранту НШ-1432.2014.8 программы Президента РФ государственной поддержки ведущих научных школ и в рамках проекта 1712 государственного задания № 2014/104 Минобрнауки РФ.

moment at the shell cross section and the maximum absolute value of the axial compressive stress. The calculations presented in this paper can be useful in calculating and designing shells of cryogenic tanks.

**Keywords:** cryogenic tank, mathematical model, quasi-stationary distribution of temperature, stress state of the shell.

Криогенные компоненты топлива широко применяют в качестве окислителя и горючего для жидкостных ракетных двигателей [1, 2]. Сжиженный природный газ, основой которого является метан, является перспективным моторным топливом для двигателей внутреннего сгорания [3]. В связи с этим одной из технических проблем, возникающих при использовании криогенных жидкостей, является создание емкостей для их хранения, транспортирования и применения в двигательных установках. При проектировании и эксплуатации таких емкостей необходимо располагать достоверной информацией об их термонапряженном состоянии, определяющем работоспособность и надежность таких установок.

В процессе заполнения вертикально расположенной цилиндрической криогенной емкости вдоль образующей ее оболочки возникает существенно неравномерное распределение температуры, вызванное резким изменением условий теплообмена в зоне движущегося уровня криогенной жидкости. В связи с этим одним из расчетных случаев, требующих рассмотрения, является осевое нагружение оболочки, образующая которой искривлена в силу указанного неравномерного распределения температуры. В частности, количественный анализ такого расчетного случая необходим при заполнении криогенного бака ракеты-носителя в процессе ее подготовки к старту [4].

Необходимая при проектировании и отработке конструкции криогенных баков информация может быть получена как экспериментальным путем, так и методами математического моделирования [5, 6], применение которых требует разработки комплексной математической модели, описывающей термонапряженное состояние круговой цилиндрической оболочки при ее осевом нагружении, осложненном неравномерным распределением температуры вдоль ее образующей.

Цель работы — построение такой математической модели, которая объединила бы модификацию ранее разработанной модели по определению температурного состояния оболочки с учетом особенностей теплообмена в криоген-

ной емкости, вызванных кипением криогенной жидкости на внутренней поверхности этой емкости [7], и модель, позволяющую провести количественный анализ напряженно-деформированного состояния этой оболочки в зоне движущегося уровня криогенной жидкости.

**Температурное состояние оболочки.** Условия теплообмена цилиндрической оболочки вертикально расположенного криогенного бака претерпевают практически скачкообразное изменение при переходе через движущийся уровень криогенной жидкости. Это вызывает вдоль образующей оболочки неравномерное по координате  $z$  и переменное во времени  $t$  распределение температуры  $T(z, t)$ , описываемое дифференциальным уравнением с частными производными [7]

$$c\rho h \frac{\partial T(z, t)}{\partial t} = h \frac{\partial}{\partial z} \left( \lambda \frac{\partial T(z, t)}{\partial z} \right) + \alpha(z, t) [T^*(z, t) - T(z, t)] + \alpha_* [T_* - T(z, t)], \quad (1)$$

где  $c$ ,  $\rho$  и  $\lambda$  — соответственно удельная массовая теплоемкость, плотность и коэффициент теплопроводности материала оболочки;  $h$  — толщина оболочки,  $h = \text{const}$ ;  $\alpha$  — зависящий (в общем случае перемещения уровня жидкости) от координаты и времени коэффициент теплообмена на внутренней поверхности оболочки со средой, имеющей температуру  $T^*$ , также в общем случае являющейся функцией координаты и времени;  $\alpha_*$  — коэффициент теплообмена на внешней поверхности оболочки со средой, имеющей температуру  $T_*$ . Положительное направление координаты  $z$  выбрано вертикально вверх.

Для однозначного решения уравнения (1) в момент времени  $t = 0$ , принимаемый за начальный, необходимо задать начальное распределение температуры  $T(z, 0)$  и граничные условия на границах рассматриваемого участка оболочки. Если условия теплообмена на смоченной и несмоченной поверхностях оболочки определяют соответствующие постоянные значения  $\alpha_1$ ,  $T_1^*$  и  $\alpha_2$ ,  $T_2^*$ , то по мере удаления от уровня жидкости роль передачи теплоты вдоль

образующей оболочки путем теплопроводности становится несущественной (формально  $\partial T/\partial z \rightarrow 0$  при  $z \rightarrow -\infty$  и  $\partial T/\partial z \rightarrow 0$  при  $z \rightarrow \infty$ ), а температура оболочки стремится к значениям

$$T(z,t) \rightarrow \tilde{T}_1 = \frac{\alpha_1 T_1^* + \alpha_* T_*}{\alpha_1 + \alpha_*}, \quad z \rightarrow -\infty;$$

$$T(z,t) \rightarrow \tilde{T}_2 = \frac{\alpha_2 T_2^* + \alpha_* T_*}{\alpha_2 + \alpha_*}, \quad z \rightarrow \infty.$$

Тогда граничные условия можно задать в виде

$$T(z,t) = \tilde{T}_1, \quad z \rightarrow -\infty; \quad T(z,t) = \tilde{T}_2, \quad z \rightarrow \infty. \quad (2)$$

В частном случае неподвижного уровня жидкости, положение которого соответствует значению  $z = 0$ , и независящего от температуры коэффициента теплопроводности  $\lambda$  при постоянных во времени условиях теплообмена установившиеся распределения температуры  $T_1(z)$  и  $T_2(z)$  в смоченной и несмоченной частях оболочки будет описывать следующая из уравнения (1) система двух обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка:

$$\frac{d^2 T_1(z)}{dz^2} + (\bar{\alpha}_1/h)^2 [\tilde{T}_1 - T_1(z)] = 0, \quad z \in (-\infty, 0); \quad (3)$$

$$\frac{d^2 T_2(z)}{dz^2} + (\bar{\alpha}_2/h)^2 [\tilde{T}_2 - T_2(z)] = 0, \quad z \in (0, \infty), \quad (4)$$

где  $\bar{\alpha}_1^2 = (\alpha_1 + \alpha_*)h/\lambda$ ;  $\bar{\alpha}_2^2 = (\alpha_2 + \alpha_*)h/\lambda$ .

Решение системы уравнений (3) и (4) при граничных условиях (2) и условиях

$$T_1(0) = T_2(0) = T_0; \quad dT_1/dz|_{z=0} = dT_2/dz|_{z=0} \quad (5)$$

непрерывности температуры и теплового потока при  $z = 0$  имеет вид [4, 7]

$$\frac{T_1(z) - \tilde{T}_1}{\tilde{T}_2 - \tilde{T}_1} = \frac{\exp(\bar{\alpha}_1 z/h)}{1 + \bar{\alpha}_1/\bar{\alpha}_2}, \quad z < 0;$$

$$\frac{\tilde{T}_2 - T_2(z)}{\tilde{T}_2 - \tilde{T}_1} = \frac{\exp(-\bar{\alpha}_2 z/h)}{1 + \bar{\alpha}_2/\bar{\alpha}_1}, \quad z > 0. \quad (6)$$

Равенства (6) могут быть использованы при формулировке начального условия для уравнения (1), если началу перемещения уровня жидкости предшествует достаточно длительный период неподвижного положения этого уровня.

