

# Транспортное и энергетическое машиностроение

УДК 629.1.028

DOI: 10.18698/0536-1044-2016-1-43-49

## Математическая модель прямолинейного движения колесной машины с балансирной подвеской мостов по неровностям пути

**М.М. Жилейкин**

МГТУ им. Н.Э. Баумана, 105005, Москва, Российская Федерация, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1

## A Mathematical Model of Linear Movement of a Wheeled Vehicle with Centerpoint Suspension over Rough Surfaces

**M.M. Zhileykin**BMSTU, 105005, Moscow, Russian Federation, 2<sup>nd</sup> Baumanskaya St., Bldg. 5, Block 1

e-mail: jileykin\_m@mail.ru



Имитационное математическое моделирование движения транспортного средства при различных режимах и дорожных условиях, а также преодоления типовых препятствий является основным методом исследования, применяемым в теории поддресоривания современных колесных машин (КМ). Одной из самых распространенных схем построения системы поддресоривания многоосных КМ является балансирная подвеска для двух ведущих мостов, где в качестве балансирной связи применен многослойный пакет металлических рессор. Разработана математическая модель прямолинейного движения КМ с балансирной подвеской мостов, учитывающей угловую податливость пакета металлорессор. Методами имитационного моделирования подтверждена работоспособность разработанной математической модели.

**Ключевые слова:** имитационное математическое моделирование, колесная машина, система поддресоривания, балансирная подвеска.



Mathematical simulation of a vehicle moving in different modes and road conditions, and overcoming typical obstacles is the main research method used in the theory of suspension in modern wheeled vehicles (WV). One of the most commonly used schemes for suspension systems in multi-axle WVs is a centerpoint suspension for two drive axles where a multi-sheet pack of metal springs is used as a balancing link. The authors developed a mathematical model of linear movement of a WV with a centerpoint suspension that takes into account the angular ductility of the spring pack. The performed mathematical simulations confirmed the validity of the developed mathematical model.

**Keywords:** mathematical simulation, wheeled vehicle, suspension system, centerpoint suspension.

При проектировании подвесок колесных машин (КМ) одной из важных задач является исследование свойств семейства подвесок, созданных для различных ходов и нагрузок. Провести сбор необходимого объема информации для автомобилей, различных по конструкции и эксплуатационным характеристикам, невозможно. Сроки и объемы натурных испытаний для сбора статистических данных в такой постановке задачи весьма значительны. Увеличение же сроков испытаний приводит к моральному старению создаваемой системы. При разработке транспортных средств на этапе предпроектных исследований желательно иметь полную информацию не только о статических, но и динамических характеристиках разрабатываемой системы. Провести полные аналитические исследования по определению соответствующих характеристик невозможно. Эта задача может быть решена только с помощью моделирования, в частности средствами компьютерных имитационных математических моделей.

Имитационное математическое моделирование движения транспортного средства при различных режимах и дорожных условиях, а также преодоления типовых препятствий является основным методом исследования, применяемым в теории поддрессирования современных КМ.

Моделирование прямолинейного движения КМ по неровностям дороги позволяет исследовать вибронегруженность экипажа машины, что является одной из важнейших задач проектирования перспективных транспортных средств, и определить максимальную скорость движения по различным типам дорог при ограничениях со стороны системы поддрессирования. Созданные в последнее время математиче-

ские модели движения КМ, как правило, описывают общий случай криволинейного движения с подробной проработкой взаимодействия колесного движителя с опорным основанием [1–8]. Для решения задачи исследования вибронегруженности такая детализация является избыточной и требует дополнительных затрат на настройку программного обеспечения и определение подробных технических характеристик исследуемой КМ. При этом известно, что для обеспечения свойств стационарности и эргодичности процессов, происходящих в системе, анализ плавности хода КМ проводится при равномерном прямолинейном движении. Это позволяет существенно упростить математическое описание объекта.

Одной из самых распространенных схем построения системы поддрессирования многоосных КМ является балансирная подвеска для двух ведущих мостов, где в качестве балансирной связи применен многолистовой пакет металлических рессор (рис. 1). Известные подходы к построению математической модели механической балансирной подвески, приведенные, например, в работе [9], не учитывают угловую податливость пакета металлорессор, рассматривая его как жесткую балку на упругом основании.

