

УДК 621.833

DOI: 10.18698/0536-1044-2015-12-17-26

Математическое моделирование предельного режима работы волновой зубчатой передачи

И.Е. Люминарский^{1,2}, С.Е. Люминарский²

¹ Московский государственный машиностроительный университет, 107023, Москва, Российская Федерация, ул. Б.Семёновская, д. 38

² МГТУ им. Н.Э. Баумана, 105005, Москва, Российская Федерация, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1

Mathematical Modelling of the Limit Working Capacity of a Harmonic Drive

I.E. Lyuminarsky^{1,2}, S.E. Lyuminarsky²

¹ Moscow state university of mechanical engineering, 115280, Moscow, Russian Federation, Bolshaya Semenovskaya St, Bldg. 38

² BMSTU, 105005, Moscow, Russian Federation, 2nd Baumanskaya St., Bldg. 5, Block 1



e-mail: lie260@mail.ru, katjstas@mail.ru



Предельный момент является важнейшей характеристикой, определяющей нагрузочную способность волновой зубчатой передачи. При проектировании волновой передачи необходимо определять предельный момент, так как его значение может оказаться меньше номинального. В этом случае передача становится неработоспособной вследствие проскока генератора. Основная причина проскока заключается в появлении интерференции, вызванной уменьшением бокового зазора на входе в зацепление при нагружении передачи. Существующие инженерные методики определения предельного момента волновой зубчатой передачи являются приближенными и основываются на экспериментальных данных. Они не позволяют расчетным путем исследовать процессы, происходящие при проскоке генератора. В статье представлена математическая модель волновой зубчатой передачи, которая позволяет исследовать предельный режим ее работы и определять предельный момент, после которого начинается проскок генератора. Разработанная математическая модель основана на расчете упругого взаимодействия звеньев передачи, которые имеют пространственную деформацию. Адекватность предложенной модели проверяется путем сравнения результатов проведенных вычислений с экспериментальными данными. Представленные в статье результаты расширяют знания о предельном режиме работы волновой зубчатой передачи.

Ключевые слова: волновая зубчатая передача, гибкое колесо, генератор волн, интерференция зубьев, проскок зубьев, предельный вращающий момент.



The limit torque is a characteristic of utmost importance as it determines the loading capacity of a harmonic drive. When designing harmonic drives, it is necessary to determine the limit torque as its value may happen to be less than nominal. In this case the drive becomes inoperative due to the slippage of the generator. The main reason for the slippage is the interference caused by the reduction of the backlash between the top of the teeth as they come into contact when the drive is loaded. The existing engineering methods of determining the limit torque of the harmonic drive are based on approximation and experimental data. They cannot be used to calculate the processes occurring when the generator slips. The article

presents a mathematical model of harmonic drive that can be used to analyze its limit working capacity and determine the limit torque, after which slippage occurs. The developed model is based on the calculation of elastic interaction between the links of the drive that have spatial deformation. The validity of the proposed model is tested by comparing the results of calculations with experimental data. The results presented in the article broaden the knowledge about the limit working capacity of harmonic drives.

Keywords: harmonic drive, flex spline, wave generator, teeth interference, teeth slippage, limit torque.

Особенностью работы волновой зубчатой передачи (ВЗП) является многопарность зацепления, которая обеспечивает высокую кинематическую точность и безззорное зацепление. Вследствие увеличения упругой деформации гибкого колеса многопарность зацепления увеличивается с ростом момента на выходном валу. С увеличением момента также возрастают деформации жесткого колеса, генератора волн и вала генератора, что может привести к появлению интерференции зубьев и проскоку генератора.

Экспериментальному исследованию проскока генератора в волновой зубчатой передаче посвящены работы [1–4]. В них выявлено, что основной причиной проскока генератора служит интерференция зубьев на входе в зацепление, которая увеличивается с ростом момента M на выходном валу. Интерференция зубьев заключается в том, что в некоторые моменты времени зубья начинают взаимодействовать поверхностями вершин.

Переход зубьев из состояния интерференции в состояние нормального взаимодействия осуществляется скачком, при котором происходит срыв зуба гибкого колеса с поверхности вершин жесткого колеса, после чего зубья гибкого и жесткого колес начинают взаимодействовать боковыми поверхностями.

С возрастанием момента M увеличивается количество зубьев, взаимодействующих поверхностями вершин. При определенном значении M срыва зубьев, взаимодействующих поверхностями вершин, не происходит. В этом случае указанные зубья гибкого колеса вообще не входят во впадины жесткого колеса. При этом увеличиваются растяжение жесткого колеса, сжатие генератора волн и деформация вала генератора, что приводит к возрастанию количества зубьев, не входящих в зацепление. Наступает момент, когда все зубья двух полу-волн выходят из зацепления и гибкое колесо проворачивается относительно жесткого колеса, не зацепляясь с ним. Это явление называют проскоком генератора (или зубьев).

Момент сопротивления на выходном валу, при котором происходит проскок зубьев, называют предельным моментом $M_{пр}$ передачи. Это максимальный момент, который может передавать ВЗП.

Предельный момент является важнейшей характеристикой, определяющей нагрузочную способность ВЗП. При проектировании волновых передач этот момент необходимо определять, так как он может оказаться меньше номинального момента, что недопустимо. Кроме того, необходимо стремиться увеличивать предельный момент, чтобы при кратковременных перегрузках не происходил проскок генератора.

Постановка задачи. Аналитические зависимости предельного момента ВЗП от различных параметров передачи приведены в работах [2–5]. Эти зависимости получены с помощью экспериментальных исследований и не позволяют теоретически определять причины проскоков, выявлять их последствия для дальнейшей работы передачи и получать зависимости предельного момента от точности изготовления деталей ВЗП.

