

Расчет и конструирование машин

УДК 539.3


Исследование упругой характеристики и напряженно-деформированного состояния стержня, нагружаемого с помощью троса

А.М. Наумов

МГТУ им. Н.Э. Баумана, 105005, Москва, Российская Федерация, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1

Study of Elastic Properties and Stress-Strain State of a Rod Loaded Using a Cable

A.M. Naumov

BMSTU, 105005, Moscow, Russian Federation, 2nd Baumanskaya St., Bldg. 5, Block 1 e-mail: nam63@mail.ru

i Пространственные и плоские стержни или элементы конструкций, сводящихся к модели стержня, имеют очень широкое применение в машиностроении, приборостроении, энергомашиностроении, в системах активной и пассивной виброзащиты и т. д. Представлена методика расчета плоского криволинейного упругого стержня, нагружаемого с помощью нерастяжимого троса, при больших перемещениях, т. е. в нелинейной постановке. Силы, действующие на стержень со стороны троса, не являются ни «мертвыми», ни следящими и могут быть отнесены к классу так называемых сил с обратной связью, модуль и направление которых зависят от линейных и угловых перемещений точек их приложения. Это осложняет постановку граничных условий в краевой задаче механики стержней. Предлагается оригинальный подход в применении метода последовательных нагружений при исследовании напряженно-деформированного состояния (НДС) как самого стержня, так и его упругой характеристики. Представлены результаты численного исследования примера нагружения стержня нерастяжимым тросом, который наглядно демонстрирует возможности предложенного алгоритма решения подобных задач. Приведенный метод численного исследования глубокого деформирования плоского стержня достаточно легко может быть распространен и на конструкции в виде пространственных стержней сколь угодно сложной геометрии.

Ключевые слова: плоский криволинейный стержень, метод последовательных нагружений, связанный базис, декартов базис, матрица преобразования, вектор состояния.

i Spatial and flat rods, or structural elements that can be reduced to the model of a rod are very widely used in engineering, instrumentation, power engineering, systems of active and passive vibration isolation, etc. This paper presents a methodology for calculating the flat curved elastic rod, loaded using an inextensible cable, with large displacements, i.e. in the nonlinear formulation. The forces acting on the rod from the cable, are neither dead nor follower, and can be classified as the so-called feedback forces, the magnitude and direction of which depend on the linear and angular displacements of points of their application. This

complicates the formulation of the boundary conditions in the problem of mechanics rods. An original approach is proposed to the application of the method of successive loadings in the study of a stress-strain state (SSS) of the rod itself as well as its elastic properties. The results of a numerical study of loading the rod by an inextensible cable are presented. They demonstrate the potentials of the proposed algorithm to solve such problems. The described method of numerical calculations of deep deformation of flat rods can be fairly easily applied to spatial rod structures of arbitrary complex geometry.

Keywords: flat curved rod, method of successive loadings, associated basis, Cartesian basis, transformation matrix, state vector.

Задача исследования НДС плоского упругого тонкого стержня при больших перемещениях относится к классу нелинейных задач механики стержней. Исследованием поведения пространственно-криволинейных и плоских стержней при больших перемещениях занимались многие ученые как в России [1–7], так и за рубежом [8–11]. Но, тем не менее, всего многообразия задач, связанных с деформированием стержневых конструкций, охватить нельзя. В данной работе рассматривается задача глубокого деформирования упругого элемента, нагружаемого нерастяжимым тросом

(аналогом служит работа спортивного лука при оттяжке тетивы).

На рис. 1 представлен исследуемый объект — криволинейный стержень в исходном (рис. 1, а) и деформированном (рис. 1, б) состоянии. Геометрические параметры системы стержень — трос: упругий элемент 1 выполнен в виде элемента дуги окружности радиуса R с центральным углом $2\varphi_0$ постоянного прямоугольного поперечного сечения $h \times b$. К центру троса 2 прикладывается внешняя сила натяжения F (см. рис. 1, б). В начальном ненагруженном состоянии (см. рис. 1, а) упругий элемент (стержень) не нагружен, вследствие этого начального натяжения троса нет, трос также считается нерастяжимым. В силу симметрии объекта исследования предлагается следующая расчетная схема (рис. 2). Рассмотрим только половину упругого элемента (в дальнейшем для удобства будем применять термин «стержень»), т. K остается неподвижной и жестко заземленной (в ней располагается начало координат декартового базиса $\{i_j\}$ ($j = 1 \dots 3$)), т. A свободна и нагружается со стороны троса постоянно меняющейся по модулю и направлению силой P , связанной с силой натяжения F (на рис. 2 показана половина внешней силы $F_1/2, F_2/2, \dots$, но в дальнейшем для удобства эту силу будем просто обозначать силами F_1, F_2, \dots , понимая под ними только половину силы натяжения). Также на рис. 2 показана оттяжка троса $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ и орты недеформированного связанного базиса $\{e_0\}$: e_{10} — направлен по касательной к осевой линии стержня, e_{20}, e_{30} — по главным центральным осям поперечного сечения стержня. В данной работе исследуются внутренние силы, моменты и деформированное состояние в стержне и определяется зависимость $\lambda(F)$.

Возьмем в качестве исходной систему нелинейных уравнений равновесия плоского стержня (под плоским стержнем будем понимать стержень, осевая линия которого остается плоской и после нагружения внешними