Цель работы — разработка математической модели прямолинейного движения КМ с балансирной подвеской мостов, учитывающей угловую податливость пакета металлорессор.

**Требования, предъявляемые к математической модели движения транспортного средства, и основные допущения.** Исходя из совокупности поставленных задач по определению плавности хода, которые должны быть решены методами имитационного моделирования, можно сформулировать требования, предъявляемые к модели движения КМ:

- модель должна отражать совместную динамику корпуса и ходовой части;
- в ней должен быть учтен неударяющий характер связей, наложенных на автомобиль;
- результатами моделирования должны быть силовые и кинематические параметры движения машины;
- модель должна быть универсальной для различных конструктивных параметров КМ и дорожных условий;
- для практической реализации математической модели должны использоваться самые эффективные вычислительные методы.

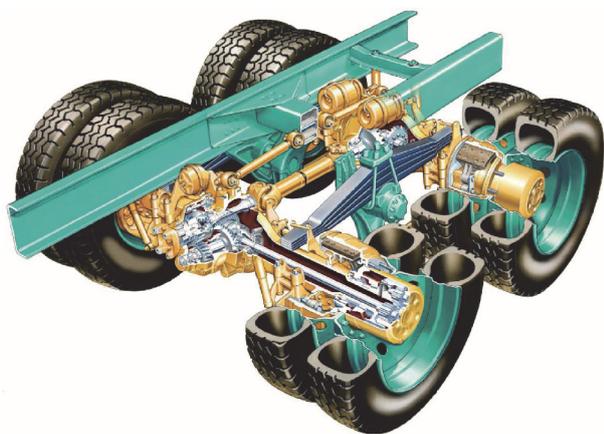


Рис. 1. Подвеска балансирной тележки КМ

При математическом описании динамики прямолинейного движения КМ принимаются следующие допущения:

- 1) профиль трассы — недеформируемый кусочно-линейный;
- 2) система симметрична относительно продольной оси, проходящей через центр тяжести корпуса машины;
- 3) трение в шарнирах и подшипниках пренебрежимо мало;
- 4) величина проекции скорости центра масс машины на горизонтальную ось постоянна;
- 5) поперечные реакции дороги не влияют на колебание масс КМ;
- 6) контакт шин с дорогой — точечный;
- 7) углы наклона корпуса малы.

Принятые допущения позволяют рассматривать движение машины в вертикальной плоскости, проходящей через центр тяжести корпуса КМ.

Динамическая система «корпус — ходовая часть — дорога» в общем случае является нелинейной, поскольку упругодемпфирующие элементы имеют нелинейные характеристики. Известно также, что при определенных режимах движения нередко возникают потери контакта одного или нескольких колес с опорной поверхностью (отрыв колес).

При разработке математической модели не учитываются прочностные аспекты элементов систем, т. е. предполагается, что элементы не теряют работоспособность в ходе эксперимента и работают в пределах допустимых напряжений. Это допущение логично, поскольку на данном этапе область незнания объекта весьма значительна и прочностные аспекты должны быть учтены на следующем этапе разработки конструкции на основе результатов, полученных при оценке параметров объекта.

**Описание пространственного движения КМ.**

Движение корпуса автомобиля представляет собой общий случай движения твердого тела (рис. 2). На корпус автомобиля геометрические ограничения не накладываются, а мгновенное положение можно определить из решения дифференциальных уравнений динамики корпуса машины. Известно, что в общем случае движения твердое тело имеет шесть степеней свободы. Поскольку рассматривается только прямолинейное движение и принято допущение 5, уравнения поступательного движения КМ вдоль осей  $X$  и  $Y$ , а также вращательного движения относительно вертикальной оси  $Z$  рассматриваться не будут. Допущение о малости углов наклона корпуса приводят в системе трех дифференциальных уравнений: поступательного движения относительно оси  $Z$  и двух вращательных относительно осей  $X$  и  $Y$ :

$$\begin{cases} m_{\text{пм}} \frac{d^2 z}{dt^2} = \sum_{j=1}^2 \sum_{i=1}^n F_{ji} - m_{\text{пм}} g; \\ J_Y \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = \sum_{j=1}^2 \sum_{i=1}^n F_{ji} l_{ji}; \\ J_X \frac{d^2 \psi}{dt^2} = \sum_{j=1}^2 \sum_{i=1}^n F_{ji} B_{ij}, \end{cases}$$