Из равенств (6) следует формула для температуры  $T_0$  при  $z = 0$  на границе между смоченной и несмоченной частями оболочки. В безразмерном виде эта температура имеет вид

$$\frac{T_0 - \tilde{T}_1}{\tilde{T}_2 - \tilde{T}_1} = \frac{\bar{\alpha}_2}{\bar{\alpha}_1 + \bar{\alpha}_2}. \quad (7)$$

Поскольку  $\exp(-4,6) \approx 0,01$ , неравномерность установившегося распределения температуры в оболочке достаточно учитывать лишь при  $-3/\bar{\alpha}_1 < z/h < 3/\bar{\alpha}_2$ . Коэффициенты теплообмена  $\alpha_2$  и  $\alpha_*$  обычно сопоставимы по значениям, а отношение  $\alpha_1/\alpha_2$  достаточно велико в силу высокой интенсивности теплообмена на смоченной поверхности оболочки [7]. Это приводит к тому, что значение температуры  $T_0$  при неподвижном уровне жидкости мало отличается от  $\tilde{T}_1$ . Тогда температуру всей смоченной части оболочки в первом приближении можно считать равной температуре жидкости, т. е.  $T_1(z) \approx \tilde{T}_1 \approx T_1^*$ , а распределение температуры в несмоченной части оболочки можно представить в виде

$$T_2(z) \approx \tilde{T}_2 - (\tilde{T}_2 - T_1^*) \exp(-\bar{\alpha}_2 z/h). \quad (8)$$

Такое допущение существенно упрощает количественный анализ установившегося распределения температуры в оболочке.

При перемещении уровня жидкости в оболочке возникает нестационарный процесс теплопроводности, описываемый уравнением (1). При постоянной скорости  $v$  движения этого уровня целесообразно в уравнении (1) перейти к координате  $\zeta = z - vt$ , начало отсчета которой связано с текущим положением уровня жидкости. Тогда вместо уравнения (1) получим систему двух уравнений с частными производными

$$\frac{1}{a} \frac{\partial T_1(\zeta,t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 T_1(\zeta,t)}{\partial \zeta^2} + \frac{v}{a} \frac{\partial T_1(\zeta,t)}{\partial \zeta} + \left(\frac{\bar{\alpha}_1}{h}\right)^2 [\tilde{T}_1 - T_1(\zeta,t)], \quad \zeta < 0; \quad (9)$$

$$\frac{1}{a} \frac{\partial T_2(\zeta,t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 T_2(\zeta,t)}{\partial \zeta^2} + \frac{v}{a} \frac{\partial T_2(\zeta,t)}{\partial \zeta} + \left(\frac{\bar{\alpha}_2}{h}\right)^2 [\tilde{T}_2 - T_2(\zeta,t)], \quad \zeta > 0. \quad (10)$$

Граничные и начальные условия для уравнений (9) и (10) будут такими же, как и для уравнения (1). С учетом замены координаты  $z$  координатой  $\zeta$  получим:

вместо условий (2)

$$T(\zeta,t) = \tilde{T}_1, \quad \zeta \rightarrow -\infty; \quad T(\zeta,t) = \tilde{T}_2, \quad \zeta \rightarrow \infty, \quad (11)$$

вместо условий (5)

$$T_1(0,t) = T_2(0,t); \quad dT_1/d\zeta|_{\zeta=0} = dT_2/d\zeta|_{\zeta=0}. \quad (12)$$

В случае граничных условий, не зависящих от  $t$  в подвижной системе координат,  $\partial T_1(\zeta,t)/\partial t \rightarrow 0$  и  $\partial T_2(\zeta,t)/\partial t \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow \infty$ . Это означает, что со временем после начала движения уровня жидкости нестационарные распределения  $T_1(\zeta,t)$  и  $T_2(\zeta,t)$  температуры в оболочке будут стремиться к некоторым установившимся, определяемым из решения системы двух обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{d^2 T_1(\zeta)}{d\zeta^2} + \frac{v}{a} \frac{dT_1(\zeta)}{d\zeta} + \left(\frac{\bar{\alpha}_1}{h}\right)^2 [\tilde{T}_1 - T_1(\zeta)], \quad \zeta < 0; \quad (13)$$

$$\frac{d^2 T_2(\zeta)}{d\zeta^2} + \frac{v}{a} \frac{dT_2(\zeta)}{d\zeta} + \left(\frac{\bar{\alpha}_2}{h}\right)^2 [\tilde{T}_2 - T_2(\zeta)], \quad \zeta > 0, \quad (14)$$

которые следуют из уравнений (9) и (10), если их правые части приравнять нулю.

Система уравнений (13), (14) описывает так называемое квазистационарное распределение температуры в оболочке емкости, не зависящее от времени в подвижной системе координат. Решение этой системы при граничных условиях (11) и (12) совпадает по структуре с соотношениями (6), но при замене координаты  $z$  координатой  $\zeta$ , а также параметров  $\bar{\alpha}_1$  и  $\bar{\alpha}_2$  соответственно на

$$\alpha_1^* = (vh/a) \left(-1/2 + \sqrt{1/4 + \bar{\alpha}_1^2}\right)$$

и

$$\alpha_2^* = (vh/a) \left(1/2 + \sqrt{1/4 + \bar{\alpha}_2^2}\right),$$

где  $\bar{\alpha}_1 = \bar{\alpha}_1 a/(vh)$ ;  $\bar{\alpha}_2 = \bar{\alpha}_2 a/(vh)$ .

При сравнительно большой скорости заполнения емкости, когда  $2a\bar{\alpha}_2/(vh) \ll 1$ , роль передачи теплоты вдоль образующей оболочки путем теплопроводности мала. Тогда для смоченной части оболочки [4, 7]

$$T_1(\zeta) \approx \tilde{T}_1 + (\tilde{T}_2 - \tilde{T}_1) \exp[\bar{\alpha}_1 \zeta / (c\rho h v)],$$

а для несмоченной —  $T_2(\zeta) \approx \tilde{T}_2$ .

