


Расчет и конструирование машин

УДК 621.8

Обобщение метода Виллиса на рычажные механизмы высоких классов

Г.А. Тимофеев¹, Е.Г. Мор², Н.Н. Барбашов¹¹ МГТУ им. Н.Э. Баумана, 105005, Москва, Российская Федерация, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1² Тель-авивский университет, 69978, Тель-Авив, Израиль, P.O. Box 39040

Generalization of Willis method for lever mechanism of high classes

G.A. Timofeev¹, E.G. Mor², N.N. Barbashov¹¹ BMSTU, 105005, Moscow, Russian Federation, 2nd Baumanskaya St., Bldg. 5, Block 1² Tel Aviv University, 69978, Tel Aviv, Israel, P.O. Box 39040 e-mail: timga@bmstu.ru, mor1589@inter.net.il

i Сложной задачей расчета рычажных механизмов является задача определения кинематических передаточных функций. В настоящее время детально разработаны методы кинематического анализа особенно распространенных рычажных механизмов II класса. Однако существуют и более сложные механизмы, представляющие интерес для разработчиков новой техники. Поэтому разработка методов кинематического анализа механизмов высоких классов также является важной задачей. Кинематика механизмов высоких классов описывается системами нелинейных уравнений, имеющих, как правило, не менее двух вариантов решений (по количеству возможных сборок механизма). Решение таких систем требует значительных затрат вычислительных ресурсов. Предложен способ решения задач кинематики, основанный на искусственном понижении класса сложных механизмов с использованием метода инверсии (метод Виллиса), который позволит разработчикам упростить кинематический анализ механизмов высоких классов с единых позиций.

Ключевые слова: рычажные механизмы, группы Ассура, кинематические характеристики, задача кинематики.

i Determination of kinematic transfer functions is considered the most complex problem of lever mechanism calculations. Methods of kinematic analysis of the most commonly used lever mechanism of Class II have already been developed in detail. However, there also exist more complex mechanisms that generate interest of design engineers of new machines, hence, the development of methods for kinematic analysis of high class mechanisms is also an important task. The kinematics of high class mechanisms is described by sets of non-linear equations that usually have at least two solutions (based on the number of possible mechanism assemblies). Solving such sets of equations requires considerable computational power. A method of solving kinematic problems based on the artificial lowering of the class of complex mechanisms using the method of inversion (Willis method) is proposed. It allows the developers to simplify kinematic analysis of high class mechanisms from unified positions.

Keywords: lever mechanisms, mechanisms of Class II, kinematic problem.

Алгоритм кинематического анализа сложных рычажных механизмов, как правило, строят в последовательности наслаиваемых групп Ассура — нулевых цепей, не разлагаемых на более простые [1–4].

Простейшие группы Ассура (диады) известны всего в пяти сочетаниях вращательных R (rotation) и призматических P (prismatic) кинематических пар, поэтому диадные механизмы легко поддаются алгоритмизации [5].

Трудности возникают при исследовании механизмов высоких классов, включающих триады (III класс), тетрады (IV класс), а также развитые (разветвленные) группы Ассура [6–8]. Так, триада как система базового звена с тремя поводками может быть представлена более чем 20 комбинациями R и P ее шести кинематических пар, и каждая из них требует отдельного изучения с включением в общий алгоритм исследования. Если же рассматривать базовое звено триады как замкнутую цепь из трех звеньев, то число сочетаний R и P измеряется сотнями.

Цель работы — искусственное понижение класса сложной механической системы для последующего определения ее кинематических характеристик.

Известны частные решения подобной задачи. Например, механизм с триадой, у которой два ведомых поводка 4 и 5 (рис. 1) связаны со стойкой, рассматривают в качестве механизма с двумя диадами, в котором один из этих поводков 5 условно назначен первичным звеном.