где  $F_{ji}$  — сила в  $i$ -й подвеске  $j$ -го борта;  $l_{ji}$  — продольная координата относительно центра масс  $i$ -го узла подвески на  $j$ -м борту;  $B_{ij}$  — поперечная координата плоскости  $j$ -го борта относительно центра масс КМ;  $m_{\text{пм}}$  — масса корпуса машины;  $J_Y$  и  $J_X$  — моменты инерции корпуса машины поперечной и продольной осей, проходящих через центр масс;  $n$  — число колес одного борта.

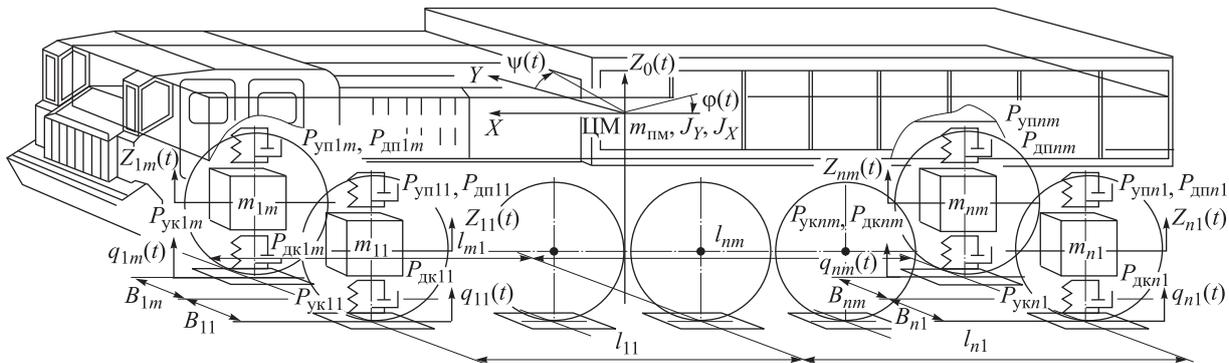


Рис. 2. Расчетная схема многоосной КМ

Сила в подвеске  $F_{ji}$  зависит от относительных прогиба  $h_{ij}$  и скорости прогиба  $dh_{ij}/dt$  подвески:

$$F_{ji} = P_{упij}(h_{ij}) + P_{дпij}(\dot{h}_{ij}),$$

где  $P_{упij}(h_{ij})$  и  $P_{дпij}(\dot{h}_{ij})$  — силы в  $i$ -м упругом и демпфирующем элементах  $j$ -го борта.

**КМ с зависимой подвеской (мостовая схема с балансирными связями осей).** Рассмотрим построение математической модели прямолинейного движения КМ с зависимой подвеской на примере автомобиля с тремя мостами, причем два задних моста соединены бортовым механическим упругим балансиром (рис. 3).

Дифференциальные уравнения колебаний поддресоренного корпуса имеют следующий вид:

$$\begin{cases} m_{пм} \frac{d^2 z}{dt^2} = \sum_{j=1}^2 \sum_{i=1}^3 (F_{ij} + \Delta F_{bj}) - m_{пм} g; \\ J_Y \frac{d^2 \phi}{dt^2} = (F_{11} + F_{21}) l_1 + (F_{12} + F_{13} + F_{22} + F_{23} + \\ + \Delta F_{b1} + \Delta F_{b2}) L_b; \\ J_X \frac{d^2 \psi}{dt^2} = (F_{11} - F_{21}) \frac{B_1}{2} + (F_{12} + F_{13} + \Delta F_{b1}) \frac{B_1}{2} - \\ - (F_{22} + F_{23} + \Delta F_{b2}) \frac{B_1}{2}, \end{cases}$$

где  $L_b$  — продольная координата оси балансира относительно центра масс корпуса;  $B_1$  — рессорная колея.