Целью данной работы является разработка математической модели волновой зубчатой передачи, которая позволяет определять предельный вращающий момент передачи, расчетным путем исследовать процессы, вызывающие проскок генератора волн, и получать зависимости предельного момента от различных факторов.

Математическая модель. Предельный момент ВЗП зависит от деформации ее звеньев, поэтому предлагаемая математическая модель основана на расчете упругого взаимодействия элементов ВЗП, которые испытывают пространственную деформацию.

В расчетной модели ВЗП учитываются деформации гибкого колеса 2, жесткого колеса 3, наружного кольца гибкого подшипника (НКГП) 4, тел и дорожек качения, а также де-

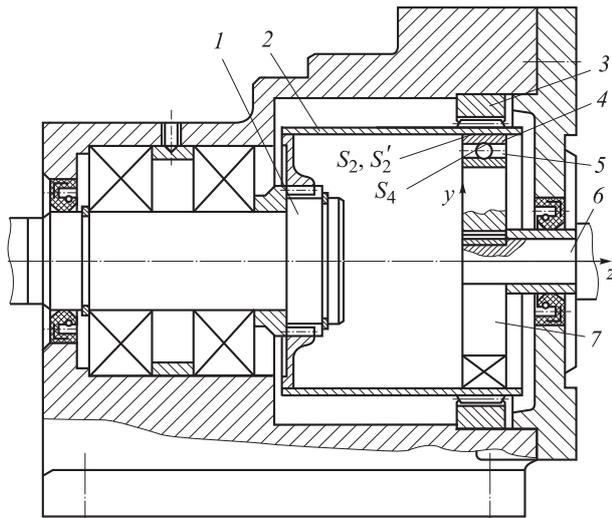


Рис. 1. Волновая зубчатая передача:

1 — вал гибкого колеса; 2 — гибкое колесо; 3 — жесткое колесо; 4 — наружное колесо гибкого подшипника; 5 — гибкий подшипник; 6 — вал кулачка; 7 — кулачок

формации вала 6 кулачка и вала 1 гибкого колеса (рис. 1).

Предлагаемая методика расчета состоит из двух этапов. На первом этапе вычисляют функции влияния упругих звеньев передачи, на втором с помощью полученных функций влияния определяют силы взаимодействия звеньев и их взаимное расположение.

Функции влияния жесткого колеса (далее оно обозначено индексом b) определяют методом конечных элементов. Для расчета используют кольцевые элементы.

В рассматриваемой волновой передаче жесткое колесо неподвижно. В предлагаемой расчетной модели обод жесткого колеса может поступательно смещаться вдоль осей x и y . Его смещение как жесткого целого определяется вектором

$$\mathbf{a}^{(1)} = (\Delta x^{(b)}, \Delta y^{(b)})^T.$$

Если жесткое колесо установлено в корпусе с натягом, то жесткость его опоры определяется выражением

$$C^{(b)} = \pi Dsk,$$

где D и s — диаметр и ширина посадочной поверхности соответственно; $k = 1, \dots, 5$ — коэффициент, большие значения которого соответствуют большим натягам и повышенной точности изготовления посадочных мест.

Функции влияния для гибкого колеса и НКГП определяются, согласно линейной теории оболочек, методом ортогональной прогон-

ки. При этом гибкое колесо (обозначено индексом g) заменяется ортотропной оболочкой с эквивалентными жесткостями в области зубчатого венца, а НКГП (обозначено индексом c) — гладкой оболочкой.

Вал гибкого колеса (см. рис. 1) может поступательно перемещаться по осям x и y . Вектор смещения гибкого колеса как жесткого целого содержит три элемента:

$$\mathbf{a}^{(2)} = (\Delta x^{(g)}, \Delta y^{(g)}, \Delta \varphi_z^{(g)})^T.$$

Здесь и далее Δx , Δy — поступательные перемещения вдоль соответствующих осей координат; $\Delta \varphi_z$ — угол поворота вокруг оси z .

Наружное кольцо гибкого подшипника не закреплено и уравновешено силами, действующими со стороны гибкого колеса и тел качения. Вектор смещения НКГП как жесткого целого содержит четыре элемента:

$$\mathbf{a}^{(3)} = (\Delta x^{(c)}, \Delta y^{(c)}, \Delta \varphi_x^{(c)}, \Delta \varphi_y^{(c)})^T.$$

При расчете учитывают только нормальные силы взаимодействия поверхностей, поэтому смещение НКГП вдоль оси z и поворот вокруг этой оси не рассматривают.

Деформация зубьев подчиняется закону Гука. Функции влияния для зубьев гибкого и жесткого колес определяют методом конечных элементов. Для расчетов используют тетраэдральные элементы первого порядка.

Вал кулачка (обозначен индексом k) может поступательно перемещаться по осям x и y . Вектор смещения кулачка как жесткого целого содержит три элемента:

$$\mathbf{a}^{(4)} = (\Delta x^{(k)}, \Delta y^{(k)}, \Delta \varphi_z^{(k)})^T.$$

Жесткость опоры кулачка $C^{(k)}$ зависит от изгибной жесткости вала и жесткости подшипников. Угол поворота $\Delta \varphi_z^{(k)}$ задается в исходных данных.

В предлагаемой математической модели применяется пространственная модель волновой передачи [6–8], в которой распределенные силы взаимодействия элементов передачи заменены поверхностными силами с кусочно-линейным распределением. Для составления разрешающей системы уравнений используется метод Бубнова — Галеркина.