Для оценки времени установления в подвижной системе координат квазистационарного распределения температуры используем численное решение системы уравнений (9), (10). О трудностях, возникающих при численном решении дифференциальных уравнений при неограниченной области изменения пространственной координаты, В.И. Феодосьев

предупреждал на основе личного опыта в работе [8]. В этой книге приведено высказывание, не утратившее актуальности и в настоящее время: «Мы видим, что машина (имеется в виду ЭЦВМ), освобождая нас от многих ... обязанностей, не освобождает во всяком случае от двух: от необходимости владеть математическим аппаратом и творчески мыслить». В данном случае возникающие трудности можно преодолеть, если предварительно перейти от неограниченного интервала  $(-\infty, \infty)$  изменения координаты  $\zeta$  к координатам  $\xi_1 = \exp(v\zeta/a)$  при  $\zeta \leq 0$  и  $\xi_2 = \exp(-v\zeta/a)$  при  $\zeta \geq 0$ , определенным на двух одинаковых полуотрезках  $(0, 1]$ . Тогда уравнения (9) и (10) примут вид

$$\frac{\partial \Theta_1(\xi_1, \tau)}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial \xi_1} \left( \xi_1^2 \frac{\partial \Theta_1(\xi_1, \tau)}{\partial \xi_1} \right) - \bar{\alpha}_1^2 \Theta_1(\xi_1, \tau); \quad (15)$$

$$\frac{\partial \Theta_2(\xi_2, \tau)}{\partial \tau} = \xi_2^2 \frac{\partial^2 \Theta_2(\xi_2, \tau)}{\partial \xi_2^2} + \bar{\alpha}_2^2 [1 - \Theta_2(\xi_2, \tau)], \quad (16)$$

где  $\tau = v^2 t/a$ ;  $\Theta_1 = (T_1 - \tilde{T}_1)/(\tilde{T}_2 - \tilde{T}_1)$ ;  $\Theta_2 = (T_2 - \tilde{T}_1)/(\tilde{T}_2 - \tilde{T}_1)$ .

Граничными условиями для системы уравнений (15), (16) будут равенства  $\Theta_1(0, \tau) = 0$ ,  $\Theta_2(0, \tau) = 1$ ,  $\Theta_1(1, \tau) = \Theta_2(1, \tau) = \Theta_0(\tau)$  и условие непрерывности теплового потока  $\partial \Theta_1(1, \tau)/\partial \xi_1 = -\partial \Theta_2(1, \tau)/\partial \xi_2$ . Квазистационарные распределения температуры на полуотрезке  $(0, 1]$ , полученные преобразованием квазистационарных решений системы уравнений (13), (14), имеют вид

$$\Theta_1^*(\xi_1) = \xi_1^{m_1} / (1 + m_1/m_2);$$

$$\Theta_2^*(\xi_2) = 1 - \xi_2^{m_2} / (1 + m_2/m_1),$$

где  $m_1 = -1/2 + \sqrt{1/4 + \bar{\alpha}_1^2}$ ;  $m_2 = -1/2 + \sqrt{1/4 + \bar{\alpha}_2^2}$ . При этом  $\Theta_0^* = \Theta_1^*(1) = \Theta_2^*(1) = 1/(1 + m_1/m_2)$ .

Например, для оболочки толщиной  $h = 10$  мм из алюминиевого сплава АМг6 ( $\lambda = 122$  Вт/(м·К) и  $a = 5 \cdot 10^{-5}$  м<sup>2</sup>/с [9]) при скорости движения уровня жидкости  $v = 5$  мм/с получим  $vh/a = 1$ . С учетом оценок интенсивности теплообмена на смоченной и несмоченной поверхностях оболочки [7] можно принять  $\bar{\alpha}_1 = 1$  и  $\bar{\alpha}_2 = 0,02$ . Тогда  $m_1 \approx 0,618$ ,  $m_2 \approx 1,0004$  и  $\Theta_0^* \approx 0,618$ , причем зависимость  $\Theta_2^*$  от  $\xi_2$  практически линейная (рис. 1, верхняя штриховая линия). Нижняя штриховая линия соответствует зависимости  $\Theta_1^*$  от  $\xi_1$ . Зависимости  $\Theta_1^*(\xi_1)$  и  $\Theta_2^*(\xi_2)$  для оболочки толщиной  $h = 6$  мм при прежних остальных исходных дан-

ных показаны на рис. 1 сплошными кривыми, а в случае  $h=6$  мм и  $v=10$  мм/с при прежних остальных исходных параметрах — штрихпунктирными линиями.

Если в качестве начальных условий выбрать распределения  $\Theta_1(\xi_1, 0) = 0$  и  $\Theta_2(\xi_2, 0) = 1$ , соответствующие начальному положению уровня криогенной жидкости в плоскости шпангоута, соединяющего цилиндрическую оболочку с нижним днищем криогенной емкости, то в процессе заполнения последней зависимость  $\Theta_0(\tau)$  может быть немонотонной. На рис. 2 такая зависимость, рассчитанная с использованием явной конечно-разностной схемы [10] для значений  $\tilde{\alpha}_1 = 1$  и  $\tilde{\alpha}_2 = 0,02$ , соответствующих оценкам работы [7], показана сплошной кривой. Штриховой линией на этом рисунке показана зависимость  $\Theta_0(\tau)$ , рассчитанная при прежних значениях  $\tilde{\alpha}_1$  и  $\tilde{\alpha}_2$  и начальных условиях  $\Theta_1(\xi_1, 0) = \xi_1^{\tilde{\alpha}_1} / (1 + \bar{\alpha}_1 / \bar{\alpha}_2)$  и  $\Theta_2(\xi_2, 0) = 1 - \xi_2^{\tilde{\alpha}_2} / (1 + \bar{\alpha}_2 / \bar{\alpha}_1)$  ( $\bar{\alpha}_1 = \tilde{\alpha}_1$  и  $\bar{\alpha}_2 = \tilde{\alpha}_2$ ), отве-

чающих установившемуся распределению температуры при достаточно длительном неподвижном положении уровня жидкости в емкости перед началом ее движения. При  $\tau \rightarrow \infty$  значение  $\Theta_0(\tau)$  в обоих случаях стремится к квазистационарному  $\Theta_0^* \approx 0,618$ , отмеченному на рис. 2 штрихпунктирной линией. С точностью  $|1 - \Theta(\tau) / \Theta_0^*| < 0,01$  процесс выхода на квазистационарный режим можно считать в первом случае завершенным при  $\tau \approx 5$ , а во втором случае — при  $\tau \approx 9$ . Например, при скорости движения уровня криогенной жидкости  $v = 5$  мм/с эти оценки для оболочки из алюминиевого сплава АМгб с коэффициентом температуропроводности  $a \approx 5 \cdot 10^{-5}$  м<sup>2</sup>/с соответствуют промежутку времени  $\sim 10$  с.