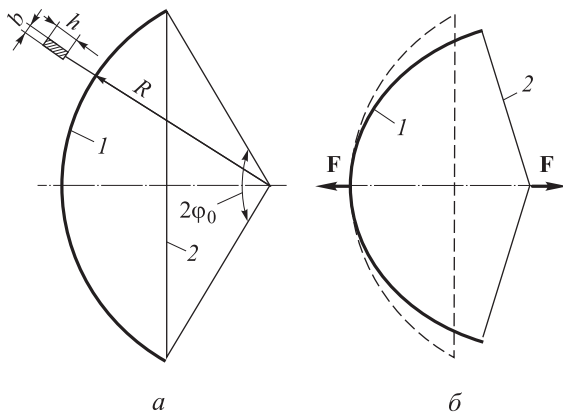


Рис. 1. Исходное (а) и деформированное (б) состояние системы стержень–трос

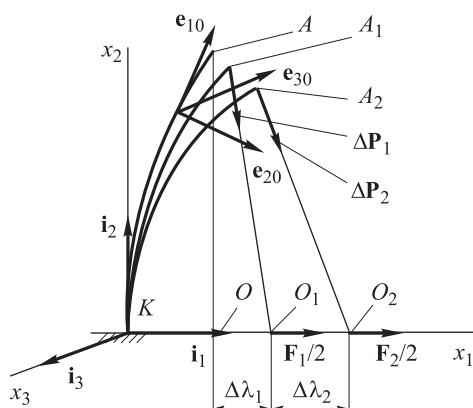


Рис. 2. Расчетная схема упругого стержня

силами) в безразмерном виде в связанных осях [1]:

$$\begin{aligned}
 \frac{dQ_1}{d\eta} - Q_2 \alpha_3 + q_1 + \sum_{i=1}^n F_1^{(i)} \delta(\eta - \eta_i) &= 0; \\
 \frac{dQ_2}{d\eta} + Q_1 \alpha_3 + q_2 + \sum_{i=1}^n F_2^{(i)} \delta(\eta - \eta_i) &= 0; \\
 \frac{dM_3}{d\eta} - Q_2 + \mu_3 + \sum_{i=1}^k T_3^{(i)} \delta(\eta - \eta_i) &= 0; \\
 \frac{d\vartheta_3}{d\eta} - \frac{1}{A_{33}} M_3 &= 0; \\
 \frac{du_1}{d\eta} - u_2 \alpha_3 + \cos \vartheta_3 - 1 &= 0; \\
 \frac{du_2}{d\eta} + u_1 \alpha_3 - \sin \vartheta_3 &= 0,
 \end{aligned} \tag{1}$$

где η — безразмерная длина стержня ($0 \leq \eta \leq 1$); $Q_1, Q_2, M_3, \vartheta_3, u_1, u_2$ — компоненты вектора состояния плоского стержня (Q_1, Q_2 — внутренние силы, направленные по ортам связанного базиса \mathbf{e}_1 и \mathbf{e}_2 ; M_3 — изгибающий момент; ϑ_3 — угол поворота и u_1, u_2 — линейные перемещения точек осевой линии стержня); α_3 — безразмерная кривизна осевой линии стержня в деформированном состоянии ($\alpha_3 = \alpha_3^p l$, где l — длина стержня). В недеформированном состоянии стержня $\alpha_{30} = l/R$. $A_{33} = 1$ — безразмерная изгибная жесткость стержня ($A_{33}^p = EI_3, I_3 = bh^3/12$); $q_1, q_2, F_1^{(i)}, F_2^{(i)}, \mu_3, T_3^{(i)}$ — внешние распределенные и сосредоточенные силы и моменты, приложенные к стержню. В нашем случае никаких внешних сил к стержню не приложено, нагрузка со стороны троса входит в краевые условия.

В данной работе предлагается решать нелинейную систему уравнений (1) с помощью приближенного метода последовательных нагружений (МПН). Идея метода состоит в последовательном нагружении стержня внешними силами, подобранными таким образом, что при каждом нагружении перемещения точек осевой линии стержня и углы поворота связанных осей являются малыми. Этот вариант численного решения нелинейных уравнений приводит при каждом дискретном увеличении нагрузки к линейным (линеаризованным) уравнениям. Для m -го нагружения стержня внешняя сила $\mathbf{F}^{(m)} = k\mathbf{F}$, где $k < 1$ определяет часть общей нагрузки на каждом шаге нагружения; m — номер шага нагружения.

Система уравнений МПН для плоского стержня выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned}
 \frac{d\Delta Q_1^{(m)}}{d\eta} - \alpha_3^{(m-1)} \Delta Q_2^{(m)} - Q_2^{(m-1)} \Delta M_3^{(m)} &= 0; \\
 \frac{d\Delta Q_2^{(m)}}{d\eta} + \alpha_3^{(m-1)} \Delta Q_1^{(m)} + Q_1^{(m-1)} \Delta M_3^{(m)} &= 0; \\
 \frac{d\Delta M_3^{(m)}}{d\eta} - \Delta Q_2^{(m)} &= 0; \\
 \frac{d\Delta \vartheta_3^{(m)}}{d\eta} - \frac{1}{A_{33}} \Delta M_3^{(m)} &= 0; \\
 \frac{d\Delta u_1^{(m)}}{d\eta} - \alpha_3^{(m-1)} \Delta u_2^{(m)} &= 0; \\
 \frac{d\Delta u_2^{(m)}}{d\eta} + \alpha_3^{(m-1)} \Delta u_1^{(m)} + \Delta \vartheta_3^{(m)} &= 0,
 \end{aligned} \tag{2}$$

где m — текущий шаг нагружения; $\alpha_3^{(m-1)}$ — кривизна,

$$\alpha_3^{(m-1)} = \alpha_{30} + \sum_{i=1}^{m-1} \Delta \alpha_3^{(i)};$$

$Q_j^{(m-1)}$ — внутренние силы, «накопленные» в стержне на предыдущих $(m - 1)$ шагах нагружения,

$$Q_j^{(m-1)} = \sum_{i=1}^{m-1} \Delta Q_j^{(i)}, \quad j = 1, 2.$$

Поставленная задача является краевой, и одним из методов сведения краевой задачи к задаче Коши (задаче с начальными условиями) является метод начальных параметров. Краевые условия задачи следующие:

1) при $\eta = 0$ (в заделке):

$$\Delta u_1^{(m)} = \Delta u_2^{(m)} = \Delta \vartheta_3^{(m)} = 0;$$

2) при $\eta = 1$ (в точке крепления троса), краевые условия будут связаны с внутренними силами Q_1, Q_2 и моментом M_3 , который всегда равен нулю. Именно в краевых условиях Q_1, Q_2 и заключается основная сложность, поскольку направление и модуль внешней силы будут меняться как по отношению к декартовым осям, так и по отношению к постоянно изменяющимся по направлению ортам \mathbf{e}_1 и \mathbf{e}_2 . Внешняя сила на конце стержня не относится ни к классу «следящих», ни к классу «мертвых». Ее условно можно отнести к классу сил с так называемой обратной связью, когда и модуль, и направление ее зависят от перемещения и угла поворота точки приложения.