Гибкое колесо может взаимодействовать с жестким колесом по рабочим и нерабочим бо-

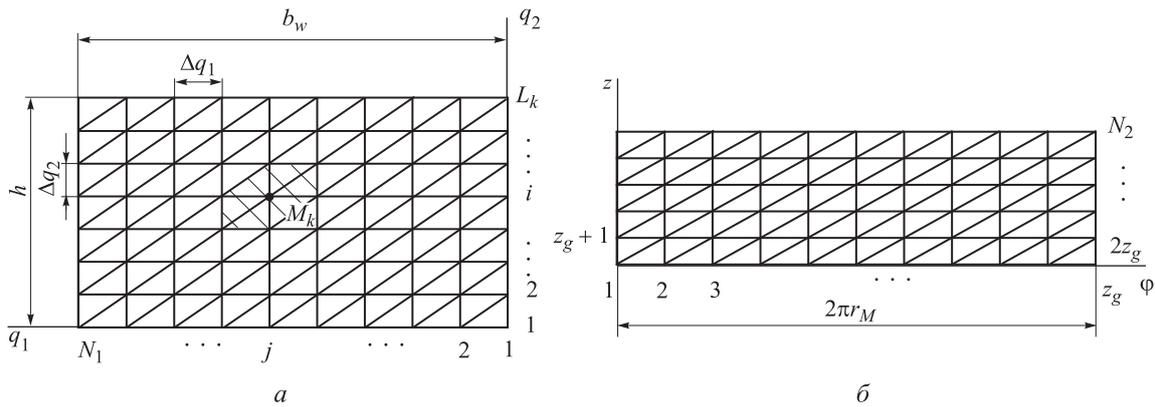


Рис. 2. Разбиение поверхностей взаимодействия S_1, S'_1 (а) и S_2, S'_2 (б)

ковым поверхностям зубьев, которые обозначаются S_1 (для жесткого колеса) и S'_1 (для гибкого колеса). Возможные поверхности соприкосновения зубьев разбиваются на треугольные области так, как показано на рис. 2, а. На этом рисунке введены следующие обозначения: h — глубина захода зубьев, b_w — ширина зубчатого венца.

При интерференции зубья гибкого и жесткого колес взаимодействуют поверхностями вершин S_3 (для жесткого колеса) и S'_3 (для гибкого колеса). Силы взаимодействия в этом случае считают сосредоточенными.

Гибкое колесо и НКГП могут взаимодействовать по поверхностям S_2 и S'_2 соответственно (см. рис. 1). Их также разбивают на треугольные области, показанные на рис. 2, б. Величина r_M на этом рисунке обозначает радиус внутренней поверхности гибкого колеса.

На дорожки качения гибкого подшипника (поверхности S_4 и S'_4) действуют сосредоточенные силы со стороны тел качения, которые являются односторонними сосредоточенными упругими связями.

Узлам разбитых поверхностей S_1, S'_1 и S_2, S'_2 ставят в соответствие финитные функции Куранта $\varphi_k(q_1, q_2)$ [9]. Для произвольного k -го узла эта функция в точке M_k равна единице, в остальных узлах она равна нулю и линейна на каждом треугольнике.

Для взаимного не проникания боковых поверхностей зубьев S_1 и S'_1 необходимо, чтобы зазор между этими поверхностями был больше или равен нулю:

$$\delta_1(M) = \delta_1^0(M) + v_1^{(b)}(M) + v_1^{(g)}(M) \geq 0.$$

Здесь $\delta_1^0(M)$ — функция зазоров (натягов) между недеформированными поверхностями S_1 и S'_1 ; $v_1^{(b)}(M), v_1^{(g)}(M)$ — функции проекций перемещений поверхностей S_1 и S'_1 на их внутренние нормали.

Условие взаимного не проникания наружных поверхностей для i -й пары зубьев гибкого и жесткого колес имеет вид:

$$\delta_{3i} = \delta_{3i}^0 + v_{3i}^{(b)} + v_{3i}^{(g)} \geq 0.$$

Здесь $\delta_{3i}, \delta_{3i}^0$ — радиальные зазоры (натяги) между поверхностями вершин (S_3 и S'_3) i -х зубьев гибкого и жесткого колес в деформированном и недеформированном состоянии соответственно; $v_{3i}^{(b)}, v_{3i}^{(g)}$ — радиальные перемещения i -х зубьев гибкого и жесткого колес. Если в i -й паре зубьев имеет место интерференция, то указанный зазор равен нулю.

Условие взаимного не проникания поверхностей S_2 и S'_2 имеет аналогичный вид:

$$\delta_2(M) = \delta_2^0(M) + v_2^{(g)}(M) + v_2^{(c)}(M) \geq 0.$$

Здесь $\delta_2^0(M)$ — функция зазоров (натягов) между недеформированными поверхностями S_2 и S'_2 ; $v_2^{(g)}(M), v_2^{(c)}(M)$ — функции проекций перемещений поверхностей S_2 и S'_2 на нормаль, проведенную к внутренней поверхности гибкого колеса.

Условие не проникания поверхностей S_4 и S'_4 в наружную поверхность j -го тела качения (обозначено индексом T) имеет вид:

$$\delta_{4j} = \delta_{4j}^0 + v_{4j}^{(c)} + v_{4j}^{(T)} \geq 0.$$

Здесь δ_{4j}^0 — зазор (натяг) между недеформированной поверхностью S_4 и j -м телом качения, касающимся внутреннего кольца гибкого под-

шипника; $v_{4j}^{(c)}, v_{4j}^{(T)}$ — сближения поверхностей S_4 и S'_4 с j -м телом качения.