Для первого моста следует записать дифференциальные уравнения для вертикальных и

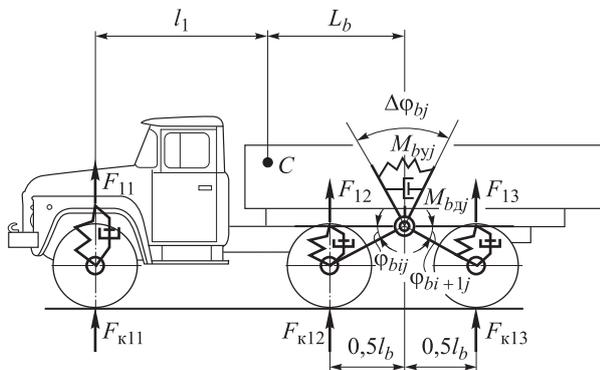


Рис. 3. Расчетная схема трехосного автомобиля с задней зависимой подвеской

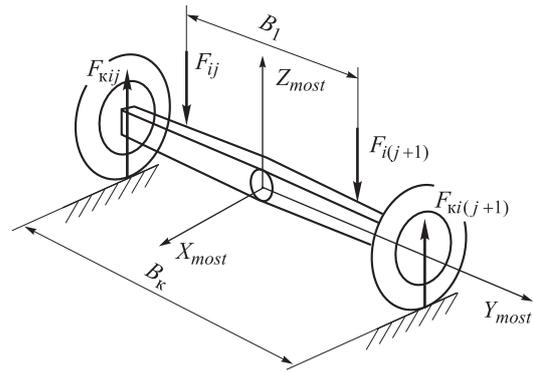


Рис. 4. Расчетная схема колебаний моста КМ

угловых колебаний относительно оси  $X_{most}$ , проходящей через центр масс моста и параллельной продольной оси  $X$  (рис. 4):

$$\begin{cases} M_{most i} \frac{d^2 z_{most}}{dt^2} = F_{kij} + F_{ki(j+1)} - F_{ij} - F_{i(j+1)} - \\ - M_{most i} g; \\ J_{most} \ddot{\psi}_{most} = F_{kij} \frac{B_k}{2} - F_{ki(j+1)} \frac{B_k}{2} - F_{ij} \frac{B_1}{2} + F_{i(j+1)} \frac{B_1}{2}, \end{cases}$$

где  $M_{most i}$  — масса моста;  $J_{most}$  — момент инерции моста относительно оси  $X_{most}$ ;  $B_1$  и  $B_k$  — рессорная и колесная колея;  $F_{kij}$  — вертикальная реакция в точке контакта  $i$ -го колеса  $j$ -го борта с опорным основанием.

Выражения для прогиба и относительной скорости прогиба подвески можно записать в следующем виде:

$$\begin{aligned} h_{ji} &= Z_{most} + \psi_{most} \frac{B_1}{2} - l_{ji} \phi - \psi \frac{B_1}{2} - h_{ji \max} - Z_0; \\ \dot{h}_{ji} &= \dot{Z}_{most} + \dot{\psi}_{most} \frac{B_1}{2} - l_{ji} \dot{\phi} - \dot{\psi} \frac{B_1}{2} - \dot{Z}_0, \end{aligned}$$

где  $h_{ji \max}$  — максимальный прогиб подвески;  $Z_0$  — вертикальная координата центра масс корпуса;  $Z_{most}$  — вертикальная координата центра масс моста.

Прогиб  $h_{kij}$  и относительную скорость  $dh_{kij}/dt$  прогиба шины колеса определяют по следующим формулам:

$$\begin{aligned} h_{kji} &= -Z_{most} - \psi_{most} \frac{B_k}{2} - \frac{h_{ji \max}}{2} + \frac{h_{kji \max}}{2} + q_{ji}; \\ \dot{h}_{kji} &= -\dot{Z}_{most} - \dot{\psi}_{most} \frac{B_k}{2} + \dot{q}_{ji}, \end{aligned}$$

где  $h_{kji \max}$  — максимальный прогиб шины колеса;  $q_{ji}$  — вертикальная координата про-

филя опорного основания под  $i$ -м колесом  $j$ -го борта.