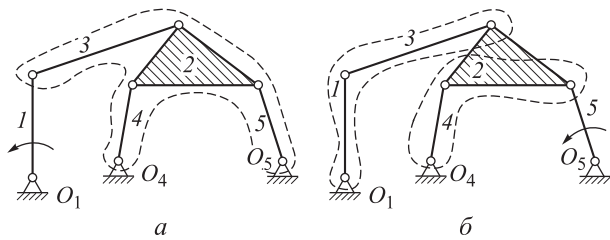


Рис. 1. Схема понижения класса шестизвенного механизма путем замены первичного звена:
а — механизм III класса при первичном звене 1;
б — механизм II класса при первичном звене 5;
1–5 — звенья

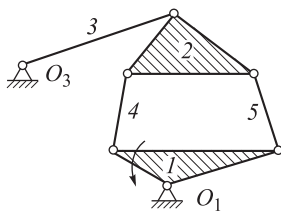


Рис. 2. Схема шестизвенного механизма III класса (при первичном звене 1) с двумя сложноподвижными поводками 4 и 5

При этом сохраняются все относительные скорости звеньев и построение плана скоростей или определение кинематических передаточных функций не вызывает затруднений. Авторами разработан графический метод по определению ускорений в подобных случаях условной замены входного звена.

Однако в иных случаях, когда, например, поводки 4 и 5 связаны с подвижными звеньями (рис. 2), разложение на диады невозможно.

Идея предлагаемого метода, впервые выдвигнутая в работе [9], состоит в инверсии (обращении) механизма с условной заменой монады — входного звена со стойкой.

Кинематическая цепь с двумя степенями свободы, состоящая из шести взаимно подвижных звеньев, изображена на рис. 3, а. Назовем ее рычажным дифференциалом. В зависимости от остановки определенного звена и назначения другого звена в качестве первичного получаем механизмы различных классов и видов. При этом относительные мгновенные центры вращений становятся вполне определенными абсолютными мгновенными центрами вращений (МЦВ).

Рассмотрим механизм, разбираемый на диады. Для его получения следует остановить звено, совершающее сложное движение. Так, при остановке звена 6 (рис. 3, б) и назначении, например, звена 5 в качестве первичного нужный нам механизм будет состоять из монады 6,5 и двух диад 1,4 и 2,3 в последовательности

$$6,5 \leftarrow 1,4 \leftarrow 2,3. \quad (1)$$

В соответствии с методом Виллиса будем рассматривать движение системы по отноше-

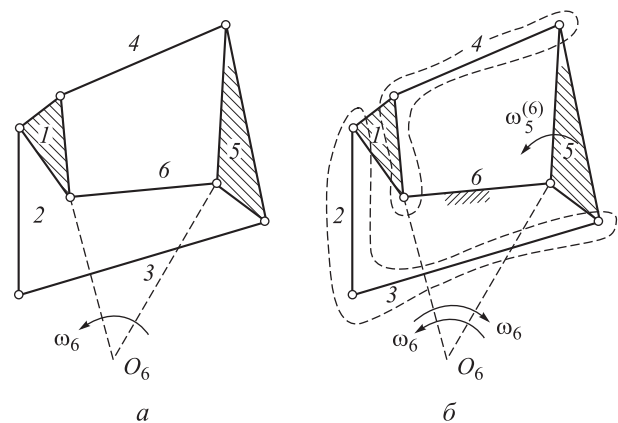


Рис. 3. Схема инверсного рычажного дифференциала:

а — система с двумя степенями свободы (O_6 — МЦВ звена 6 при определенном неподвижном звене);
б — обращенный механизм с условной стойкой 6;
1–6 — звенья

нию к условной стойке s . В нашем случае $s = 6$ и звенья механизма имеют следующие угловые скорости:

$$\begin{aligned} \omega_1^{(6)} &= \omega_1 - \omega_6; \quad \omega_2^{(6)} = \omega_2 - \omega_6; \quad \omega_3^{(6)} = \omega_3 - \omega_6; \\ \omega_4^{(6)} &= \omega_4 - \omega_6; \quad \omega_5^{(6)} = \omega_5 - \omega_6. \end{aligned} \quad (2)$$

Обозначим i_{p-q} действительную передаточную функцию от звена p к звену q :

$$i_{p-q} = \omega_p / \omega_q, \quad (3)$$

а передаточную функцию от звена p к звену q в обращенном механизме

$$i_{p-q}^{(s)} = \omega_p^{(s)} / \omega_q^{(s)}. \quad (4)$$

Последняя определяется геометрией двух последовательных диад и всегда может быть определена заранее как для механизма II класса. В нашем случае это диады 1, 4 и 2, 3 (оба вида RRR) при условно входном звене $p = 5$ и условной стойке $s = 6$ (см. рис. 3, б).