**Радиальное перемещение и напряженное состояние оболочки.** Круговая цилиндрическая оболочка толщиной  $h = \text{const}$  и радиусом  $R$  средней поверхности с неравномерным распределением температуры вдоль образующей нагружена равномерно распределенной по периметру поперечного сечения осевой сжимающей нагрузкой  $N$  и внутренним давлением  $p_0$ . При  $z < 0$  на смоченную жидкостью поверхность оболочки дополнительно действует гидростатическое давление  $p_1(z) = \rho g_0 z$  ( $\rho$  — плотность жидкости;  $g_0$  — ускорение, для неподвижного бака равное ускорению свободного падения 9,81 м/с<sup>2</sup>).

При осесимметричных нагружении и распределении температуры отнесенные к средней поверхности оболочки из линейно-упругого материала погонные усилия  $N_z$  в осевом и  $N_t$  окружном направлениях можно представить в виде [4]

$$\begin{aligned} N_z &= Eh \frac{\epsilon_z + v\epsilon_t - (1+v)\alpha_T(T - \tilde{T}_1)}{1 - v^2}; \\ N_t &= Eh \frac{\epsilon_t + v\epsilon_z - (1+v)\alpha_T(T - \tilde{T}_1)}{1 - v^2}, \end{aligned} \tag{17}$$

где  $E$ ,  $v$  и  $\alpha_T$  — продольный модуль упругости (модуль Юнга), коэффициент Пуассона и температурный коэффициент линейного расширения материала оболочки;  $\epsilon_z$  и  $\epsilon_t = w/R$  — деформации средней поверхности соответственно в осевом и окружном направлении ( $w$  — перемещение средней поверхности в радиальном направлении).

Погонный изгибающий момент в поперечном сечении оболочки

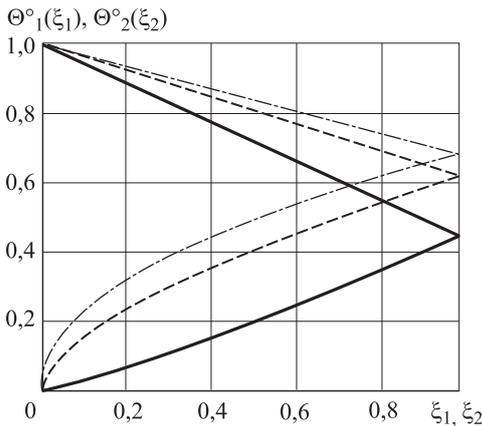


Рис. 1. Квазистационарные распределения безразмерной температуры в преобразованной системе координат

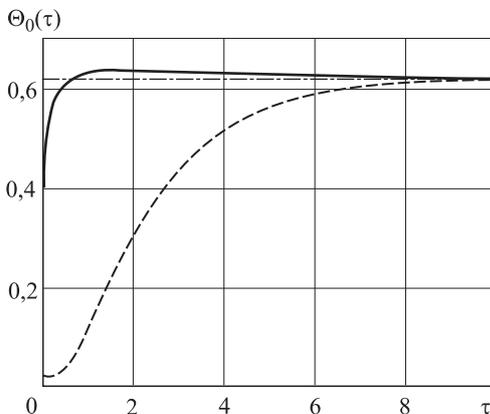


Рис. 2. Изменение во времени безразмерной температуры оболочки в поперечном сечении, совпадающем с движущимся уровнем жидкости

$$M = D \left( \frac{d^2 w}{dz^2} + \nu \frac{w}{R^2} \right), \quad (18)$$

где  $D = (Eh^3/12)/(1-\nu^2)$  — цилиндрическая погонная жесткость оболочки на изгиб.

Из первого равенства (17) и условия равновесия оболочки в осевом направлении  $N_z = -N$  находим

$$\varepsilon_z = (1+\nu)\alpha_T (T - \tilde{T}_1) - \nu w/R - N(1-\nu^2)/(Eh).$$

Подставив это равенство во вторую формулу (17), получим

$$N_t = Eh \left[ w/R - \alpha_T (T - \tilde{T}_1) \right] - \nu N. \quad (19)$$

Уравнение равновесия в радиальном направлении [4] имеет вид

$$\frac{d^2 M}{dz^2} + N \frac{d^2 w}{dz^2} + \frac{N_t}{R} = p(z),$$

где  $p(z) = p_0$  при  $z \geq 0$  и  $p(z) = p_0 - \rho g_0 z$  при  $z < 0$ .

Это уравнение с учетом обозначений

$$4\beta^2 = 2\sqrt{Eh/D/R + N/D + \nu/R^2},$$

$$4\gamma^2 = 2\sqrt{Eh/D/R - N/D - \nu/R^2}$$

и равенств (18) и (19) можно привести к обыкновенному линейному неоднородному дифференциальному уравнению четвертого порядка

$$\begin{aligned} \frac{d^4 w}{dz^4} + 2(\beta^2 - \gamma^2) \frac{d^2 w}{dz^2} + (\beta^2 + \gamma^2) w = \\ = \frac{p(z)}{D} + 12\nu N \frac{1-\nu^2}{Eh^3 R} + 12\alpha_T \frac{T - \tilde{T}_1}{h^2 R} \end{aligned} \quad (20)$$

относительно функции  $w(z)$  радиального перемещения, описывающему краевой эффект в цилиндрической оболочке в окрестности уровня жидкости.

Следует отметить, что подробный вывод уравнений и количественный анализ краевого эффекта в круговой цилиндрической оболочке, жестко заземленной в торцевом сечении, проиллюстрированный несколькими характерными примерами из инженерной практики, приведен в удостоенной в 1960 г. Ленинской премии классической работе [11], в т. 2, гл. III «Расчеты деталей конструкций, выполненных в виде симметричных оболочек», написанной В.И. Феодосьевым. Протяженность вдоль образующей оболочки зоны краевого эффекта без учета влияния неравномерного распределения температуры и при жестком заземлении сечения оболочки при  $z = 0$  можно оценить неравенством  $|z| < 2,7\sqrt{hR}$  [12].

За пределами зоны краевого эффекта функция  $w(z)$  практически совпадает с частным решением  $w^*(z)$  уравнения (20), т. е. общее решение соответствующего однородного уравнения должно убывать по абсолютному значению и стремиться к нулю. Из двух пар комплексносопряженных корней  $\gamma \pm \beta i$  и  $-\gamma \pm \beta i$  характеристического уравнения, соответствующего однородной части уравнения (20), указанному условию при  $z < 0$  удовлетворяет первая пара корней, т. е. общее решение однородного уравнения имеет вид

$$w_1^*(z) = (C_1' \cos \beta z + C_1'' \sin \beta z) \exp(\gamma z), \quad (21)$$

а при  $z > 0$  — вторая пара корней, т. е. общее решение этого уравнения имеет вид

$$w_2^*(z) = (C_2' \cos \beta z + C_2'' \sin \beta z) \exp(-\gamma z). \quad (22)$$

Обозначенные буквой «С» постоянные коэффициенты в соотношениях (21) и (22) должны быть определены с учетом частных решений из граничных условий при  $z = 0$ , которые устанавливают в этой точке непрерывность функции  $w(z)$  и первых трех ее производных.