Если функции перемещений выразить через функции давлений, то условия взаимного непроникания поверхностей примут вид

$$\begin{aligned} &L_{11}[p_1(M)] + L_{12}[p_2(M)] + L_{13}[P^{(3)}] = \\ &= \delta_1(M) - \delta_1^0(M), \\ &L_{21}[p_1(M)] + L_{22}[p_2(M)] + L_{23}[P^{(3)}] + \\ &+ L_{24}[P^{(4)}] = \delta_2(M) - \delta_2^0(M), \\ &L_{31}[p_1(M)] + L_{32}[p_2(M)] + L_{33}[P^{(3)}] = \delta_3 - \delta_3^0, \\ &L_{42}[p_2(M)] + L_{44}[P^{(4)}] = \delta_4 - \delta_4^0, \end{aligned} \tag{1}$$

где $p_1(M), p_2(M)$ — функции давлений на поверхностях $S_1 (S'_1)$ и $S_2 (S'_2)$ соответственно; $P^{(3)}$ — вектор сил взаимодействия гибкого и жесткого колес по наружным поверхностям при интерференции; $P^{(4)}$ — вектор сил взаимодействия тел качения с дорожками качения; $L_{11}, L_{21}, L_{31}, L_{12}, L_{22}, L_{32}, L_{13}, L_{23}, L_{33}$ — операторы, преобразующие функции давлений $p_1(M), p_2(M)$ и вектор $P^{(3)}$ в функции сближений поверхностей S_1 и S'_1, S_2 и S'_2 , а также в вектор радиальных сближений зубьев гибкого и жесткого колес (сближений поверхностей S_3 и S'_3); L_{24} — оператор, преобразующий вектор сил $P^{(4)}$ в функцию сближений поверхности S_2 и S'_2 ; L_{42}, L_{44} — операторы, преобразующие функцию давления $p_2(M)$ и вектор сил $P^{(4)}$ в суммы сближений тел качения с дорожками качения.

Для приближенного решения операторных уравнений (1) применяется метод Бубнова — Галеркина. В качестве базисных функций для поверхностей S_2 и S'_2 используют функции [7]

$$u_k(q_1, q_2) = \frac{3}{S_k} \varphi_k(q_1, q_2).$$

где S_k — площадь поверхности, на которую действует давление в виде финитной функции Куранта $\varphi_k(q_1, q_2)$; k — номер узла.

Высота зубьев в несколько десятков раз меньше ширины. Поэтому для поверхностей S_1 и S'_1 вводится базисная функция:

$$u_j^*(q_1) = \sum_{i=1}^{L_k} \chi_{ij} \frac{3}{S_{ij}} \varphi_{ij}(q_1, q_2). \tag{2}$$

Здесь $\chi_{ij} = F_{ij}/P_j$ — коэффициенты, характеризующие распределение давления по высоте зу-

ба, где F_{ij} — значение равнодействующей силы, приложенной в узле M_{ij} ; P_j — равнодействующая поперечного сечения зуба,

$$P_j = \sum_{i=1}^{L_k} F_{ij}.$$

В формуле (2) использована двумерная нумерация узлов: i — номер по высоте зуба; j — номер по ширине зуба.

Узловые точки боковой поверхности зуба для базисной функции (2) расположены вдоль оси зуба.

Базисные функции $u_k(q_1, q_2)$ и $u_j^*(q_1)$ имеют размерность m^{-2} . Функции давлений на поверхностях представляются линейными комбинациями базисных функций:

$$p_1(M) = \sum P_j^{(1)} u_j^*(q_1), \quad p_2(M) = \sum P_j^{(2)} u_j(q_1, q_2),$$

где $P_j^{(1)}, P_j^{(2)}$ — равнодействующие распределенных по поверхности узловых сил $P_j^{(1)} u_j^*(q_1), P_j^{(2)} u_j(q_1, q_2)$.

После умножения уравнений взаимного непроникания поверхностей (1) на базисные функции и добавления уравнений равновесия жесткого и гибкого колес НКПП и кулачка получена следующая разрешающая система уравнений:

$$\begin{pmatrix} \tilde{D}^{(11)} & \tilde{D}^{(12)} & \tilde{D}^{(13)} & 0 & \tilde{G}^{(11)} & \tilde{G}^{(12)} & 0 & 0 \\ \tilde{D}^{(21)} & \tilde{D}^{(22)} & \tilde{D}^{(23)} & \tilde{D}^{(24)} & 0 & \tilde{G}^{(22)} & \tilde{G}^{(23)} & 0 \\ \tilde{D}^{(31)} & \tilde{D}^{(32)} & \tilde{D}^{(33)} & 0 & \tilde{G}^{(31)} & \tilde{G}^{(32)} & 0 & 0 \\ 0 & D^{(42)} & 0 & D^{(44)} & 0 & 0 & G^{(43)} & G^{(44)} \\ \tilde{G}^{(11)T} & 0 & \tilde{G}^{(31)T} & 0 & C^b & 0 & 0 & 0 \\ \tilde{G}^{(12)T} & \tilde{G}^{(22)T} & \tilde{G}^{(32)T} & 0 & 0 & C^g & 0 & 0 \\ 0 & \tilde{G}^{(23)T} & 0 & G^{(43)T} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G^{(44)T} & 0 & 0 & 0 & C^{(k)} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} P^{(1)} \\ P^{(2)} \\ P^{(3)} \\ P^{(4)} \\ a^{(1)} \\ a^{(2)} \\ a^{(3)} \\ a^{(4)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{\delta}^{(1)} - \tilde{\delta}_0^{(1)} \\ \tilde{\delta}^{(2)} - \tilde{\delta}_0^{(2)} \\ \delta^{(3)} - \delta_0^{(3)} \\ \delta^{(4)} - \delta_0^{(4)} \\ B^{(b)} \\ B^{(g)} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{3}$$

$$\tilde{\delta}_j \geq 0, \quad P_j \geq 0, \quad \tilde{\delta}_j P_j = 0, \quad j = \overline{1, N}.$$