Пусть в качестве выходного звена обращенного механизма фигурирует звено $q = 3$. Установим одним из известных приемов передаточную функцию от входного звена к выходному:

$$i_{5-3}^{(6)} = \omega_5^{(6)} / \omega_3^{(6)}. \quad (5)$$

Подставим в (5) выражения $\omega_5^{(6)}$ и $\omega_3^{(6)}$ из (2):

$$i_{5-3}^{(6)} = \frac{\omega_5 - \omega_6}{\omega_3 - \omega_6},$$

и преобразуем это равенство в строку:

$$\omega_5 - (1 - i_{5-3}^{(6)})\omega_6 - i_{5-3}^{(6)}\omega_3 = 0. \quad (6)$$

Уравнение (6) описывает связь между действительными угловыми скоростями ω_5 , ω_3 и ω_6 трех произвольно выбранных звеньев 5, 3 и 6 рычажного дифференциала-шестизвенника с двумя степенями свободы (см. рис. 3, б). Оно обобщает известное уравнение Виллиса, относящееся к механизмам, составленным из круглых колес. Обобщение состоит в том, что передаточная функция $i_{5-3}^{(6)}$, как следует из самого ее названия, не постоянна, а зависит от углового положения φ_5 входного звена 5; угол φ_5 определяет также положение мгновенной оси вращения O_6 звена 6.

Пример. Используя уравнение (6), найдем передаточную функцию i_{5-6} в механизме IV класса, в котором стойкой служит звено 3 (рис. 4, а), т. е. когда $\omega_3 = 0$:

$$i_{5-6} = \omega_5 / \omega_6 = 1 - i_{5-3}^{(6)}. \quad (7)$$

Здесь $i_{5-3}^{(6)} = \omega_5^{(6)} / \omega_3^{(6)}$ — передаточное отношение от звена 5 к звену 3 в обращенном механизме (см. рис. 3, б) II класса.

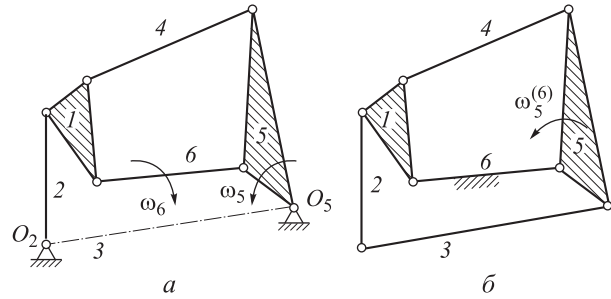


Рис. 4. Схема определения угловой скорости сложно-подвижного звена б:

а — действительный механизм; б — обращенный механизм с условной стойкой б; 1–6 — звенья

Искомая угловая скорость сложноподвижного звена б рассчитывается по формуле

$$\omega_6 = \omega_5 / i_{5-6} = \omega_5 / (1 - i_{5-3}^{(6)}). \quad (8)$$

Уравнение (6) можно представить символьно для произвольной тройки подвижных звеньев p , q , s рычажного дифференциала, в котором звено s совершает сложное движение:

$$\omega_p - (1 - i_{p-q}^{(s)})\omega_s - i_{p-q}^{(s)}\omega_q = 0. \quad (9)$$

Символом p удобно обозначать входное звено in (input link) реального механизма с одной степенью свободы, а символом q — его стойку, т. е.

$$\omega_p = \omega_{in}; \quad \omega_q = 0, \quad (10)$$

тогда расчетная формула передаточного отношения от входного звена in к определенному звену s , совершающему сложное движение, примет вид (7)

$$i_{in-s} = \omega_{in} / \omega_s = 1 - i_{in-q}^{(s)}, \quad (11)$$

а угловая скорость звена s

$$\omega_s = \frac{\omega_{in}}{1 - i_{in-q}^{(s)}}. \quad (12)$$

Для того чтобы скоростная картина исследуемого механизма была полной, необходимо:

определить остальные передаточные функции $i_{in-out}^{(s)} = \omega_{in}^{(s)} / \omega_{out}^{(s)}$ обращенного механизма, где индекс out обозначает произвольное выходное звено;

для каждой из них записать выражение

$$i_{in-out}^{(s)} = \frac{\omega_{in} - \omega_s}{\omega_{out} - \omega_s}; \quad (13)$$

подставить в (13) найденную из (12) скорость звена s ;

из полученного равенства выразить значение ω_{out} .