Предлагается следующий подход в реализации МПН при таких краевых условиях. Поскольку внешняя сила натяжения \mathbf{F} прикладывается не к стержню, а к тросу, можно поступить следующим образом. На первом шаге

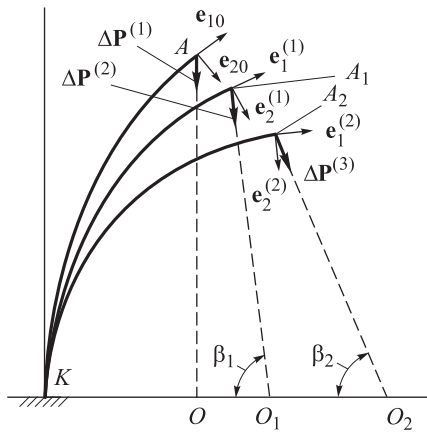


Рис. 3. Схема нагружения стержня со стороны троса (показано изменение связанного базиса $\{\mathbf{e}\}$ на конце стержня и новые положения троса)

нагружения, когда трос строго вертикален, сила со стороны троса \mathbf{P} на свободный конец стержня направлена практически строго вниз, т. е. направление ее известно. Предлагается нагружать свободный конец стержня на каждом шаге силами $\Delta \mathbf{P}^{(i)}$, которые будут связаны с силой натяжения троса $\Delta \mathbf{F}^{(i)}$. Силы $\Delta \mathbf{P}^{(i)}$ на каждом шаге нагружения будут одинаковы по модулю, но будут менять свое направление в зависимости от положения троса к данному шагу. Схема нагружения показана на рис. 3. Трос в начале первого шага нагружения занимает вертикальное положение OA , и сила $\Delta \mathbf{P}^{(1)}$ на первом шаге прикладывается, как уже было отмечено, тоже вертикально, т. е. в декартовом базисе $\Delta \mathbf{P}^{(1)} = -\Delta P^{(1)} \mathbf{i}_2$. Зная направление ортов связанного недеформированного базиса \mathbf{e}_{10} и \mathbf{e}_{20} при $\eta = 1$, легко определить проекции силы $\Delta \mathbf{P}^{(1)}$ на эти орты. Поскольку угол $\vartheta_{30}(\eta)$ между ортом \mathbf{i}_1 и \mathbf{e}_{10} равен

$$\vartheta_{30}(\eta) = \pi/2 - \varphi(\eta),$$

где $\varphi(\eta) = s/R$ (рис. 4), то матрица преобразования L^0 декартового базиса $\{\mathbf{i}\}$ к связанному $\{\mathbf{e}_0\}$ будет следующей:

$$L^0(\eta) = \begin{vmatrix} \mathbf{i}_1 & \mathbf{i}_2 \\ \mathbf{e}_{10} \cos \vartheta_{30}(\eta) & \sin \vartheta_{30}(\eta) \\ \mathbf{e}_{20} \sin \vartheta_{30}(\eta) & -\cos \vartheta_{30}(\eta) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{i}_1 & \mathbf{i}_2 \\ \mathbf{e}_{10} \sin \varphi(\eta) & \cos \varphi(\eta) \\ \mathbf{e}_{20} \cos \varphi(\eta) & -\sin \varphi(\eta) \end{vmatrix}.$$

Необходимо отметить, что внешние силы $\Delta \mathbf{P}^{(m)}$, прикладываемые на конце стержня на

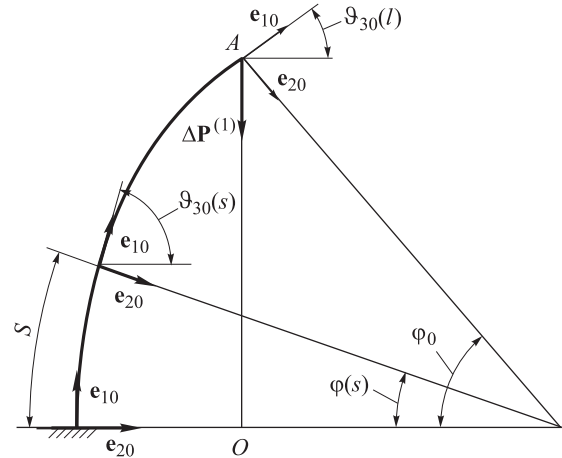


Рис. 4. Связь между центральным углом $\varphi(s)$ и углом $\vartheta_{30}(s)$ (для вывода матрицы преобразования L^0)

каждом шаге, известны в декартовом базисе $\{\mathbf{i}\}$, а решение задачи происходит в текущем связанном базисе $\{\mathbf{e}^{(m)}\}$, поэтому необходимо на каждом m -м шаге нагружения учитывать так называемое «приращение» внешней силы, связанное с изменяющимися по направлению ортами связанного базиса при переходе от $\{\mathbf{e}^{(m-1)}(1)\}$ к $\{\mathbf{e}^{(m)}(1)\}$. Это изменение происходит из-за поворота конца стержня на $\Delta \vartheta_3^{(m)}(1)$. Подробный вывод приращений сил, известных в декартовом базисе, представлен в [1]. Силы в связанном базисе на m -м шаге нагружения определяются следующим образом:

$$\begin{vmatrix} \Delta Q_1^{(m)}(1) \\ \Delta Q_2^{(m)}(1) \end{vmatrix} = L^{(m)}(1) L^0(1) \begin{vmatrix} \Delta Q_{x1}^{(m)}(1) \\ \Delta Q_{x2}^{(m)}(1) \end{vmatrix} = (L^{(m-1)}(1) L^0(1) + \Delta L^m(1) L^{(m-1)}(1) L^0(1)) \begin{vmatrix} \Delta Q_{x1}^{(m)}(1) \\ \Delta Q_{x2}^{(m)}(1) \end{vmatrix},$$