Дифференциальные уравнения для второго и третьего мостов имеют следующий вид:

$$\begin{cases} M_{most\ i} \frac{d^2 z_{most}}{dt^2} = F_{kij} + F_{ki(j+1)} - F_{ij} - F_{i(j+1)} - \\ - \Delta F_{bj} - \Delta F_{b(j+1)} - M_{most\ i} g; \\ J_{most} \ddot{\Psi}_{most} = F_{kij} \frac{B_1}{2} - F_{ki(j+1)} \frac{B_1}{2} - F_{ij} \frac{B_k}{2} + \\ + F_{i(j+1)} \frac{B_k}{2} - \Delta F_{bj} \frac{B_1}{2} + \Delta F_{b(j+1)} \frac{B_1}{2}, \end{cases}$$

где  $\Delta F_{bj}$  — упругодемпфирующая сила, действующая на мост со стороны балансира.

Эту силу определяют следующим образом:

$$\Delta F_{bj} = \frac{M_{byj}(\Delta\phi_{bj}) + M_{bdj}(\Delta\dot{\phi}_{bj})}{0,5l_b};$$

$$M_{byj}(\Delta\phi_{bj}) = C_M \Delta\phi_{bj};$$

$$M_{bdj}(\Delta\dot{\phi}_{bj}) = K_M \Delta\dot{\phi}_{bj},$$

где  $M_{byj}$ ,  $M_{bdj}$  — упругий и демпфирующий моменты балансира;  $l_b$  — длина балансира;  $\Delta\phi_{bj}$  и  $\Delta\dot{\phi}_{bj}$  — угол и скорость угла закручивания балансира соответственно;  $C_M$  и  $K_M$  — угловая жесткость и угловой коэффициент демпфирования балансира соответственно.

При этом для угла закручивания балансира и его скорости имеем следующие выражения:

$$\phi_{bij} = \arctg \frac{h_{ij} - 0,5h_{max}}{0,5l_b};$$

$$\phi_{bi+1j} = \arctg \frac{h_{i+1j} - 0,5h_{max}}{0,5l_b};$$

$$\Delta\phi_{bj} = \phi_{bij} + \phi_{bi+1j};$$

$$\dot{\phi}_{bij} = \frac{\dot{h}_{ij}}{0,5l_b};$$

$$\dot{\phi}_{bi+1j} = \frac{\dot{h}_{i+1j}}{0,5l_b};$$

$$\Delta\dot{\phi}_{bj} = \dot{\phi}_{bij} + \dot{\phi}_{bi+1j}.$$

Угловую жесткость определяют следующим образом [5]:

$$C_M = \frac{24En_p b_p h_p^3}{\delta l_p^2};$$

$$\delta = \frac{3(1-1/n_p)(1-3/n_p) - (2/n_p^2) \ln(1/n_p)}{2(1-1/n_p)^3},$$

где  $E = 2,1 \cdot 10^5$  МПа — модуль упругости первого рода;  $n_p$  — число листов в пакете рессоры;  $h_p$ ,  $b_p$  и  $l_p$  — толщина, ширина и длина пакета листов соответственно.

Остальные параметры модели определяются так же, как и для одиночного моста.

Для проверки работоспособности математической модели была создана программа в программном комплексе MATLAB/SIMULINK моделирования прямолинейного движения трехосной КМ с балансирной тележкой. Проведено моделирование движения машины по разбитой грунтовой дороге со скоростью 15 км/ч. В качестве примера на рис. 5 приведены зависимости вертикальной координаты центра масс корпуса  $Z_0$  ( $a$ ), угла продольного наклона корпуса  $\phi$  ( $b$ ) и угла закручивания балансира левого борта  $\Delta\phi_{b1}$  ( $b$ ) от времени.