Здесь $\tilde{\delta} = (\tilde{\delta}^{(1)}, \tilde{\delta}^{(2)}, \delta^{(3)}, \delta^{(4)})^T$ — вектор приведенных зазоров в узловых точках между поверхностями S_1 и S'_1 , S_2 и S'_2 , S_3 и S'_3 , S_4 и телами качения соответственно; $\tilde{\delta}_0 = (\tilde{\delta}_0^{(1)}, \tilde{\delta}_0^{(2)}, \delta_0^{(3)}, \delta_0^{(4)})^T$ — вектор приведенных зазоров между недеформированными элементами передачи; $\tilde{D}^{(11)}, \tilde{D}^{(12)}, \dots, D^{(44)}$ — приведенные матрицы узловых податливостей; $\tilde{G}^{(11)}, \tilde{G}^{(12)}, \dots, G^{(44)}$ — матрицы, связывающие приращение векторов зазоров $\tilde{\delta}^{(1)}, \tilde{\delta}^{(2)}, \delta^{(3)}, \delta^{(4)}$ с векторами смещений $a^{(1)}, a^{(2)}, a^{(3)}$ и $a^{(4)}$; $P^{(1)}$ — вектор равнодействующих узловых сил взаимодействия боковых поверхностей зубьев; $P^{(2)}$ — вектор равнодействующих узловых сил взаимодействия гибкого колеса и НКГП.

Последние четыре строки системы линейных уравнений в системе (3) представляют собой уравнения равновесия жесткого колеса, гибкого колеса, НКГП и кулачка. Например, шестая строка сверху выражает три уравнения равновесия гибкого колеса: $\sum F_{kx} = 0$; $\sum F_{ky} = 0$; $\sum m_z(F_k) = M$. Здесь M — момент сопротивления, приложенный к гибкому колесу. Матрица $C^{(g)}$ и вектор $B^{(g)}$, расположенный в этой строке, имеют вид:

$$C^{(g)} = \begin{pmatrix} C^{(g)} & 0 & 0 \\ 0 & C^{(g)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B^{(g)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ M \end{pmatrix},$$

где $C^{(g)}$ — жесткость опоры гибкого колеса, учитывающая изгибную жесткость вала и жесткость подшипников.

Последние два неравенства и последнее уравнение системы (3) выражают односторонний характер взаимодействия.

Приведенные зазоры $\tilde{\delta}_i$ равны скалярному произведению функции зазоров на базисные функции. Коэффициенты приведенных матриц податливости \tilde{d}_{ij} показывают изменение приведенного зазора в i -м узле от действия в j -м узле распределенной силы, имеющей равнодействующую, равную 1 Н. Закон распределения этой силы совпадает с законом распределения базисной функции. Методика определения $\tilde{\delta}_i$, \tilde{d}_{ij} и элементов матриц $\tilde{G}^{(ij)}$ подробно описана в работах [7, 8].

Последовательность расчета по предложенной методике.

1. Задают начальные приближения коэффициентов χ_{ij} , перемещения точек гибкого и жесткого колес, величины захода зубьев гибко-

го колеса во впадины жесткого колеса. В начальном приближении предполагают, что нет интерференции зубьев.

2. Определяют начальные приведенные зазоры $\tilde{\delta}_0$.

3. Вычисляют приведенные матрицы податливости \tilde{D} .

4. Решают систему уравнений и неравенств (3) методом введения восстанавливающих сил [10]. В результате расчета определяют приведенные зазоры $\tilde{\delta}$, равнодействующие узловых сил $P^{(1)}, P^{(2)}, P^{(3)}, P^{(4)}$ и смещения тел как жестких целых $a^{(1)}, a^{(2)}, a^{(3)}, a^{(4)}$.

5. По найденным силам вычисляют перемещения точек гибкого и жесткого колес и величины заходов каждой пары зубьев.

6. Решают задачи контактного взаимодействия каждого зуба гибкого колеса с двумя соседними зубьями жесткого колеса и уточняют значения коэффициентов χ_{ij} .

7. Определяют поверхности взаимодействия зубьев гибкого и жесткого колес. Если на входе в зацепление боковой зазор между зубьями положительный, то возможными поверхностями взаимодействия этих зубьев являются боковые поверхности, в противном случае — поверхности вершин. Если на предыдущем расчетном шаге пара зубьев контактировала боковыми поверхностями, а на текущем шаге нет захода зубьев, то эта пара зубьев переводится в состояние возможного касания поверхностями вершин. Если на предыдущем шаге пара зубьев взаимодействовала поверхностями вершин, а на текущем шаге боковой зазор между рассматриваемыми зубьями больше нуля, то эта пара зубьев переводится в состояние возможного взаимодействия боковыми поверхностями.

8. Если значения сил в передаче и значения коэффициентов χ_{ij} отличаются от значений на предыдущей итерации менее чем на 0,1 %, то расчет заканчивается. В противном случае выполняют следующую итерацию, которая начинается с п. 3.

Расчеты по предложенной методике повторяют многократно, при различных положениях входного звена (кулачка). Угол поворота входного звена определяют по формуле

$$\varphi_H = (k-1)\Delta\varphi,$$

где k — номер расчета; $\Delta\varphi$ — шаг поворота входного звена. Угол φ_H изменяется от 0 до 90°. Шаг $\Delta\varphi$ принимают равным $360^\circ/(2z_g)$, где z_g — число зубьев гибкого колеса.