где $L^{(m)}(1)$ — матрица перехода от базиса $\{\mathbf{e}_0(1)\}$ к $\{\mathbf{e}^{(m)}(1)\}$,

$$L^{(m)}(1) = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_{10} & \mathbf{e}_{20} \\ \mathbf{e}_1^{(m)} \cos \vartheta_3^{(m)}(1) & -\sin \vartheta_3^{(m)}(1) \\ \mathbf{e}_2^{(m)} \sin \vartheta_3^{(m)}(1) & \cos \vartheta_3^{(m)}(1) \end{vmatrix},$$

$$\vartheta_3^{(m)}(1) = \sum_{i=1}^m \Delta \vartheta_3^{(i)}(1);$$

$L^{(m-1)}(1)$ — аналогичная матрица перехода от базиса $\{\mathbf{e}_0(1)\}$ к $\{\mathbf{e}^{(m-1)}(1)\}$,

$$L^{(m-1)}(1) = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_{10} & \mathbf{e}_{20} \\ \mathbf{e}_1^{(m-1)} \cos \vartheta_3^{(m-1)}(1) & -\sin \vartheta_3^{(m-1)}(1) \\ \mathbf{e}_2^{(m-1)} \sin \vartheta_3^{(m-1)}(1) & \cos \vartheta_3^{(m-1)}(1) \end{vmatrix},$$

$$\vartheta_3^{(m-1)}(1) = \sum_{i=1}^{m-1} \Delta\vartheta_3^{(i)}(1),$$

$$\Delta L^m(1) = \begin{vmatrix} 0 & \Delta\vartheta_3^{(m)}(1) \\ -\Delta\vartheta_3^{(m)}(1) & 0 \end{vmatrix}.$$

На первом шаге очевидно, что матрица $L^{(m-1)}(1)$ является единичной, и силы на конце стержня будут

$$\begin{vmatrix} \Delta Q_1^{(1)}(1) \\ \Delta Q_2^{(1)}(1) \end{vmatrix} = L^{(1)}(1)L^0(1) \begin{vmatrix} \Delta Q_{x1}^{(1)}(1) \\ \Delta Q_{x2}^{(1)}(1) \end{vmatrix} = \\ = (L^0(1) + \Delta L^1(1)L^0(1)) \begin{vmatrix} \Delta Q_{x1}^{(1)}(1) \\ \Delta Q_{x2}^{(1)}(1) \end{vmatrix},$$

или

$$\begin{vmatrix} \Delta Q_1^{(1)}(1) \\ \Delta Q_2^{(1)}(1) \end{vmatrix} = L^0(1) \begin{vmatrix} \Delta Q_{x1}^{(1)}(1) \\ \Delta Q_{x2}^{(1)}(1) \end{vmatrix} + \\ + \begin{vmatrix} 0 & \Delta\vartheta_3^{(1)}(1) \\ -\Delta\vartheta_3^{(1)}(1) & 0 \end{vmatrix} L^0(1) \begin{vmatrix} \Delta Q_{x1}^{(1)}(1) \\ \Delta Q_{x2}^{(1)}(1) \end{vmatrix}.$$

Обозначив

$$L^0(1) \begin{vmatrix} \Delta Q_{x1}^{(1)}(1) \\ \Delta Q_{x2}^{(1)}(1) \end{vmatrix} = L^0(1) \begin{vmatrix} 0 \\ -\Delta P^{(1)} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \Delta Q_{10}(1) \\ \Delta Q_{20}(1) \end{vmatrix}$$

как силы в недеформированном базисе, имеем

$$\begin{vmatrix} \Delta Q_1^{(1)}(1) \\ \Delta Q_2^{(1)}(1) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \Delta Q_{10}(1) \\ \Delta Q_{20}(1) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & \Delta\vartheta_3^{(1)}(1) \\ -\Delta\vartheta_3^{(1)}(1) & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \Delta Q_{10}(1) \\ \Delta Q_{20}(1) \end{vmatrix}.$$

Таким образом, краевые условия при $\eta = 1$ на первом шаге нагружения будут следующие:

$$Q_1 = \Delta Q_1^{(1)}(1) = \Delta Q_{10}(1) + \Delta\vartheta_3^{(1)}(1)\Delta Q_{20}(1);$$

$$Q_2 = \Delta Q_2^{(1)}(1) = \Delta Q_{20}(1) - \Delta\vartheta_3^{(1)}(1)\Delta Q_{10}(1);$$

$$M_3 = \Delta M_3^{(1)}(1) = 0.$$

Краевые условия полностью сформулированы, и осталось получить решение задачи. Метод сведения краевой задачи к задаче Коши и получения численного решения рассмотрены далее.

После первого шага имеем полную информацию о стержне, известны все компоненты вектора состояния $(\Delta Q_1^{(1)}(\eta), \Delta Q_2^{(1)}(\eta), \Delta M_3^{(1)}(\eta), \Delta u_1^{(1)}(\eta), \Delta u_2^{(1)}(\eta), \Delta\vartheta_3^{(1)}(\eta))$. После совершения первого шага трос занимает новое положение A_1O_1 (см. рис. 3). Положение точки A_1 можно найти, зная координаты исходной точки A $(x_{1A}^{(0)}, x_{2A}^{(0)})$ и перемещения ее в связанном базисе $\Delta u_1^{(1)}(1), \Delta u_2^{(1)}(1)$. С помощью матрицы перехода

L^0 находим перемещения точки A в декартовом базисе:

$$\begin{vmatrix} \Delta u_{x1}^{(1)}(1) \\ \Delta u_{x2}^{(1)}(1) \end{vmatrix} = (L^0(1))^T \begin{vmatrix} \Delta u_1^{(1)}(1) \\ \Delta u_2^{(1)}(1) \end{vmatrix}.$$

А затем находим новые координаты точки крепления троса A_1 :

$$x_{1A}^{(1)} = x_{1A}^{(0)} + \Delta u_{x1}^{(1)}, x_{2A}^{(1)} = x_{2A}^{(0)} + \Delta u_{x2}^{(1)}.$$

Учитывая, что трос нерастяжим, можно найти и координату точки O_1 , а также угол β_1 . И тогда, рассматривая равновесие троса, мы можем связать силу $\Delta P^{(1)}$ с силой натяжения на первом шаге $\Delta F^{(1)}$:

$$\Delta F^{(1)} = \Delta P^{(1)} \cos \beta_1.$$

В дальнейшем, поскольку шаг по нагрузке равномерный, считаем $\Delta P^{(1)} = \Delta P^{(2)} = \dots = \Delta P$.