Рассмотрим случай неподвижного уровня жидкости, когда температуру смоченной части оболочки можно считать равной  $T_1^*$ , а распределение температуры в несмоченной части определяет соотношение (8). Тогда частное решение уравнения (20) примет вид:

при  $z < 0$

$$w_1^*(z) = (p_0 - \rho g_0 z + \nu N/R) R^2 / (Eh);$$

при  $z > 0$

$$\begin{aligned} w_2^*(z) = \frac{p_0 R^2 + \nu NR}{Eh} + \alpha_T (\tilde{T}_2 - T_1^*) \times \\ \times \left[ \frac{R}{1-\nu^2} - \frac{\exp(-\bar{\alpha}_2 z/h)}{h^2 BR} \right], \end{aligned}$$

где  $B = (\bar{\alpha}_2/h)^4 + 2(\beta^2 - \gamma^2)(\bar{\alpha}_2/h)^2 + (\beta^2 + \gamma^2)^2$ .

Из граничных условий при  $z = 0$  с учетом формул (21) и (22) следует система из четырех линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} C_1' - C_2' = A_1; \\ \gamma C_1' + \beta C_1'' + \gamma C_2' - \beta C_2'' = B_1; \\ (\gamma^2 - \beta^2) C_1' + 2\beta\gamma C_1'' + (\beta^2 - \gamma^2) C_2' + 2\beta\gamma C_2'' = A_2; \\ (\gamma^3 - 3\beta\gamma^2) C_1' - (\beta^3 - 3\beta\gamma^2) C_1'' + (\gamma^3 - 3\beta\gamma^2) C_2' + \\ + (\beta^3 - 3\beta\gamma^2) C_2'' = B_2, \end{cases} \quad (23)$$

где

$$A_1 = w_T \left[ \frac{1}{1-\nu^2} - \frac{1}{h^2 R^2 B} \right];$$

$$B_1 = w_T \bar{\alpha}_2 / (h^3 R^2 B) + \rho g_0 R^2 / (Eh);$$

$$A_2 = -w_T \bar{\alpha}_2^2 / (h^4 R^2 B); \quad B_2 = -A_2 \bar{\alpha}_2^2 / h;$$

$$w_T = \alpha_T (\tilde{T}_2 - T_1^*) R.$$

Решив эту систему, получим

$$C_1' = \frac{A_1}{2} - \frac{B_1(\beta^2 - 3\gamma^2) + B_2}{4(\beta^2 + \gamma^2)\gamma};$$

$$C_1'' = \frac{A_1(\beta^2 - \gamma^2) + A_2}{4\beta\gamma} + \frac{B_1(3\beta^2 - \gamma^2) + B_2}{4\beta(\beta^2 + \gamma^2)}; \tag{24}$$

$$C_2' = -\frac{A_1}{2} - \frac{B_1(\beta^2 - 3\gamma^2) + B_2}{4(\beta^2 + \gamma^2)\gamma};$$

$$C_2'' = \frac{A_1(\beta^2 - \gamma^2) + A_2}{4\beta\gamma} - \frac{B_1(3\beta^2 - \gamma^2) + B_2}{4\beta(\beta^2 + \gamma^2)}.$$

При значении  $p_0$  порядка нескольких сотых долей МПа, что характерно для заполнения криогенной емкости с открытым дренажным клапаном, влиянием давления в емкости на радиальное перемещение и напряженное состояние оболочки можно пренебречь. Также пренебрежимо мало и влияние гидростатического давления. Тогда общее решение неоднородного уравнения (20) имеет вид

$$w_1(z) = w_1^o(z) + w_1^*(z) =$$

$$= (C_1' \cos \beta z + C_1'' \sin \beta z) \exp(\gamma z) + \frac{\nu NR}{Eh}, \quad z < 0;$$

$$w_2(z) = w_2^o(z) + w_2^*(z) =$$

$$= (C_2' \cos \beta z + C_2'' \sin \beta z) \exp(-\gamma z) + \frac{\nu NR}{Eh} +$$

$$+ w_T \left( \frac{1}{1-\nu^2} - \frac{\exp(-\bar{\alpha}_2 z/h)}{h^2 R^2 B} \right), \quad z > 0.$$

При  $z = 0$  находим

$$w_0 = w_1(0) = w_2(0) = w_T \left[ \frac{1}{1-\nu^2} - \frac{1}{h^2 R^2 B} - \bar{\alpha}_2 \frac{(\beta^2 - 3\gamma^2)h^2 - \bar{\alpha}_2^2}{4(\beta^2 + \gamma^2)\gamma h^5 R^2 B} \right] + \frac{\nu NR}{Eh}.$$

Оценим значения  $\beta$ ,  $\gamma$  и  $B$  для оболочки из алюминиевого сплава АМг6 ( $E = 71$  ГПа,  $\nu = 0,31$  [9]) при  $h = 10$  мм,  $R = 1$  м,  $N = 2 \cdot 10^5$  Н/м, приняв  $\bar{\alpha}_2 = 0,02$  [7]. Тогда получим  $\beta \approx 13,13$  1/м,  $\gamma \approx 12,53$  1/м и  $B \approx 1,086 \cdot 10^5$  1/м<sup>4</sup>. При  $\alpha_T = 24,7 \cdot 10^{-6}$  1/К [9] и  $\tilde{T}_2 - T_1^* = 182$  К находим  $w_T \approx 4,5$  мм и  $w_0 \approx 2,38$  мм. При  $|z| > 4,6/\gamma \approx 0,383$  м влияние общего решения однородной части уравнения (20) на радиальное перемещение оболочки не превышает одного процента. Для смоченной части оболочки  $w_1(z) \rightarrow \nu NR / (Eh) \approx 0,09$  мм