Если в процессе расчета пары зубьев, находящиеся в состоянии интерференции, при дальнейшем повороте кулачка не выходят из этого состояния (зубья гибкого колеса не срываются во впадину жесткого колеса), то количество пар зубьев в состоянии интерференции растет. Если все пары зубьев гибкого и жесткого колес находятся в состоянии интерференции или не взаимодействуют между собой, то выходное звено не будет поворачиваться при вращении входного звена (происходит проскок генератора). Момент, при котором начинается проскок генератора волн, считается предельным моментом ВЗП.

По предложенной методике разработан пакет прикладных программ, который позволяет расчетным путем исследовать проскок генератора в ВЗП.

Результаты исследования. Для теоретического исследования проскока генератора была выбрана ВЗП со следующими параметрами: число зубьев жесткого колеса $z_b = 172$, число зубьев гибкого колеса $z_g = 170$, коэффициенты смещения жесткого и гибкого колеса соответственно $X_b = 4,35$ и $X_g = 4,22$, модуль зацепления $t = 0,7$ мм, толщина стенки оболочки гибкого колеса $h_0 = 1,1$ мм, толщина гибкого колеса под зубчатым венцом $h_1 = 1,3$ мм, длина гибкого колеса $L = 120$ мм, ширина зубчатого венца $b = 13$ мм, количество тел качения гибкого подшипника (ГП) $n = 22$, наружный диаметр ГП $D_n = 120$ мм, ширина ГП $B = 20$ мм, начальный размер деформирования $w_0 = 0,95t$, боковой зазор в зубчатом зацеплении $j_n = 0,1t$, толщина жесткого колеса $h_b = 30$ мм, глубина захода зубьев $h_d = 1,13t$, зазор между ГП и гибким колесом 24 мкм, зазор в ГП 26 мкм. Форма кулачка соответствует форме кольца, растянутого четырьмя сосредоточенными силами ($\beta = 30^\circ$). Детали передачи соответствуют седьмому качеству точности. Номинальный момент $M_n = 400$ Н·м.

Основной причиной проскока генератора является уменьшение начального бокового зазора между вершинами зубьями на входе в зацепление при нагружении передачи, которое приводит к появлению интерференции из-за упругих перемещений звеньев [1–3]. Кроме того, при увеличении момента M на выходном валу (нагрузки) уменьшается радиальная деформация генератора волн большой оси, увеличиваются радиальная деформация жесткого

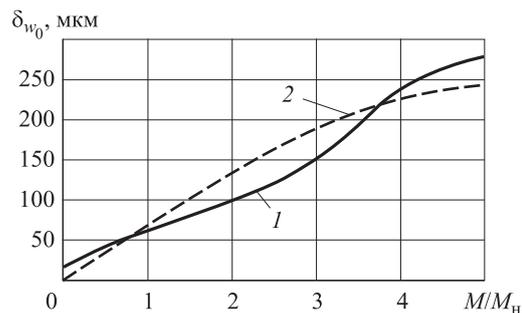


Рис. 3. Расчетная (1) и экспериментальная (2) зависимости уменьшения радиальной деформации генератора волн на большой оси от нагрузки

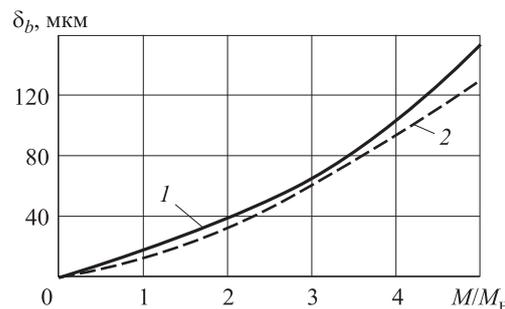


Рис. 4. Расчетная (1) и экспериментальная (2) зависимости радиальной деформации ЖК δ_b от нагрузки

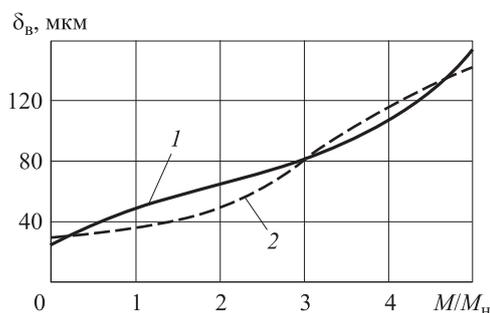


Рис. 5. Расчетная (1) и экспериментальная (2) зависимости радиального биения вала генератора δ_b от нагрузки

колеса и радиальное биение вала генератора. Для проверки адекватности предложенной математической модели расчетным путем определены указанные зависимости для рассматриваемой волновой передачи. Экспериментальные зависимости получены в работах [1–3]. Приведенные на рис. 3–5 зависимости показывают удовлетворительное совпадение результатов расчета с результатами экспериментальных исследований.

Предельный момент зависит от начального размера деформирования, длины и толщины стенки оболочки гибкого колеса, захода зубьев, ширины зубчатого венца и других параметров.

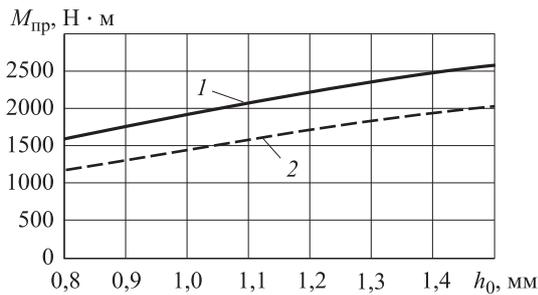


Рис. 6. Расчетная (1) и экспериментальная (2) зависимости предельного момента $M_{пр}$ от толщины стенки оболочки гибкого колеса h_0

Зависимости предельного момента от толщины h_0 стенки оболочки гибкого колеса, полученные расчетным и экспериментальным способами, показаны на рис. 6. Из них видно, что с увеличением h_0 предельный момент возрастает. Расхождение расчетной и экспериментальной кривых составляет 15...20 %. Такое расхождение можно объяснить следующими причинами. Во-первых, в предложенной математической модели ВЗП, возможно, учитываются не все параметры, влияющие на проскок генератора. Например, не учитываются погрешности изготовления и установки деталей передачи. Во-вторых, поскольку экспериментальные исследования проводились другими авторами, некоторые исходные данные, принятые при расчете, могут отличаться от параметров экспериментальной ВЗП.