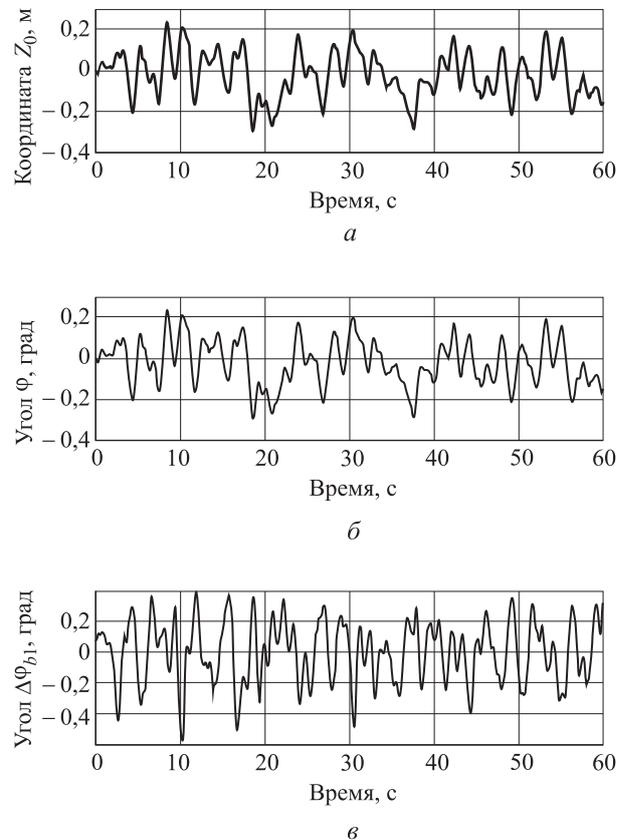


Рис. 5. Зависимости координаты  $Z_0$  ( $a$ ), углов  $\phi$  ( $б$ ) и  $\Delta\phi_{b1}$  ( $в$ ) от времени

## Выводы

1. Разработана математическая модель прямолинейного движения КМ с балансирной подвеской мостов, учитывающей угловую податливость пакета металлорессор.

2. Методами имитационного моделирования подтверждена работоспособность разработанной математической модели.

## Литература

- [1] Полунгян А.А., Фоминых А.Б. Математическая модель динамики трансмиссии колесной машины при движении по твердой неровной дороге. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Машиностроение*, 2003, № 4, с. 15–25.
- [2] Фоминых А.Б., Жеглов Л.Ф. Математическая модель движения полноприводной колесной машины по дороге с твердой неровной поверхностью. *Наука и образование. МГТУ им. Н.Э. Баумана*, 2013, № 11. URL: <http://technomag.bmstu.ru/doc/645575.html> (дата обращения 10.11.2015). Doi: 10.7463/1113.0645575.
- [3] Котиев Г.О., Горелов В.А. Моделирование прямолинейного движения полноприводной колесной машины по несвязным грунтам. *Тр. НАМИ. Автомобили и двигатели. Сб. науч. тр.*, Москва, Изд-во ГНЦ РФ ФГУП «НАМИ», 2009, вып. 241, с. 25–39.
- [4] Котиев Г.О., Чернышев Н.В., Горелов В.А. Математическая модель криволинейного движения автомобиля с колесной формулой 8×8 при различных способах управления поворотом. *Журнал Ассоциации Автомобильных Инженеров*, 2009, № 2, с. 34–40.
- [5] Pacejka H.B. *Tyre and Vehicle Dynamics*, Oxford, Butterworth Heinemann, 2006. 672 p.
- [6] Maurice J.P., Pacejka H.B. Relaxation Length Behaviour of Tyres. *Vehicle System Dynamics*, 2007, № 8, 27:339–342. Doi: 10.1080/00423119708969668.
- [7] Pasterkamp W.R., Pacejka H.B. The Tyre as a Sensor to Estimate Friction. *Vehicle System Dynamics*, 2007, № 7, 27(5):409–422. Doi: 10.1080/00423119708969339.
- [8] Pacejka H.B. *Semi-empirical tyre models in Tyre and Vehicles Dynamics*. Oxford, U.K., Elsevier, 2005, pp. 156–215.
- [9] Полунгян А.А., ред. *Проектирование полноприводных колесных машин*. В 3 т., т. 3. Москва, Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2008. 432 с.

