

# Расчет и конструирование машин

УДК 539.47

## Расчет пружин, работающих в упругой и неупругой областях деформирования

**С.А. Абдрахманов, Ж.Ж. Доталиева, Т.Т. Кожошов, М.Б. Джолдошбаева**

Кыргызский государственный технический университет им. И. Раззакова, 720044, Кыргызская Республика, Бишкек, пр. Мира, д. 66

## Calculations for spring in elastic and inelastic zones of deformation

**S.A. Abdrakhmanov, Zh.Zh. Dotalieva, T.T. Kozhoshov, M.B. Dzholdoshbaeva**

Kyrgyz State Technical University named after I. Razzakov, 720044, Kyrgyz Republic, Bishkek, Pr. Mira, Bldg. 66



e-mail: abdrahmanov7@rambler.ru, zh.dotalieva@gmail.com, tkojoshov7@gmail.com, meerimdzholdoshbaeva@gmail.com



Известно, что пружины, как правило, в основном работают в упругой области их деформирования. Однако с появлением нового класса материалов, в частности обладающих эффектом памяти формы, рабочая область деформирования пружин расширяется и может включать и неупругую зону. Следовательно, изучение условия деформирования пружин за пределами упругости является важной задачей. Приведен расчет составных цилиндрических пружин с эффектом памяти формы, рассмотрены процессы нагрузки, разгрузки, а также генерации реактивных усилий при их нагреве в области температур фазового перехода. Проанализирована генерация реактивных усилий пружины при совместной работе с пружиной, не обладающей эффектом памяти формы, при последовательном и параллельном соединении. Определена зависимость максимального реактивного усилия от нагрузки в момент разгрузки пружин. Выполнено сравнение полученных результатов при параллельном и последовательном соединении пружин.

**Ключевые слова:** эффект памяти формы, зона упругости, цилиндрическая пружина, нагрузка, разгрузка, реактивные усилия.



It is known that springs work mainly in the elastic zone of deformation. However, with the emergence of a new class of materials, particularly those with shape memory effect, the working zone of spring deformation increases and can include the inelastic zone. Therefore, it is important to study spring deformation conditions beyond the elasticity limits. An analysis of composite coil springs with memory shape effect is presented; loading, unloading, and recovery force upon heating in the temperature range of phase transformation are considered. Recovery force is analyzed when the springs are connected in series or in parallel with springs without the shape memory effect. A dependence of the maximum recovery force upon loading at the moment of unloading is determined. The results for the springs connected in series and in parallel are compared.

**Keywords:** memory shape effect, elasticity zone, coil spring, loading, unloading, recovery force.

Благодаря своим свойствам сплавы с эффектом памяти формы (СЭП) нашли применение в инновационных технологиях. Однако для успешного использования СЭП следует учитывать как их технологические свойства, так и спрос на рынке. Наибольший интерес к СЭП обусловлен их суперэластичностью (медицина) и возможностью многократного изменения формы активных элементов (интеллектуальные технологии). Производителям медицинского оборудования и разработчикам интеллектуальных технологий необходимы материалы с более высокими эксплуатационными характеристиками. Поэтому достижения в этих областях способствуют интенсивным исследованиям, направленным на разработку СЭП, и, вероятно, эти исследования расширятся еще больше с увеличением потребности в интеллектуальных технологиях.

Следует отметить, что эффект памяти формы (ЭПФ) и генерация реактивных усилий проявляются только при наличии неупругих деформаций (мартенситной природы) [1–3], поэтому важными этапами при проектировании конструкций, работающих за пределом упругости, являются: определение предельной нагрузки, после которой возникают неупругие деформации (далее фазовые деформации); расчет значений неупругих деформаций; изучение разгрузки и остаточных деформаций; исследование реактивных усилий, возникающих в условиях воспрепятствования ее формовосстановлению.

Цель работы — исследование составных цилиндрических витых пружин растяжения, одна из которых изготовлена из СЭП и характеризуется ЭПФ. При этом считаем, что витые пружины работают на кручение.

Пусть вначале процесс деформирования происходит изотермически в области температур существования устойчивой мартенситной фазы. В этом случае при нагружении пружины с ЭПФ неупругие деформации образуются за счет реакции «мартенсит–мартенсит». При этом значения напряжений, при которых начинают образовываться неупругие деформации, значительно меньше предела дислокационной текучести материала, а максимальное значение неупругих деформаций во много раз больше значения деформации, соответствующей дислокационной площадке текучести.