Расстояние $OO_1 = \Delta\lambda^{(1)}$, т. е. равно величине оттяжки на первом шаге нагружения. Таким образом, после первого шага нагружения имеем полную информацию как о НДС стержня, так и о зависимости $\Delta\lambda^{(1)}(\Delta F^{(1)})$.

Теперь рассмотрим второй шаг нагружения. Сила $\Delta P^{(2)}$ приложена по направлению нового положения троса, найденному после первого шага:

$$\Delta P^{(2)} = \Delta P \sin \beta_1 \mathbf{i}_1 - \Delta P \cos \beta_1 \mathbf{i}_2.$$

Орты связанного базиса $\mathbf{e}_1^{(1)}$ и $\mathbf{e}_2^{(1)}$ уже не совпадают с \mathbf{e}_{10} и \mathbf{e}_{20} , их новое положение определяется с помощью матрицы перехода $L^{(1)}$ от недеформированного базиса $\{\mathbf{e}_0\}$ к деформированному $\{\mathbf{e}^{(1)}\}$:

$$L^{(1)}(\eta) = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_{10} & \mathbf{e}_{20} \\ \mathbf{e}_1^{(1)} \cos \Delta\vartheta_3^{(1)}(\eta) & \sin \Delta\vartheta_3^{(1)}(\eta) \\ \mathbf{e}_2^{(1)} -\sin \Delta\vartheta_3^{(1)}(\eta) & \cos \Delta\vartheta_3^{(1)}(\eta) \end{vmatrix}.$$

Силы на конце стержня на втором шаге будут

$$\begin{vmatrix} \Delta Q_1^{(2)}(1) \\ \Delta Q_2^{(2)}(1) \end{vmatrix} = L^{(2)}(1)L^0(1) \begin{vmatrix} \Delta Q_{x1}^{(2)}(1) \\ \Delta Q_{x2}^{(2)}(1) \end{vmatrix} = \\ = (L^{(1)}(1)L^0(1) + \Delta L^2(1)L^{(1)}(1)L^0(1)) \begin{vmatrix} \Delta Q_{x1}^{(2)}(1) \\ \Delta Q_{x2}^{(2)}(1) \end{vmatrix},$$

или

$$\begin{vmatrix} \Delta Q_1^{(2)}(1) \\ \Delta Q_2^{(2)}(1) \end{vmatrix} = L^{(1)}(1)L^0(1) \begin{vmatrix} \Delta Q_{x1}^{(2)}(1) \\ \Delta Q_{x2}^{(2)}(1) \end{vmatrix} + \\ + \Delta L^2(1)L^{(1)}(1)L^0(1) \begin{vmatrix} \Delta Q_{x1}^{(2)}(1) \\ \Delta Q_{x2}^{(2)}(1) \end{vmatrix}.$$

Обозначив

$$L^{(1)}(1)L^0(1) \begin{vmatrix} \Delta Q_{x_1}^{(2)}(1) \\ \Delta Q_{x_2}^{(2)}(1) \end{vmatrix} = L^{(1)}(1)L^0(1) \begin{vmatrix} \Delta P \sin \beta_1 \\ -\Delta P \cos \beta_1 \end{vmatrix} = \\ = \begin{vmatrix} \Delta Q_1^{(1)}(1) \\ \Delta Q_2^{(1)}(1) \end{vmatrix}$$

как силы в базисе $\{\mathbf{e}^{(1)}\}$, имеем

$$\begin{vmatrix} \Delta Q_1^{(2)}(1) \\ \Delta Q_2^{(2)}(1) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \Delta Q_1^{(1)}(1) \\ \Delta Q_2^{(1)}(1) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & \Delta \vartheta_3^{(2)}(1) \\ -\Delta \vartheta_3^{(2)}(1) & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \Delta Q_1^{(1)}(1) \\ \Delta Q_2^{(1)}(1) \end{vmatrix}.$$

Таким образом, краевые условия при $\eta = 1$ на втором шаге нагружения будут следующие:

$$Q_1 = \Delta Q_1^{(2)}(1) = \Delta Q_1^{(1)}(1) + \Delta \vartheta_3^{(2)}(1) \Delta Q_2^{(1)}(1), \\ Q_2 = \Delta Q_2^{(2)}(1) = \Delta Q_2^{(1)}(1) - \Delta \vartheta_3^{(2)}(1) \Delta Q_1^{(1)}(1), \\ M_3 = \Delta M_3^{(2)}(1) = 0.$$

После совершения второго шага имеем информацию о векторе состояния второго шага $\Delta Q_1^{(2)}$, $\Delta Q_2^{(2)}$, $\Delta M_3^{(2)}$, $\Delta u_1^{(2)}$, $\Delta u_2^{(2)}$, $\Delta \vartheta_3^{(2)}$. Также можно вычислить перемещение конца стержня и положение точки A_2 , прибавив к координатам точки A_1 новые перемещения $\Delta u_1^{(2)}(1)$ и $\Delta u_2^{(2)}(1)$:

$$\begin{vmatrix} \Delta u_{x_1}^{(2)}(1) \\ \Delta u_{x_2}^{(2)}(1) \end{vmatrix} = (L^{(1)}(1)L^0(1))^T \begin{vmatrix} \Delta u_1^{(2)}(1) \\ \Delta u_2^{(2)}(1) \end{vmatrix}.$$

Аналогично можно найти положение точки O_2 , угол β_2 , приращение оттяжки $\Delta \lambda^{(2)}$ и приращение силы натяжения $\Delta F^{(2)} = \Delta P \cos \beta_2$.