## References

- [1] Polungian A.A., Fominykh A.B. Matematicheskaya model' dinamiki transmissii kolesnoi mashiny pri dvizhenii po tverdoi nerovnoi doroge [Mathematical Simulation of Dynamics of Wheeled Vehicle Transmission]. *Vestnik MGTU im. N.E. Baumana. Ser. Mashinostroenie* [Herald of the Bauman Moscow State Technical University. Ser. Mechanical Engineering]. 2003, no. 4, pp. 15–25.
- [2] Fominykh A. B., Zheglov L. F. Matematicheskaya model' dvizheniya polnoprivodnoi kolesnoi mashiny po doroge s tverdoi nerovnoi poverkhnost'iu [A mathematical model of an all-wheel drive vehicle's motion on a firm rough road]. *Nauka i obrazovanie. MGTU im. N.E. Baumana* [Science and Education. Bauman MSTU]. 2013, no. 11. Available at: <http://technomag.bmstu.ru/doc/645575.html> (accessed 10 November 2015). Doi: 10.7463/1113.0645575.
- [3] Kotiev G.O., Gorelov V.A. Modelirovanie priamolineinogo dvizheniya polnoprivodnoi kolesnoi mashiny po nesvaznym gruntam [Modeling of linear motion wheel all-wheel drive cars on cohesive soils]. *Trudy NAMI. Avtomobili i dvigateli. Sbornik nauchnykh trudov* [Proceedings of NAMI. Cars and engines. Collection of scientific papers.]. Moscow, GNTs RF FGUP «NAMI» publ., 2009, iss. 241, pp. 25–39.
- [4] Kotiev G.O., Chernyshev N.V., Gorelov V.A. Matematicheskaya model' krivolineinogo dvizheniya avtomobilia s kolesnoi formuloi 8×8 pri razlichnykh sposobakh upravleniya povorotom [Mathematical model of 8×8 vehicle curvilinear motion with various steering systems]. *Zhurnal Assotsiatsii Avtomobil'nykh Inzhenerov* [Zurnal AAI]. 2009, no. 2, pp. 34–40.

- [5] Pacejka H.B. *Tyre and Vehicle Dynamics*. Oxford, Butterworth Heinemann, 2006. 672 p.
- [6] Maurice J.P., Pacejka H.B. Relaxation Length Behaviour of Tyres. *Vehicle System Dynamics*, 2007, no. 8, 27:339–342. Doi: 10.1080/00423119708969668.
- [7] Pasterkamp W.R., Pacejka H.B. The Tyre as a Sensor to Estimate Friction. *Vehicle System Dynamics*, 2007, no. 7, 27(5):409–422. Doi: 10.1080/00423119708969339.
- [8] Pacejka H.B. *Semi-empirical tyre models in Tyre and Vehicles Dynamics*. Oxford, U.K., Elsevier, 2005, pp. 156–215.
- [9] *Proektirovanie polnoprivodnykh kolesnykh mashin* [Design-wheel drive wheeled vehicles]. Ed. Polungian A.A. Moscow, Bauman Press, 2008. 432 p.

Статья поступила в редакцию 17.11.2015

## Информация об авторе

**ЖИЛЕЙКИН Михаил Михайлович** (Москва) — доктор технических наук, профессор кафедры «Колесные машины». МГТУ им. Н.Э. Баумана (105005, Москва, Российская Федерация, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1, e-mail: jileykin\_m@mail.ru).

## Information about the author

**ZHILEYKIN Mikhail Mikhailovich** (Moscow) — Doctor of Science (Eng.), Professor, Department of Wheel Vehicles. Bauman Moscow State Technical University (105005, Moscow, Russian Federation, 2<sup>nd</sup> Baumanskaya St., Bldg. 5, Block 1, e-mail: jileykin\_m@mail.ru).



В Издательстве МГТУ им. Н.Э. Баумана  
вышел в свет учебник  
**М.В. Добровольского**

### «Жидкостные ракетные двигатели. Основы проектирования»

Изложены основы проектирования жидкостных ракетных двигателей (ЖРД). Даются основные положения теории, методы расчета и описание узлов и агрегатов двигательных установок с ЖРД. Рассмотрены процессы расширения газов в соплах, смесеобразования и теплообмена, а также методы профилирования сопел, расчета форсунок, определения форм и объема камеры сгорания. Приведены системы подачи с турбонасосными агрегатами и вытеснительные системы подачи с газовым, пороховым и жидкостным аккумуляторами давления. Изложены методики и примеры расчетов элементов конструкции и ЖРД в целом.

Третье издание (1-е — 1968 г., 2-е — 2005 г.) дополнено параметрами отечественных и зарубежных ЖРД конца XX в. Соответствует курсам лекций, читаемых в МГТУ им. Н.Э. Баумана.

Для студентов и магистрантов высших технических учебных заведений. Может быть полезен также инженерам и аспирантам, специализирующимся в области ракетной техники.

**По вопросам приобретения обращайтесь:**

105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1.  
Тел.: +7 499 263-60-45, факс: +7 499 261-45-97;  
press@bmstu.ru; www.baumanpress.ru