Пример. По условиям предыдущего примера найти угловую скорость ω_2 выходного звена 2.

Определим передаточную функцию обращенного механизма

$$i_{5-2}^{(6)} = \omega_5^{(6)} / \omega_2^{(6)} \quad (14)$$

и раскроем правую часть в соответствии с (2):

$$i_{5-2}^{(6)} = \frac{\omega_5 - \omega_6}{\omega_2 - \omega_6}. \quad (15)$$

Подставим в (15) значение ω_6 , рассчитанное по формуле (8).

После ряда преобразований найдем действительную передаточную функцию от входного звена 5 к выходному звену 2:

$$i_{5-2} = \frac{1 - i_{5-3}^{(6)}}{1 - i_{5-3}^{(6)} / i_{5-2}^{(6)}}. \quad (16)$$

В результате получим

$$\omega_2 = \omega_5 \frac{1 - i_{5-3}^{(6)} / i_{5-2}^{(6)}}{1 - i_{5-3}^{(6)}}. \quad (17)$$

Представим формулы (16) и (17) в общем виде, перейдя к произвольной паре звеньев:

$$i_{in-out} = \frac{1 - i_{in-fr}^{(s)}}{1 - i_{in-fr}^{(s)} / i_{in-out}^{(s)}}; \quad (18)$$

$$\omega_{out} = \omega_{in} \frac{1 - i_{in-fr}^{(s)} / i_{in-out}^{(s)}}{1 - i_{in-fr}^{(s)}}, \quad (19)$$

где fr (frame) — обозначение неподвижного звена (стойки) действительного механизма.

Рассмотрим два примера определения передаточных функций i_{in-out} у механизмов высоких классов.

Пример. Для механизма III класса (с триадой), в котором 1 — входное звено, 2 — стойка и 3 — выходное звено (рис. 5, а), следует записывать $q = 2$, $in = 1$ и $out = 3$. Если в качестве стойки s обращенного механизма принять сложноподвижное звено $s = 6$ (рис. 5, б), механизм распадется на монаду 6-1 и две диады 4-5 и 2-3; и тогда можно найти передаточные функции $i_{1-2}^{(6)}$ и $i_{1-3}^{(6)}$. При таком сочетании звеньев формула (18) примет вид

$$i_{1-3} = \frac{1 - i_{1-2}^{(6)}}{1 - i_{1-2}^{(6)} / i_{1-3}^{(6)}}. \quad (20)$$

Отсюда

$$\omega_3 = \omega_1 / i_{1-3}. \quad (21)$$

Пример. На рис. 6, а показан механизм IV класса (с тетрадой), в котором входным звеном in является кривошип 1, опирающийся на

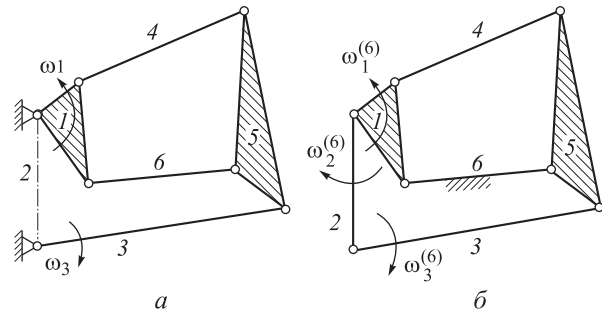


Рис. 5. Схема инверсии механизма III класса: а — действительный механизм с первичным звеном 1; б — обращенный механизм с условной стойкой 6 и первичным звеном 2; 1-6 — звенья

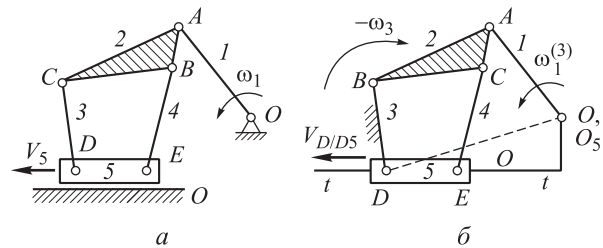


Рис. 6. Инверсия механизма с поступательной парой: а — действительная схема механизма с первичным звеном 1; б — обращенный механизм с условной стойкой 3 и первичным звеном 5; 1-5 — звенья

стойку ($q = 0$), а выходным звеном out — ползун 5.