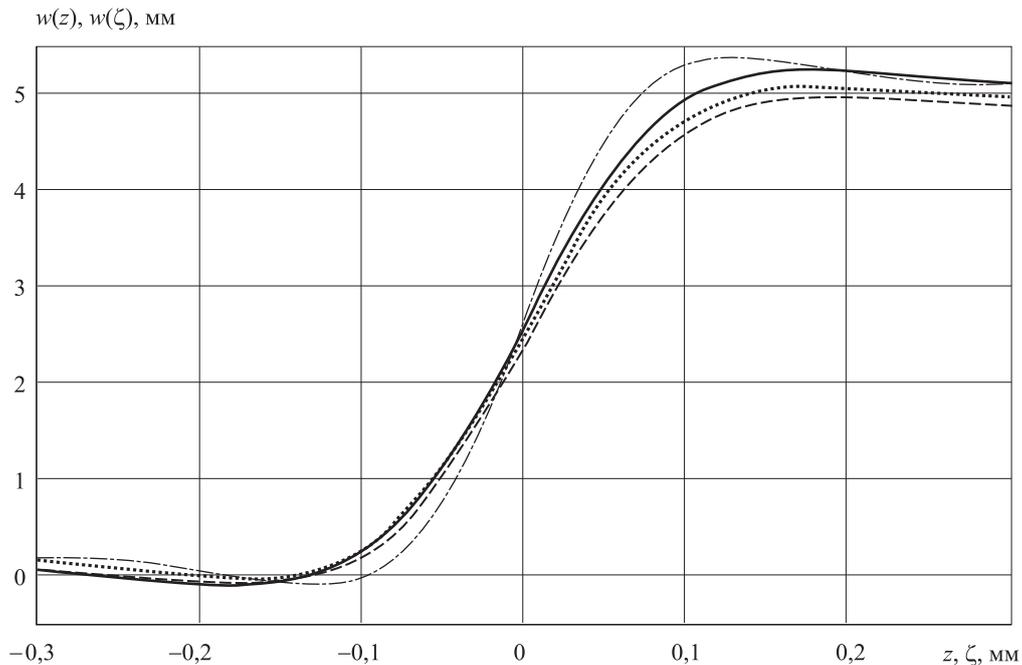


Рис. 3. Распределения радиального перемещения оболочки вдоль ее образующей

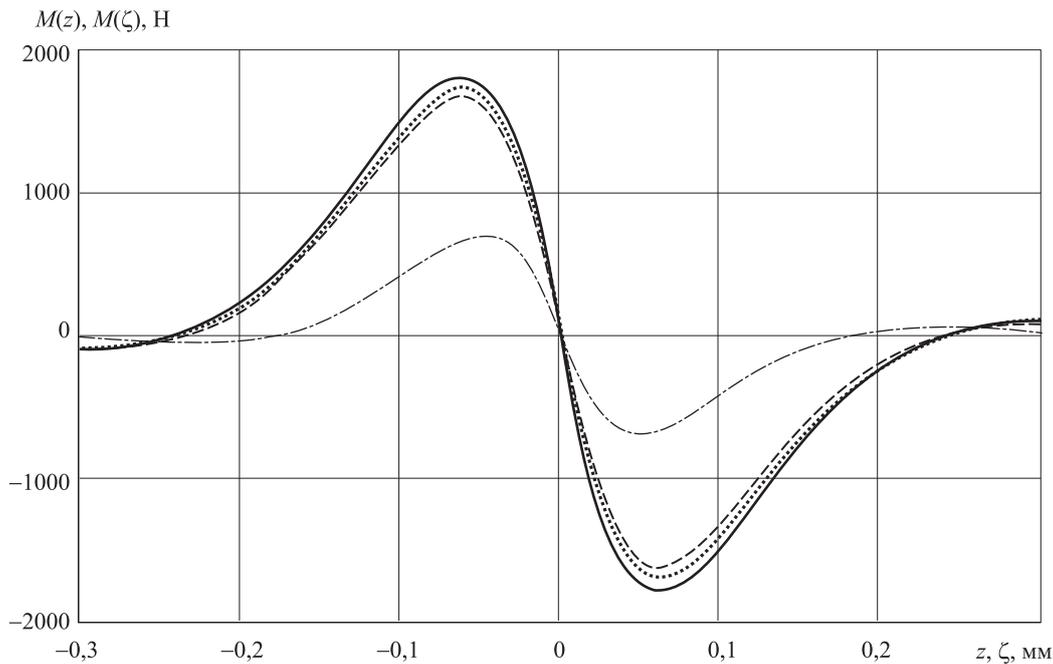


Рис. 4. Распределения погонного изгибающего момента вдоль образующей оболочки

при  $z \rightarrow -\infty$ , а для несмоченной части  $w_2(z) \rightarrow vNR/(Eh) + w_T/(1-\nu^2) \approx 5,07$  мм при  $z \rightarrow \infty$ . Следует отметить, что дополнительное радиальное перемещение при давлении  $p_0 = 0,1$  МПа составило бы примерно 0,14 мм.

На рис. 3 штриховой линией показана зависимость, построенная по формулам (24) и (25), радиального перемещения  $w(z)$  оболочки от координаты  $z$ .

Штриховой линией на рис. 4 показано изменение вдоль образующей оболочки изгибающего погонного момента  $M(z)$ , рассчитанного по формуле (18). В смоченной части оболочки максимальное значение момента  $M_{\max} = 1669$  Н соответствует  $z = -0,061$  м, а в несмоченной части его минимальное значение  $M_{\min} = -1624$  Н достигается при  $z = 0,062$  м. Функция  $M(z)$  является близкой к нечетной относительно координаты  $z$ . Определяемое равенством  $|\sigma_{\max}| = 6M_{\max}/h^2 + N/h$  наибольшее по абсолютному значению сжимающее напряжение в поперечном сечении оболочки при  $z = -0,061$  м равно 120 МПа, причем  $N/h = 20$  МПа. Следует отметить, что предел текучести сплава АМгб при температуре 78 К равен 185 МПа [9]. Характерно, что увеличение в 2 раза погонной осевой сжимающей силы  $N$  мало влияет на распределения вдоль образующей оболочки радиального перемещения и погонного изгибающего момента, показанные на рис. 3 и 4 пунктирными линиями.

Рассмотрим случай квазистационарного распределения температуры при движении уровня криогенной жидкости с постоянной скоростью  $v$ . Распределение температуры вдоль образующей оболочки определяют формулы вида (6):

$$\frac{T_1(\zeta) - \tilde{T}_1}{\tilde{T}_2 - \tilde{T}_1} = \frac{\exp(\alpha_1^* \zeta / h)}{1 + \alpha_1^* / \alpha_2^*}, \quad \zeta < 0;$$

$$\frac{\tilde{T}_2 - T_2(\zeta)}{\tilde{T}_2 - \tilde{T}_1} = \frac{\exp(-\alpha_2^* \zeta / h)}{1 + \alpha_2^* / \alpha_1^*}, \quad \zeta > 0.$$

С учетом замены координаты  $z$  координатой  $\zeta$  получим следующие частные решения уравнения (20):

при  $\zeta < 0$

$$w_1^*(\zeta) = (p_0 - \rho g_0 \zeta + vNR)R^2 / (Eh) + \frac{w_T'}{1 + \alpha_1^* / \alpha_2^*} \frac{\exp(\alpha_1^* \zeta / h)}{h^2 R^2 B'};$$