Примем, что одна из пружин имеет неограниченную упругость и модуль сдвига  $G_1$ , а вторая пружина обладает ЭПФ; диаграмма сдвига второй пружины имеет вид двухзвенной лома-

ной линии. В упругой области деформирования модуль сдвига второй пружины

$$G_2 = G_\mu.$$

Здесь  $G_\mu$  — модуль сдвига материала в мартенситном состоянии. В неупругой области деформирования модуль сдвига равен  $nG_\mu$ , где  $n$  — безразмерный параметр, характеризующий степень упрочнения материала ( $0 \leq n \leq 1$ ). Касательное напряжение, соответствующее началу фазовой текучести второй пружины, обозначим  $\tau_{ф.т.}$ . Учитывая, что  $\tau_{ф.т.}$  намного меньше дислокационного предела текучести, считаем, что при изотермическом нагружении во второй пружине возникают неупругие деформации только мартенситной природы, т. е. фазовые деформации.

Рассмотрим два вида соединения пружин: последовательное и параллельное.

**Последовательное соединение пружин.** Пусть последовательно соединенные пружины растягиваются силой  $P$  (рис. 1).

При упругой деформации связь между осевым перемещением  $\lambda$  и воспринимаемой нагрузкой  $P$  описывается зависимостями

$$\lambda_1 = P/z_1; \quad \lambda_2 = P/z_2, \quad (1)$$

где  $z_1$  и  $z_2$  — жесткости пружин, определяемые через геометрические и механические параметры пружин,

$$z_1 = \frac{G_1 d_1^4}{8D_1^3 i_1}; \quad z_2 = \frac{G_\mu d_2^4}{8D_2^3 i_2}.$$

Здесь  $D$  и  $d$  — диаметр пружин и проволоки соответственно;  $i$  — количество витков пружин.

Очевидно, что полное перемещение конца пружины составляет

$$\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 = P/z, \quad (2)$$

где  $z$  — жесткость составной пружины.

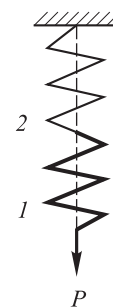


Рис. 1. Последовательное соединение двух пружин: 1 — упругая пружина; 2 — пружина с ЭПФ

С учетом формулы (1)

$$z = \frac{z_1 z_2}{z_1 + z_2}.$$

Если значения максимальных касательных напряжений во второй пружине меньше значения  $\tau_{ф.т}$ , то рассматриваемая система будет работать в упругой области деформирования. Тогда нагрузка, после которой она переходит в неупругую область, рассчитывается по формуле

$$P_{ф.т} = \frac{\pi d_2^3}{8 D_2} \tau_{ф.т}. \quad (3)$$

Подставляя значение  $P_{ф.т}$  в формулы (1) и (2), имеем

$$\lambda_{2ф.т} = \frac{P_{ф.т}}{z_2} = \frac{\pi D_2^2 i}{G_\mu d_2} \tau_{ф.т}; \quad \lambda_{ф.т} = \lambda_{2ф.т} \frac{z_2}{z}. \quad (4)$$

Отсюда зависимость осевого перемещения от нагрузки для данной системы в безразмерном виде описывается равенством

$$\bar{\lambda} = \bar{P}. \quad (5)$$

Здесь  $\bar{\lambda} = \lambda/\lambda_{ф.т}$ ,  $\bar{P} = P/P_{ф.т}$  — соответственно безразмерные осевое перемещение и растягивающая сила.

*Неупругая деформация* цилиндрической пружины растяжения рассмотрена в работе [3]. Осевое перемещение такой пружины рассчитывается по формуле

$$\lambda_2 = \frac{P}{k(n, \rho) z_2}, \quad (6)$$

где  $k(n, \rho)$  — коэффициент жесткости на кручение вследствие появления неупругих деформаций;  $\rho$  — безразмерный параметр, характеризующий глубину зоны неупругих деформаций,  $\rho = r_{ф.т}/r_0$  ( $r_{ф.т}$  — радиус прутка в области касательных напряжений, равных  $\tau_{ф.т}$ ;  $r_0 = d_2/2$  — радиус прутка). Для расчета  $k(n, \rho)$  авторами данной статьи получена следующая формула [4]:

$$k(n, \rho) = \frac{\rho}{3} \left( 4 - \rho^3 \right) + n \left( 1 - \frac{4}{3} \rho + \frac{1}{3} \rho^4 \right). \quad (7)$$

С учетом формулы (6) полное осевое перемещение пружины

$$\lambda = \left( \frac{1}{z_1} + \frac{1}{k(n, \rho) z_2} \right) P.$$

Последнюю формулу можно привести к безразмерному виду:

$$\bar{\lambda} = \frac{k(n, \rho) + c}{k(n, \rho)(1 + c)} \bar{P}. \quad (8)$$

Здесь  $c = z_1/z_2$ . Отсюда

$$\bar{\lambda} = \frac{1 + k(n, \rho)/c}{k(n, \rho)(1 + 1/c)} \bar{P}.$$

При последовательном соединении пружин можно показать, что параметр  $\rho$ , характеризующий глубину зоны неупругих деформаций, связан с безразмерным осевым перемещением пружины с памятью формы  $\bar{\lambda}_2$  зависимостью

$$\rho = 1/\bar{\lambda}_2, \quad (9)$$

где  $\bar{\lambda}_2 = \lambda_2/\lambda_{2ф.т}$ .