Наличие поступательной пары существенно упрощает задачу, поскольку угловые скорости ее элементов одинаковые. В данной задаче оба элемента пары 0-5 не совершают вращения:

$$\omega_5 = \omega_0 = 0. \quad (22)$$

Значение относительной линейной скорости звеньев 5 и 0 инвариантно. В данной задаче (рис. 6, б)

$$v_5 = v_{5-0} = v_{O/5}^{(3)}. \quad (23)$$

Таким образом, чтобы свести исследование сложного механизма к стандартным, общепринятым приемам, необходимо понизить его класс, вплоть до II класса путем условной остановки одного из сложноподвижных звеньев s . Тогда действительная угловая скорость этого звена определяется по формуле (12). Более общее соотношение угловых скоростей (9) используется в анализе механизмов с двумя степенями свободы.

Выводы

1. Анализ кинематических цепей высоких классов можно свести к изучению механизмов II класса путем инверсии приняв за стойку сложноподвижное звено.

2. Действительные кинематические характеристики звеньев определяют по уравнению, подобному уравнению Виллиса для зубчатого дифференциала, с тем отличием, что передаточные отношения обращенного механизма не постоянны и зависят от положения входного звена.

Литература

- [1] Тимофеев Г.А., ред. *Теория механизмов и механика машин*. Москва, Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2009. 688 с.
- [2] Коловский М.З., Евграфов А.Н., Семенов Ю.А., Слоущ А.В. *Теория механизмов и машин*. Москва, Изд. центр Академия, 2006. 560 с.
- [3] Kolovsky M.Z., Evgrafov A.N., Semenov Y.A., Slousch A.V. *Advanced Theory of Mechanisms and Machines*. Berlin, Heidelberg, New York, Springer – Verlag, 2000. 396 p.
- [4] Асур Л.В. *Исследование плоских стержневых механизмов с низшими парами с точки зрения их структуры и классификации*. Москва, Изд-во АН СССР, 1952. 594 с.
- [5] Mor E. Programul universal de analiza cinematica a mecanismelor plane cu bare. *Al VII-lea Simposion national al Romaniei MTM-96*, vol. I, Timishora-Resita, 1996, pp. 67–72.
- [6] Хомченко В.Г. К кинематическому анализу рычажных механизмов высоких классов. *Межвуз. сб. науч. тр. Проблемы синтеза и анализа механизмов и машин*, Новосибирск, НГТУ, 1997, с. 66–71.
- [7] Флусов Н.И. Основы автоматизированного расчета рычажных механизмов высокого класса. *Сб. науч. тр. Современные проблемы машиностроительного комплекса*, Хабаровск, Изд-во ХГТУ, 1998, с. 11–13.
- [8] Стариков С.П., Дворников Л.Т. Новые решения в задачах кинематического исследования плоских групп Ассур высоких классов. *Международ. конференция по теории механизмов и механике машин. Сб. докл.* Краснодар, КубГТУ, 2006, С. 63–64.
- [9] Shai O., Mohr E. Transforming engineering knowledge through graph representations: transferring the Willis method to linkages and trusses. *Engineering with computers*, 2004, vol. 20, iss. 1, pp. 2–10.