Изменение радиальной деформации жесткого колеса при повороте генератора волн показано на рис. 7. Кривая 1 соответствует нагрузке, равной удвоенному значению номинального момента, кривая 2 — моменту сопротивления, близкому к предельному моменту. Приведенные зависимости получены при медленном вращении кулачка, т. е. без учета инерции звеньев передачи. На кривой 1 видно, что радиальная деформация жесткого колеса при повороте генератора волн на один угловой шаг зубьев жесткого колеса. Частота срывов равна $z_b \omega_h / (2\pi)$, где ω_h — угловая скорость генератора волн. Такое изменение деформации происходит в результате срыва зубьев гибкого колеса во впадины жесткого колеса при интерференции. Следовательно, при интерференции работа ВЗП сопровождается постоянными ударными нагрузками в момент срыва зубьев гибкого колеса с наружной поверхности жесткого колеса.

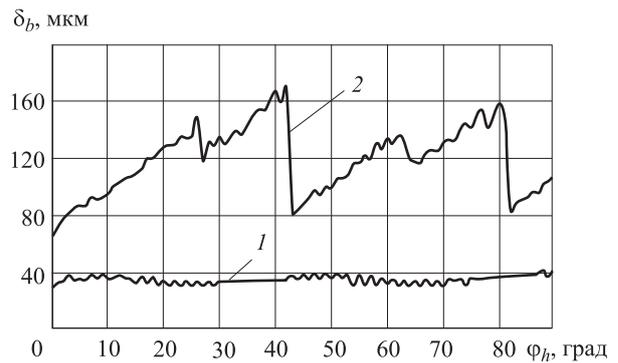


Рис. 7. Изменение радиальной деформации δ_b жесткого колеса при повороте генератора волн на угол φ_h :
1 — $M = 800$ Н·м; 2 — $M = 2100$ Н·м

При нагрузке, близкой к предельному моменту, деформация жесткого колеса также изменяется скачкообразно (см. рис. 7, кривая 2), причем эти скачки имеют два периода. Период скачков с малой амплитудой равен времени поворота генератора волн на угловой шаг жесткого колеса, период скачков с большой амплитудой — времени поворота большой оси генератора, за которое она переместится от одного тела качения ГП к ближайшему другому. Срыв с большой амплитудой происходит в момент, когда зубья, находящиеся в состоянии интерференции, расположены между телами качения ГП. Это связано с тем, что между телами качения прогиб гибкого колеса больше, чем под телами качения. Частота ударов с большой амплитудой равна $(\omega_h - \omega_{ш})N / (2\pi)$, где $\omega_{ш}$ — угловая скорость тел качения (шариков); N — число тел качения.

Выводы

1. Разработана пространственная математическая модель ВЗП, позволяющая исследовать предельный режим работы ВЗП. Проведенные вычисления показали хорошее совпадение результатов расчета с результатами экспериментальных исследований.
2. Отмечено, что расчетные значения предельного момента, полученные по предложенной методике, на 15...20 % превышают экспериментальные значения.
3. Расчетным путем показано, что при работе волновой передачи с интерференцией зубьев в волновой передаче появляются ударные нагрузки в моменты срыва зубьев гибкого колеса во впадины зубьев жесткого колеса.

4. Если момент сопротивления значительно меньше предельного момента, то частота ударов, возникающих из-за интерференции зубьев, соответствует времени поворота генератора волн на один угловой шаг жесткого колеса. Сила ударов уменьшается при расположении срываемого зуба между телами качения гибкого подшипника.

5. Сила ударов, возникающих из-за срыва зубьев, резко возрастает при значении момента на выходном валу, близком к предельному. Скачкообразные изменения деформаций звеньев ВЗП с большой амплитудой происходят в моменты, когда срываемый зуб расположен между телами качения ГП.

Литература

- [1] Приймаков О.Г. *Розрахунок та проектування силових зубчатих передач*. Харків, ХУПС ім. І. Кожедуба, 2004. 216 с.
- [2] Полетучий А.И. *Теория и конструирование высокоэффективных волновых зубчатых механизмов*. Харьков, НАКУ «ХАИ» им. М. Жуковского, 2005. 675 с.
- [3] Шувалов С.А., Полетучий А.И. Предельный крутящий момент, передаваемый волновой зубчатой передачей. *Вестник машиностроения*, 1976, № 1, с. 16–19.
- [4] Полетучий А.И., Стеценко Я.А. Оптимизация параметров волновой зубчатой передачи по предельному вращающему моменту. *Открытые информационные и компьютерные интегрированные технологии*, 2007, № 37, с. 73–79.
- [5] Полетучий А.И., Стеценко Я.А. Упругие перемещения и зазоры в волновом зубчатом редукторе. *Авиационно-космическая техника и технологии*, 2007, № 6, с. 24–32.
- [6] Люминарский С.Е., Люминарский И.Е. Исследование интерференции зубьев в нагруженной волновой зубчатой передаче. *Известия высших учебных заведений. Машиностроение*, 2015. № 4, с. 8–19.
- [7] Люминарский И.Е., Люминарский С.Е. Расчет сил взаимодействия элементов волновой зубчатой передачи. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Машиностроение*. Спец. вып. «Энергетическое и транспортное машиностроение», 2011, с. 230–240.
- [8] Люминарский С.Е., Люминарский И.Е. Математическая модель волновой зубчатой передачи с дисковым генератором волн. *Машиностроение и инженерное образование*, 2012, № 2, с. 45–52.
- [9] Марчук Г.И. *Методы вычислительной математики*. Москва, Наука, гл. ред. физ.-мат. лит., 1989, с. 122–126.
- [10] Люминарский И.Е., Люминарский С.Е. Метод расчета линейных систем, ограниченных односторонними связями, при статическом нагружении. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Машиностроение*, 2009, № 2, с. 84–90.