После второго шага нагружения полные внутренние силы, момент и угол равны:

$$Q_i^{(2)}(\eta) = \Delta Q_i^{(1)}(\eta) + \Delta Q_i^{(2)}(\eta), \quad i = 1, 2; \\ M_3^{(2)}(\eta) = \Delta M_3^{(1)}(\eta) + \Delta M_3^{(2)}(\eta); \\ \vartheta_3^{(2)}(\eta) = \Delta \vartheta_3^{(1)}(\eta) + \Delta \vartheta_3^{(2)}(\eta).$$

Сила натяжения и величина оттяжки равны:

$$F^{(2)} = \Delta F^{(1)} + \Delta F^{(2)}, \quad \lambda^{(2)} = \Delta \lambda^{(1)} + \Delta \lambda^{(2)}.$$

Несколько сложнее дело обстоит с линейными перемещениями точек осевой линии стержня. Перемещения можно суммировать только в неизменном базисе $\{\mathbf{i}\}$:

$$u_{xi}^{(2)}(\eta) = \Delta u_{xi}^{(1)}(\eta) + \Delta u_{xi}^{(2)}(\eta), \quad i = 1, 2.$$

Изложенный алгоритм продолжается на протяжении необходимого, заранее заданного, числа шагов нагружения n , и на каждом текущем шаге m находят новое положение связанного базиса $\{\mathbf{e}^{(m)}\}$, новое положение точек A_m

и O_m , силы и момент на конце стержня, входящие в граничные условия:

$$Q_1 = \Delta Q_1^{(m)}(1) = \Delta Q_1^{(m-1)}(1) + \Delta \vartheta_3^{(m)}(1) \Delta Q_2^{(m-1)}(1); \\ Q_2 = \Delta Q_2^{(m)}(1) = \Delta Q_2^{(m-1)}(1) - \Delta \vartheta_3^{(m)}(1) \Delta Q_1^{(m-1)}(1); \quad (3) \\ M_3 = \Delta M_3^{(m)}(1) = 0.$$

Также находят $\Delta F^{(m)}$ и $\Delta \lambda^{(m)}$. В итоге на текущем шаге m определяются полная сила

$$F^{(m)} = \sum_{i=1}^m \Delta F^{(i)}$$

и величина оттяжки

$$\lambda^{(m)} = \sum_{i=1}^m \Delta \lambda^{(i)},$$

по значениям которых и строится график зависимости $\lambda^{(m)}(F^{(m)})$, т. е. упругая характеристика стержня.

Теперь необходимо остановиться на непосредственном решении системы (2). Запишем ее в виде одного векторно-матричного уравнения:

$$\frac{d\mathbf{Y}^{(m)}(\eta)}{d\eta} + A(\eta)\mathbf{Y}^{(m)}(\eta) = 0, \quad (4)$$

где $\mathbf{Y}^{(m)}(\eta) = (\Delta Q_1^{(m)}, \Delta Q_2^{(m)}, \Delta M_3^{(m)}, \Delta u_1^{(m)}, \Delta u_2^{(m)}, \Delta \vartheta_3^{(m)})$ — вектор состояния системы.

Решение уравнения (4) запишем в виде:

$$\mathbf{Y}^{(m)}(\eta) = K^{(m)}(\eta)\mathbf{C}^{(m)}, \quad (5)$$

где $K^{(m)}(\eta)$ — фундаментальная матрица решений на m -м шаге нагружения, $\mathbf{C}^{(m)}$ — вектор постоянных на этом же шаге. Для получения матрицы $K^{(m)}(\eta)$ достаточно проинтегрировать однородную систему уравнений (4) шесть раз со следующими начальными условиями:

$$\mathbf{Y}_1^{(m)}(0) = \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}, \quad \mathbf{Y}_2^{(m)}(0) = \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}, \quad \dots, \quad \mathbf{Y}_6^{(m)}(0) = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix}. \quad (6)$$

И каждое решение $\mathbf{Y}_i^{(m)}(\eta)$ будет i -м столбцом матрицы $K^{(m)}(\eta)$. Из граничных условий при $\eta = 0$ (в заделке) ($\Delta u_1^{(m)} = \Delta u_2^{(m)} = \Delta \vartheta_3^{(m)} = 0$) имеем $c_4^{(m)} = c_5^{(m)} = c_6^{(m)} = 0$. Относительно оставшихся трех компонент вектора $\mathbf{C}^{(m)}$ получим три алгебраических уравнения из условий при $\eta = 1$ (3):

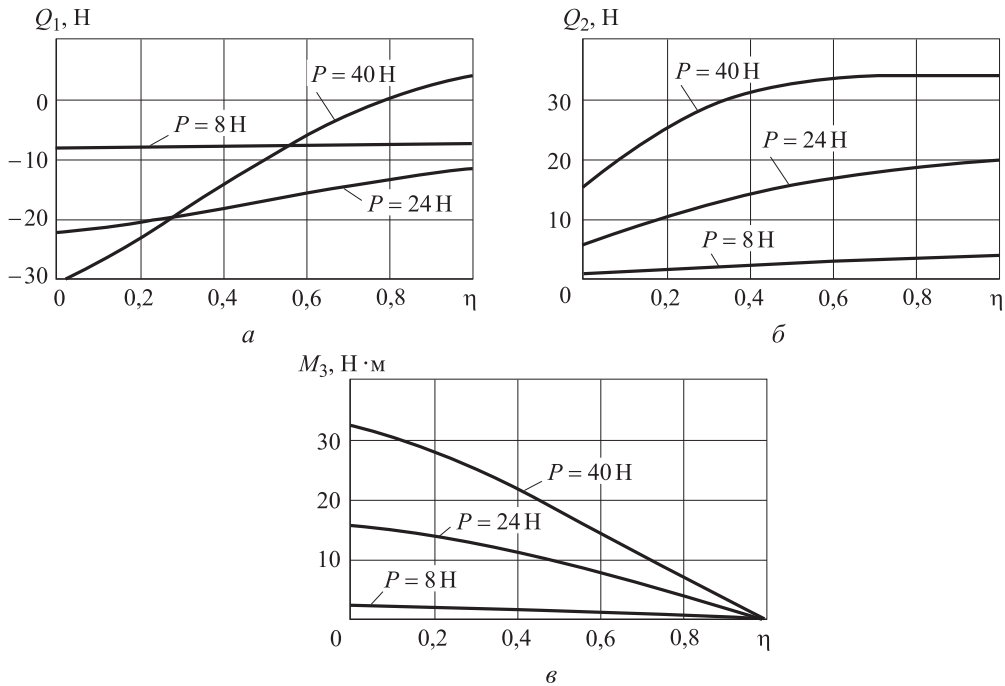


Рис. 5. Графики изменения внутренней силы Q_1 (а), Q_2 (б) и внутреннего момента M_3 (в) по длине стержня для трех значений внешней силы