References

- [1] Timofeev G.A., red. *Teoriia mekhanizmov i mekhanika mashin* [Theory of mechanisms and mechanics of machines]. Moscow, Bauman Press, 2009. 688 p.
- [2] Kolovskii M.Z., Evgrafov A.N., Semenov Yu.A., Slousch A.V. *Teoriia mekhanizmov i mashin* [Theory of Mechanisms and Machines]. Moscow, Izdatel'skii tsentr Akademiia publ., 2006. 560 p.
- [3] Kolovsky M.Z., Evgrafov A.N., Semenov Y.A., Slousch A.V. *Advanced Theory of Mechanisms and Machines*. Berlin, Heidelberg: New York: Springer – Verlag, 2000. 396 p.
- [4] Asur L.V. *Issledovanie ploskikh sterzhnevyykh mekhanizmov s nizshimi parami s tochki zreniia ikh struktury i klassifikatsii* [Study flat rod mechanisms with lower pairs in terms of their structure and classification]. Moscow, Izd-vo AN SSSR publ., 1952. 594 p.
- [5] Mor E. Programul universal de analiza cinematica a mecanismelor plane cu bare. *Al VII-lea Simposion national al Romaniei MTM-96*, vol. I, Timishora-Resita, 1996, pp. 67–72.
- [6] Khomchenko V.G. K kinematicheskomu analizu rychazhnykh mekhanizmov vysokikh klassov [By kinematic linkage analysis of high classes]. *Mezhvuz. sb. nauch. tr. Problemy sinteza i analiza mekhanizmov i mashin* [Interuniversity collection of scientific papers problems of synthesis and analysis of mechanisms and machines]. Novosibirsk, NGTU publ., 1997, pp. 66–71.
- [7] Flusov N.I. Osnovy avtomatizirovannogo rascheta rychazhnykh mekhanizmov vysokogo klassa [Fundamentals of automated calculation of linkage of high class]. *Sb. nauch. tr. Sovremennye problemy mashinostroitel'nogo kompleksa* [Collection of Scientific Papers Modern problems of machine-building complex]. Khabarovsk, KhGTU publ., 1998, pp. 11–13.
- [8] Starikov S.P., Dvornikov L.T. Novye resheniia v zadachakh kinematicheskogo issledovaniia ploskikh grupp Assura vysokikh klassov [New solutions in problems of plane kinematic study groups Assur high classes]. *Mezhdunarodnaia konferentsiia po teorii mekhanizmov i mekhanike mashin. 2006. Sbornik dokladov* [International Conference on Theory of mech-

anisms and mechanics of machines. 2006. Collection of reports]. Krasnodar, KubGTU publ., 2006, pp. 63–64.

- [9] Shai O., Mohr E. Transforming engineering knowledge through graph representations: transferring the Willis method to linkages and trusses. *Engineering with computers*, 2004, vol. 20, iss. 1, pp. 2–10.

Статья поступила в редакцию 30.03.2015

Информация об авторах

ТИМОФЕЕВ Геннадий Алексеевич (Москва) — доктор технических наук, профессор, зав. кафедрой «Теория механизмов и машин». МГТУ им. Н.Э. Баумана (105005, Москва, Российская Федерация, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1, e-mail: timga@bmstu.ru).

МОР Ефим Григорьевич (Тель-Авив) — доктор технических наук Тель-авивского университета (69978, Тель-Авив, Израиль, P.O. Box 39040, e-mail: mor1589@inter.net.il).


БАРБАШОВ Николай Николаевич (Москва) — доцент кафедры «Теория механизмов и машин». МГТУ им. Н.Э. Баумана (105005, Москва, Российская Федерация, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1).

Information about the authors

TIMOFEEV Gennady Alekseevich (Moscow) — Doctor of Science (Eng.), Professor, Head of Theory of Mechanisms and Machines Department. BMSTU (105005, Moscow, Russian Federation, 2nd Baumanskaya St., Bldg. 5, Block 1, e-mail: timga@bmstu.ru).

MOR Efim Grigorievich (Tel Aviv) — Doctor of Science (Eng.). Tel Aviv University (69978, Tel Aviv, Israel, P.O. Box 39040, e-mail: mor1589@inter.net.il).

BARBASHOV Nikolai Nikolaevich (Moscow) — Associate Professor, Theory of Mechanisms and Machines Department. BMSTU (105005, Moscow, Russian Federation, 2nd Bauman-skaya St., Bldg. 5, Block 1).



В Издательстве МГТУ им. Н.Э. Баумана
вышла свет монография
С.В. Грубого
«Оптимизация процесса механической обработки
и управление режимными параметрами»

Представлены результаты теоретических и экспериментальных исследований процесса резания и изнашивания инструментов. Проведено математическое моделирование процесса и дана методика многофакторной аппроксимации полиномиальными уравнениями экспериментальных зависимостей резания металлов. Выполнен анализ методов и рассмотрены типовые задачи оптимизации режимных параметров. Разработаны математические основы оптимизации и управления режимными параметрами механической обработки с использованием уравнений скорости изнашивания инструментов.

По вопросам приобретения обращайтесь:
105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1.
Тел.: +7 499 263-60-45, факс: +7 499 261-45-97;
press@bmstu.ru; www.baumanpress.ru