при  $\zeta > 0$

$$w_2^*(\zeta) = \frac{p_0 R^2 + vNR}{Eh} + \frac{w_T'}{1 - \nu^2} - \frac{w_T' \exp(-\alpha_2^* \zeta / h)}{h^2 R^2 B'' (1 + \alpha_2^* / \alpha_1^*)},$$

где

$$w_T' = \alpha_T (\tilde{T}_2 - \tilde{T}_1);$$

$$B' = (\alpha_1^* / h)^4 + 2(\beta^2 - \gamma^2)(\alpha_1^* / h)^2 + (\beta^2 + \gamma^2)^2;$$

$$B'' = (\alpha_2^* / h)^4 + 2(\beta^2 - \gamma^2)(\alpha_2^* / h)^2 + (\beta^2 + \gamma^2)^2.$$

Структура системы линейных алгебраических уравнений (23), определяющих постоянные коэффициенты в общем решении однородной части уравнения (20), остается прежней. В этом случае правые части этих уравнений следует заменить на соответствующие выражения:

$$A_1' = \frac{w_T'}{1 - \nu^2} - \frac{w_T'/(h^2 R^2)}{\alpha_1^* + \alpha_2^*} \left( \frac{\alpha_1}{B''} + \frac{\alpha_2}{B'} \right);$$

$$B_1' = \frac{\rho g_0 R^2}{Eh} + \frac{\alpha_1^* \alpha_2^* w_T'}{(\alpha_1^* + \alpha_2^*) h^3 R^2} \left( \frac{1}{B''} - \frac{1}{B'} \right);$$

$$A_2' = - \frac{\alpha_1^* \alpha_2^* w_T'}{(\alpha_1^* + \alpha_2^*) h^4 R} \left( \frac{\alpha_2}{B''} + \frac{\alpha_1}{B'} \right);$$

$$B_2' = \frac{\alpha_1^* \alpha_2^* w_T'}{(\alpha_1^* + \alpha_2^*) h^5 R} \left( \frac{(\alpha_2^*)^2}{B''} - \frac{(\alpha_1^*)^2}{B'} \right).$$

Такую же замену необходимо провести в формулах для коэффициентов в общем решении однородной части уравнения (20).

Сплошными кривыми на рис. 3 и 4 представлены зависимости соответственно радиального перемещения  $w(\zeta)$  оболочки и погонного изгибающего момента  $M(\zeta)$  от координаты  $\zeta$  при  $w_T' = w_T$ , скорости движения уровня криогенной жидкости  $\nu = 5$  мм/с и прежних значениях остальных параметров. Экстремальные значения  $M(\zeta)$  равны  $M(-0,0624) \approx \approx 1786$  Н/м и  $M(0,0614) \approx -1788$  Н/м, а  $|\sigma_{\max}| \approx 127$  МПа. Уменьшение толщины оболочки приводит к некоторому изменению распределения радиального перемещения оболочки и существенному уменьшению разности экстремальных значений погонного изгибающего

момента. Штрихпунктирные линии на рис. 3 и 4 соответствуют  $h = 6$  мм при неизменных значениях остальных параметров, при этом  $M(-0,0483) \approx 692$  Н/м,  $M(0,04861) \approx -689$  Н/м,  $|\sigma_{\max}| \approx 149$  МПа. Увеличение скорости движения уровня жидкости до  $\nu = 10$  мм/с в случае сохранения исходных данных предыдущего варианта расчета практически не повлияло на результаты расчета радиальных перемещений оболочки и ее напряженного состояния, несмотря на заметное различие в распределениях температуры вдоль образующей оболочки в зоне уровня жидкости (см. рис. 1, сплошные и штрихпунктирные кривые в окрестности значений  $\xi_1 = \xi_2 = 1$ ).

## Выводы

1. Применение разработанной комплексной математической модели, описывающей термонапряженное состояние цилиндрической криогенной емкости при ее заполнении, позволило провести количественную оценку периода времени, за который происходит установление квазистационарного распределения температуры вдоль образующей оболочки при постоянной скорости движения уровня криогенной жидкости.

2. Полученные при известном распределении температуры расчетные зависимости позволяют выявить влияние определяющих параметров на распределения радиального перемещения оболочки и погонного изгибающего момента в ее поперечном сечении, а также оценить наибольшее по абсолютному значению сжимающее напряжение.

## Литература

- [1] Феодосьев В.И. *Основы техники ракетного полета*. Москва, Наука, 1979. 496 с.
- [2] Ковалев Б.К. *Развитие ракетно-космических систем выведения*. Москва, Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2014. 400 с.
- [3] Александров А.А., Марков В.А., ред. *Альтернативные топлива для двигателей внутреннего сгорания*. Москва, ООО НИЦ «Инженер», ООО «Онико-М», 2012. 791 с.
- [4] Балабух Л.И., Колесников К.С., Зарубин В.С., Алфутов Н.А., Усюкин В.И., Чижов В.Ф. *Основы строительной механики ракет*. Москва, Высшая школа, 1969. 496 с.
- [5] Зарубин В.С., Кувыркин Г.Н. Математическое моделирование термомеханических процессов при интенсивном тепловом воздействии. *Теплофизика высоких температур*, 2003, № 2, с. 300–309.
- [6] Зарубин В.С., Кувыркин Г.Н. Особенности математического моделирования технических устройств. *Математическое моделирование и численные методы*, 2014, № 1, с. 5–17.

- [7] Зарубин В.С., Зимин В.Н., Кувыркин Г.Н. Математическое моделирование температурного состояния оболочки цилиндрической криогенной емкости при заполнении и опорожнении. *Математика и математическое моделирование*, 2015, № 6, с. 44–60, doi:10.7463/mathm.0615.0829350.
- [8] Феодосьев В.И. *Десять лекций-бесед по сопротивлению материалов*. Москва, Наука, 1975. 173 с.
- [9] Арзамасов Б.Н. ред. *Конструкционные материалы: Справочник*. Москва, Машиностроение, 1990. 688 с.
- [10] Галанин М.П., Савенков Е.Б. *Методы численного анализа математических моделей*. Москва, Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2010. 591 с.
- [11] Пономарев С.Д., Бидерман В.Л., Лихарев К.К., Макушин В.М., Малинин Н.Н., Феодосьев В.И. *Расчеты на прочность в машиностроении*. В 3 т. Т. 2. Москва, Машгиз, 1958. 974 с.
- [12] Феодосьев В.И. *Сопротивление материалов*. Москва, Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1999. 592 с.