References

- [1] Priimakov A.G. *Raschet i proektirovanie silovykh zubchatykh peredach* [Calculation and design of power gears]. Khar'kov, KhUVS im. I. Kozheduba publ., 2004. 216 p.
- [2] Poletuchii A.I. *Teoriia i konstruirovaniye vysokoeffektivnykh volnovykh zubchatykh mekhanizmov* [Theory and design of high-performance wave gear mechanisms]. Khar'kov, NAKU «KhAI» im. M. Zhukovskogo publ., 2005. 675 p.
- [3] Shuvalov S.A., Poletuchii A.I. Predel'nyi krutiashchii moment, peredavaemyi volnovoi zubchatoi peredachei [Maximum torque transmitted wave gear]. *Vestnik mashinostroeniia* [Russian Engineering Research]. 1976, no. 1, pp. 16–19.
- [4] Poletuchii A.I., Stetsenko Ia.A. Optimizatsiia parametrov volnovoi zubchatoi peredachi po predel'nomu vrashchaiushchemu momentu [Optimization parameters of the wave gear torque limit]. *Otkrytye informatsionnye i komp'iuternye integrirovannye tekhnologii* [Public information and computer integrated technologies]. 2007, no. 37, pp. 73–79.
- [5] Poletuchii A.I., Stetsenko Ia.A. Uprugie peremeshcheniia i zazory v volnovom zubchatom reduktore [Elastic displacement and gaps in the wave gears]. *Aviatsionno-kosmicheskaiia tekhnika i tekhnologii* [Aerospace equipment and technology]. 2007, no. 6, pp. 24–32.
- [6] Liuminarskii S.E., Liuminarskii I.E. Issledovanie interferentsii zub'ev v nagruzhennoi volnovoi zubchatoi peredache [Analysis of meshing interference in a loaded harmonic

- drive]. *Izvestiia vysshikh uchebnykh zavedenii. Mashinostroenie* [Proceedings of Higher Educational Institutions. Machine Building]. 2015, no. 4, pp. 8–19.
- [7] Liuminarskii I.E., Liuminarskii S.E. Raschet sil vzaimodeistviia elementov volnvoi zubchatoi peredachi [Calculation of interaction forces elements of the wave gear]. *Vestnik MGTU im. N.E. Baumana. Ser. Mashinostroenie. Spets. vyp. «Energeticheskoe i transportnoe mashinostroenie»* [Herald of the Bauman Moscow State Technical University. Ser. Mechanical Engineering. Special iss. «Energy and transport machinery»]. 2011, pp. 230–240.
- [8] Liuminarskii S.E., Liuminarskii I.E. Matematicheskaya model' volnvoi zubchatoi peredachi s diskovym generatorom voln [Mathematical model of a harmonic drive with the disk wave generator]. *Mashinostroenie i inzhenernoe obrazovanie* [Mechanical Engineering and Engineering Education]. 2012, no. 2, pp. 45–52.
- [9] Marchuk G.I. *Metody vychislitel'noi matematiki* [Methods of computational mathematics]. Moscow, Nauka, gl. red. fiz.-mat. lit. publ., 1989, pp. 122–126.
- [10] Liuminarskii I.E., Liuminarskii S.E. Metod rascheta lineinykh sistem, ogranichennykh odnostoronnimi svyaziami, pri staticheskom nagruzhении [Method of Design of Linear Systems with Unilateral Constraints in Static Loading]. *Vestnik MGTU im. N.E. Baumana. Ser. Mashinostroenie* [Herald of the Bauman Moscow State Technical University. Ser. Mechanical Engineering]. 2009, no. 2, pp. 84–90.

Статья поступила в редакцию 09.10.2015

Информация об авторах

ЛЮМИНАРСКИЙ Игорь Евгеньевич (Москва) — доктор технических наук, профессор кафедры «Техническая механика». Московский государственный машиностроительный университет (МАМИ); кафедра «Теория механизмов и машин». МГТУ им. Н.Э. Баумана (107023, Москва, Российская Федерация, ул. Б.Семеновская, д. 38, e-mail: lie260@mail.ru).

ЛЮМИНАРСКИЙ Станислав Евгеньевич (Москва) — кандидат технических наук, доцент кафедры «Теория механизмов и машин». МГТУ им. Н.Э. Баумана (105005, Москва, Российская Федерация, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1, e-mail: katjstas@mail.ru).

Information about the authors

LYUMINARSKY Igor Evgenievich (Moscow) — Doctor of Science (Eng.), Professor, Department of Technical mechanics. Moscow state university of mechanical engineering (MAMI); Department of Theory of Mechanisms and Machines. Bauman Moscow State Technical University (115280, Moscow, Russian Federation, Bolshaya Semenovskaya St, Bldg. 38, e-mail: lie260@mail.ru).

LYUMINARSKY Stanislav Evgenievich (Moscow) — Candidate of Science (Eng.), Associate Professor, Department of Theory of Mechanisms and Machines. Bauman Moscow State Technical University (105005, Moscow, Russian Federation, 2nd Baumanskaya St., Bldg. 5, Block 1, e-mail: katjstas@mail.ru).