$$\begin{cases}
 (k_{11}^{(m)}(1) - k_{41}^{(m)}(1)\Delta Q_2^{(m-1)})c_1^{(m)} + (k_{12}^{(m)}(1) - \\
 - k_{42}^{(m)}(1)\Delta Q_2^{(m-1)})c_2^{(m)} + (k_{13}^{(m)}(1) - \\
 - k_{43}^{(m)}(1)\Delta Q_2^{(m-1)})c_3^{(m)} = \Delta Q_1^{(m-1)}; \\
 (k_{21}^{(m)}(1) + k_{41}^{(m)}(1)\Delta Q_1^{(m-1)})c_1^{(m)} + (k_{22}^{(m)}(1) + \\
 + k_{42}^{(m)}(1)\Delta Q_1^{(m-1)})c_2^{(m)} + (k_{23}^{(m)}(1) + \\
 + k_{43}^{(m)}(1)\Delta Q_1^{(m-1)})c_3^{(m)} = \Delta Q_2^{(m-1)}; \\
 k_{31}^{(m)}(1)c_1^{(m)} + k_{32}^{(m)}(1)c_2^{(m)} + k_{33}^{(m)}(1)c_3^{(m)} = 0,
 \end{cases} \quad (7)$$

где $k_{ij}^{(m)}(1)$ — компоненты матрицы $K^{(m)}(1)$.

Из системы (7) находим оставшиеся три константы $c_1^{(m)}, c_2^{(m)}, c_3^{(m)}$ и можем полностью

сформировать решение $Y^{(m)}(\eta)$ на текущем m -м шаге по формуле (5).

Этот алгоритм повторяется заранее намеченное число n шагов нагружения. В итоге имеем НДС стержня:

$$\begin{cases}
 Q_i^{(n)}(\eta) = \sum_{j=1}^n \Delta Q_i^{(j)}(\eta); \\
 M_3^{(n)}(\eta) = \sum_{j=1}^n \Delta M_3^{(j)}(\eta); \\
 \vartheta_3^{(n)}(\eta) = \sum_{j=1}^n \Delta \vartheta_3^{(j)}(\eta); \\
 u_{xi}^{(n)}(\eta) = \sum_{j=1}^n \Delta u_{xi}^{(j)}(\eta), \quad i = 1, 2,
 \end{cases} \quad (8)$$

и упругую характеристику $\lambda(F)$.

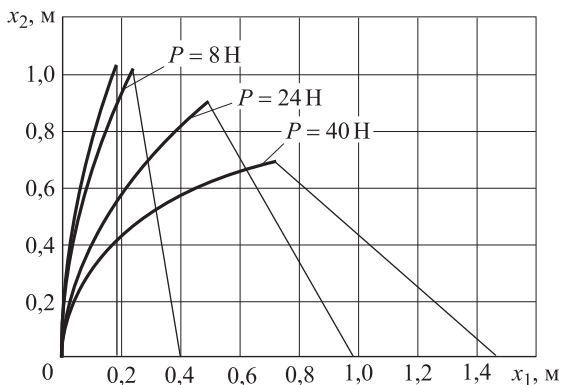


Рис. 6. Деформированные состояния стержня по ходу нагружения (вместе с новыми положениями троса), для трех значений внешней силы

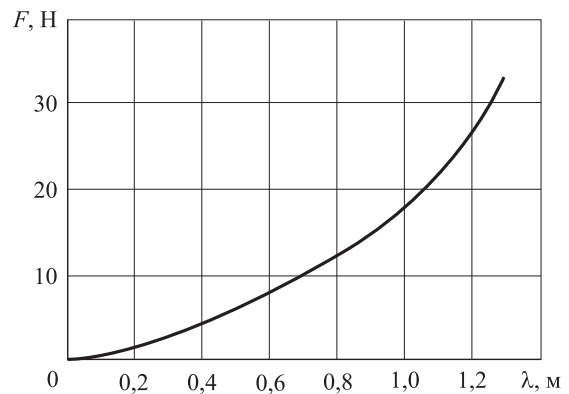


Рис. 7. Упругая характеристика $\lambda(F)$

По найденным перемещениям $u_{xi}^{(n)}(\eta)$ можно построить деформированное состояние стержня. А зная внутренние силовые факторы, можно определить и максимальное напряжение в стержне для оценки его прочности.

В качестве примера рассматривается упругий стержень со следующими параметрами: $R = 3$ м, $\varphi_0 = 20^\circ$, $b = 20$ мм, $h = 4$ мм, $E = 2 \cdot 10^5$ МПа, $P = 40$ Н.

На рис. 5, а, б представлены графики изменения внутренних сил Q_1 и Q_2 по длине упругого элемента, на рис. 5, в — графики момента M_3 , на рис. 6 приведены деформированные состояния упругого элемента по ходу нагружения (вместе с новыми положениями троса), а на рис. 7 — упругая характеристика $\lambda(F)$. Все графики представлены для трех значений внешней силы $P = 8, 24$ и 40 Н. Необходимо добавить, что для определения полной силы натяжения троса силу F необходимо удвоить.

Выводы

Предложенный алгоритм решения задач механики стержней при больших перемещениях является приближенным, но точность, по мнению автора, вполне приемлемой для инженерной практики. Достоинство данного метода — достаточно простая его алгоритмизация для численного расчета, в отличие от решения подобных задач методом «пристрелки», а также методами продолжения по параметру. Также необходимо отметить, что легко могут варьироваться геометрия (как в плане осевой линии, так и в плане переменности жесткости по длине) и свойства материала стержня. Приведенный алгоритм численного исследования глубокого деформирования плоского стержня достаточно легко может быть адаптирован и для решения задач статического нагружения конструкций в виде пространственно-криволинейных стержней сколь угодно сложной геометрии.