## References

- [1] Feodos'ev V.I. *Osnovy tekhniki raketnogo poleta* [Basic techniques of rocket flight]. Moscow, Nauka publ., 1979. 496 p.
- [2] Kovalev B.K. *Razvitie raketno-kosmicheskikh sistem vyvedeniia* [Development of space-rocket launch systems]. Moscow, Bauman Press, 2014. 400 p.
- [3] *Al'ternativnye topliva dlia dvigatelei vnutrennego sgoraniia* [Alternative fuels for internal combustion engines]. Ed. Aleksandrov A.A., Markov V.A. Moscow, Inzhener publ., Oniko-M publ., 2012. 791 p.
- [4] Balabukh L.I., Kolesnikov K.S., Zarubin V.S., Alfutov N.A., Usiukin V.I., Chizhov V.F. *Osnovy stroitel'noi mekhaniki raket* [Fundamentals of building mechanics missiles]. Moscow, Vyshaia shkola publ., 1969. 496 p.
- [5] Zarubin V.S., Kuvyrkin G.N. Mathematical Modeling of Thermomechanical Processes under Intense Thermal Effect. *High Temperature*, 2003, vol. 41, no. 2, pp. 257–265.
- [6] Zarubin V.S., Kuvyrkin G.N. Osobennosti matematicheskogo modelirovaniia tekhnicheskikh ustroistv [Special features of mathematical modeling of technical instruments]. *Matematicheskoe modelirovanie i chislennye metody* [Mathematical Modeling and Computational Methods]. 2014, vol. 1, no. 1–1, pp. 5–17.
- [7] Zarubin V.S., Zimin V.N., Kuvyrkin G.N. Matematicheskoe modelirovanie temperaturnogo sostoiianiia obolochki tsilindricheskoi kriogennoi emkosti pri zapolnenii i oporozhnenii [Mathematical modeling of the thermal state of the cylindrical shell of the cryogenic tank during filling and emptying]. *Matematika i matematicheskoe modelirovanie* [Mathematics and Mathematical Modeling]. 2015, no. 6, doi:10.7463/mathm.0615.0829350.
- [8] Feodos'ev V.I. *Desiat' leksii-besed po soprotivleniiu materialov* [Ten lectures, discussions on strength of materials]. Moscow, Nauka publ., 1975. 173 p.
- [9] *Konstruksionnye materialy: Spravochnik* [Construction Materials: A Handbook]. Ed. Arzamasov B.N. Moscow, Mashinostroenie publ., 1990. 688 p.
- [10] Galanin M.P., Savenkov E.B. *Metody chislennogo analiza matematicheskikh modelei* [Numerical analysis of mathematical models]. Moscow, Bauman Press, 2010. 591 p.
- [11] Ponomarev S.D., Biderman V.L., Likharev K.K., Makushin V.M., Malinin N.N., Feodos'ev V.I. *Raschety na prochnost' v mashinostroenii* [The strength calculations in mechanical engineering]. Moscow, Mashgiz publ., 1958. 974 p.
- [12] Feodos'ev V.I. *Soprotivlenie materialov* [Mechanics of materials]. Moscow, Bauman Press, 1999. 592 p.

Статья поступила в редакцию 08.02.2016

## Информация об авторах

**АЛЕКСАНДРОВ Анатолий Александрович** (Москва) — доктор технических наук, профессор, ректор МГТУ им. Н.Э. Баумана (105005, Москва, Российская Федерация, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1, e-mail: rector@bmstu.ru).

**ЗАРУБИН Владимир Степанович** (Москва) — доктор технических наук, профессор кафедры «Прикладная математика». МГТУ им. Н.Э. Баумана (105005, Москва, Российская Федерация, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1, e-mail: zarubin@bmstu.ru).

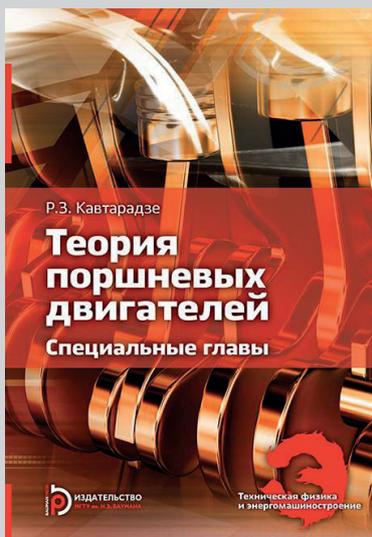
**ЗИМИН Владимир Николаевич** (Москва) — доктор технических наук, профессор, первый проректор — проректор по научной работе МГТУ им. Н.Э. Баумана (105005, Москва, Российская Федерация, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1, e-mail: zimin@bmstu.ru).

## Information about the authors

**ALEKSANDROV Anatoliy Aleksandrovich** (Moscow) — Doctor of Science (Eng.), Professor, Rector, Bauman Moscow State Technical University (105005, Moscow, Russian Federation, 2<sup>nd</sup> Baumanskaya St., Bldg. 5, Block 1, email: rector@bmstu.ru).

**ZARUBIN Vladimir Stepanovich** (Moscow) — Doctor of Science (Eng.), Professor, Department of Applied Mathematics. Bauman Moscow State Technical University (105005, Moscow, Russian Federation, 2<sup>nd</sup> Baumanskaya St., Bldg. 5, Block 1, email: zarubin@bmstu.ru).

**ZIMIN Vladimir Nikolaevich** (Moscow) — Doctor of Science (Eng.), Professor, First Vice-Rector — Vice-Rector for Scientific Research. Bauman Moscow State Technical University (105005, Moscow, Russian Federation, 2<sup>nd</sup> Baumanskaya St., Bldg. 5, Block 1, e-mail: zimin@bmstu.ru).



В Издательстве МГТУ им. Н.Э. Баумана  
вышел в свет учебник  
**Р.З. Кавтарадзе**

### «Теория поршневых двигателей. Специальные главы»

Изложены основы создания высокоэффективных и высокоэкологических двигателей, проанализированы термодинамические циклы поршневых и комбинированных двигателей, особенности и теплофизические свойства используемых топлив и рабочего тела. Описаны нульмерные и трехмерные модели рабочего процесса и способы его организации в двигателях с внешним и внутренним смесеобразованием, а также формы камеры сгорания. Значительное внимание уделено процессам впрыскивания, распыливания, испарения топлива, задержки воспламенения и тепловыделения в бензиновых двигателях и в дизелях. Рассмотрены процессы сгорания топлива, образования вредных выбросов, проанализированы методы снижения их концентрации, а также проблемы усовершенствования и перспективы развития двигателей с непосредственным впрыскиванием бензина и дизельного топлива. Приведены математические модели основных внутрицилиндровых процессов и методы их экспериментального исследования.

Содержание учебника соответствует курсу лекций, читаемых автором в МГТУ им. Н.Э. Баумана.

**По вопросам приобретения обращайтесь:**

105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1.  
Тел.: +7 499 263-60-45, факс: +7 499 261-45-97;  
press@bmstu.ru; www.baumanpress.ru