Литература

- [1] Светлицкий В.А. Строительная механика машин. Механика стержней: в 2 т. Т. 1. Статика. Москва, Физматлит, 2009. 408 с.
- [2] Левин В.Е., Пустовой Н.В. Механика деформирования криволинейных стержней. Новосибирск, Изд-во НГТУ, 2008. 208 с.
- [3] Попов Е.П. Теория и расчет гибких упругих стержней. Москва, Наука, 1986. 296 с.
- [4] Пустовой Н.В., Левин В.Е., Красноруцкий Д.А. Применение геометрически нелинейных уравнений стержня к расчету статике и динамики тросов. Часть 2. Научный Вестник Новосибирского государственного технического университета, 2012, № 2, с. 106–116.
- [5] Красноруцкий Д.А. Развитие модели тонкого упругого стержня для расчета изгибно-крутильных колебаний авиационных лопастей. Труды 13 Всероссийской научно-технической конференции. Наука. Промышленность. Оборона, Новосибирск, Новосибирский государственный технический университет, 2012, с. 328–332.
- [6] Сорокин Ф.Д. Прямое тензорное представление уравнений больших перемещений гибкого стержня с использованием вектора конечного поворота. Известия РАН. МТТ, 1994, № 1, с. 164–168.
- [7] Соколов А.И., Наумов А.М. Определение напряженно-деформированного состояния жестких проводов, находящихся в потоке воздуха. Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Машиностроение, 2008, № 2, с. 11–21.
- [8] Кирхгоф Г. Механика. Москва, Изд-во АН СССР, 1962. 402 с.
- [9] Du H., Xiong W., Wang H., Wang Z., Yuan B. Nonlinear dynamic deformation simulation for helical rod like objects. Engineering Review, 2013, vol. 33, iss. 3, pp. 233–238.
- [10] Rashidinia J. Finite difference methods for a class of two-point boundary value problems. IUST International Journal of Engineering Science, 2008, vol. 19, no. 5–2, pp. 67–72.
- [11] Dinkar Sharma, Ram Jiwari, Sheo Kumar. Numerical Solution of Two Point Boundary Value Problems Using Galerkin-Finite Element Method. International Journal of Nonlinear Science, 2012, vol. 13, no. 2, pp. 204–210.

References

- [1] Svetlitskii V.A. *Stroitel'naiia mekhanika mashin. Mekhanika sterzhnei: v 2 t. T. 1. Statika* [Structural Mechanics machines. Mechanics bars. In 2 vol. Vol. 1. Static]. Moscow, Fizmatlit publ., 2009. 408 p.
- [2] Levin V.E., Pustovoi N.V. *Mekhanika deformirovaniia krivolineinykh sterzhnei* [Mechanics of deformation of curved rods]. Novosibirsk, NSTU publ., 2008. 208 p.
- [3] Popov E.P. *Teoriia i raschet gibkikh uprugikh sterzhnei* [Theory and Design of flexible elastic rods]. Moscow, Nauka publ., 1986. 296 p.
- [4] Pustovoi N.V., Levin V.E., Krasnorutskii D.A. *Primenenie geometricheski nelineinykh uravnenii sterzhnia k raschetu statiki i dinamiki trosov. Chast' 2* [Applying of geometrically nonlinear equations of a rod to calculate statics and dynamics of cables. Part 2]. *Nauchnyi Vestnik Novosibirskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta* [Scientific Herald of the Novosibirsk State Technical University]. 2012, no. 2, pp. 106–116.
- [5] Krasnorutskii D.A. *Razvitie modeli tonkogo uprugogo sterzhnia dlia rascheta izgibno-krutil'nykh kolebaniia aviatsionnykh lopastei* [Development of a thin elastic rod model for the calculation of flexural-torsional vibration of air blades]. *Trudy 13 Vserossiiskoi nauchno-tekhnicheskoi konferentsii. Nauka. Promyshlennost'. Oborona* [Proceedings of the 13th All-Russian Scientific and Technical Conference. Science. Industry. Defense]. Novosibirsk, NSTU publ., 2012, pp. 328–332.
- [6] Sorokin F.D. *Priamoe tenzornoe predstavlenie uravnenii bol'shikh peremeshchenii gibkogo sterzhnia s ispol'zovaniem vektora konechnogo povorota* [Direct representation of the tensor equations of large displacement of the flexible rod using a vector of the final turn]. *Izvestiia RAN. MTT* [Mechanics of Solids]. 1994, no. 1, pp. 164–168.
- [7] Sokolov A.I., Naumov A.M. *Opreделение napriazhenno-deformirovannogo sostoianiia zhestkikh provodov, nakhodiashchikhsia v potoke vozdukha* [Determination of Stress and Strain State of Rigid Wires in Air Flow]. *Vestnik MGTU im. N.E. Baumana. Ser. Mashinostroenie* [Herald of the Bauman Moscow State Technical University. Mechanical Engineering]. 2008, no. 2, pp. 11–21.
- [8] Kirkhgof G. *Mekhanika* [Mechanics]. Moscow, AN SSSR publ., 1962. 402 p.
- [9] Du H., Xiong W., Wang H., Wang Z., Yuan B. *Nonlinear dynamic deformation simulation for helical rod like objects*. *Engineering Review*, 2013, vol. 33, iss. 3, pp. 233–238.
- [10] Rashidinia J. *Finite difference methods for a class of two-point boundary value problems*. *IUST International Journal of Engineering Science*, 2008, vol. 19, no. 5–2, pp. 67–72.
- [11] Dinkar Sharma, Ram Jiwari, Sheo Kumar. *Numerical Solution of Two Point Boundary Value Problems Using Galerkin-Finite Element Method*. *International Journal of Nonlinear Science*, 2012, vol. 13, no. 2, pp. 204–210.

Статья поступила в редакцию 25.05.2015

Информация об авторе

НАУМОВ Андрей Михайлович (Москва) — кандидат технических наук, доцент кафедры «Прикладная механика». МГТУ им. Н.Э. Баумана (105005, Москва, Российская Федерация, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1, e-mail: nam63@mail.ru).

Information about the author

NAUMOV Andrey Mikhailovich (Moscow) — Candidate of Science (Eng.), Associate Professor, Department of Applied Mechanics. Bauman Moscow State Technical University (105005, Moscow, Russian Federation, 2nd Baumanskaya St., Bldg. 5, Block 1, e-mail: nam63@mail.ru).