Учитывая, что  $\lambda_2 = P/[k(n, \rho) z_2]$ , а  $\lambda_{2ф.т} = P_{ф.т}/z_2$ , для  $\bar{\lambda}_2$  получаем формулу

$$\bar{\lambda}_2 = \bar{P}/k(n, \rho). \quad (10)$$

Здесь  $\bar{P} = P/P_{ф.т}$ ,  $P \geq P_{ф.т}$ .

В рассматриваемом случае диаграмма деформирования первой пружины для упругой области ( $\bar{P} \leq 1$ ) строится на основании зависимости (5), а в случае неупругой деформации второй пружины ( $\bar{P} > 1$ ) — на основании формулы (8). Приведем алгоритм построения этой зависимости при  $\bar{P} > 1$ . При известных параметрах  $c$  и  $n$  зададимся глубиной зоны неупругих деформаций ( $\rho < 1$ ), затем определим значение  $k(n, \rho)$  по формуле (7). По формулам (9) и (10) находим  $\bar{\lambda}_2$  и  $\bar{P}$ , а по формуле (8) — осевое перемещение при последовательном соединении пружин. Таким образом, алгоритм представляет собой следующую цепочку вычислений:

$$c, n \rightarrow \rho \rightarrow k(n, \rho) \rightarrow \bar{\lambda}_2 \rightarrow \bar{P} \rightarrow \bar{\lambda}.$$

**Параллельное соединение пружин.** Пусть параллельно соединенные пружины растягиваются силой  $P$  в осевом направлении (рис. 2).

При упругой деформации осевые перемещения пружин  $\lambda$  в зависимости от растягивающих их усилий  $N$  определяются следующими формулами:

$$\lambda_1 = N_1/z_1; \quad \lambda_2 = N_2/z_2. \quad (11)$$

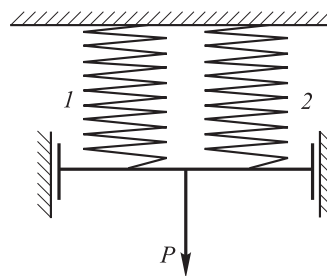


Рис. 2. Параллельное соединение двух пружин: 1 — упругая пружина; 2 — пружина с ЭПФ

Уравнение равновесия и условие совместности деформации этой системы имеет вид

$$N_1 + N_2 = P; \quad \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda. \quad (12)$$

Решая уравнения (11) и (12), находим усилия в пружинах, а также связь осевого перемещения пружин с растягивающей силой  $P$ :

$$N_1 = \frac{c}{1+c} P; \quad N_2 = \frac{1}{1+c} P; \quad \lambda = \frac{P}{z}, \quad (13)$$

где  $z$  — жесткость параллельно соединенных пружин,

$$z = z_1 + z_2.$$

Найдем силу  $P_{\text{ф.т}}$ , после достижения которой вторая пружина переходит в неупругое состояние. Очевидно, что при этом  $N_2 = N_{2\text{ф.т}}$ , а значение  $N_{2\text{ф.т}}$  рассчитывается по формуле (3). Тогда для рассматриваемого случая получаем

$$P_{\text{ф.т}} = (1+c) \frac{\pi d_2^3}{8D_2} \tau_{\text{ф.т}}. \quad (14)$$

При этом, согласно зависимости (13), осевое перемещение пружины

$$\lambda_{\text{ф.т}} = P_{\text{ф.т}}/z. \quad (15)$$

Используя формулы (14) и (15), запишем в безразмерном виде зависимость усилий и осевого перемещения данной системы от нагрузки:

$$\bar{N}_1 = \frac{c}{1+c} \bar{P}; \quad \bar{N}_2 = \frac{1}{1+c} \bar{P}; \quad \bar{\lambda} = \bar{P}. \quad (16)$$

Здесь  $\bar{N}_1 = N_1/P_{\text{ф.т}}$ ;  $\bar{N}_2 = N_2/P_{\text{ф.т}}$ ;  $\bar{\lambda} = \lambda/\lambda_{\text{ф.т}}$ ;  $\bar{P} = P/P_{\text{ф.т}}$ , где значения  $P_{\text{ф.т}}$  и  $\lambda_{\text{ф.т}}$  находят по формулам (14) и (15).

Для неупругой деформации, как и упругой, справедливы уравнения равновесия и совместности деформаций (12), но в них перемещение

второй пружины определяется по формуле (6) в следующем виде:

$$\lambda_2 = \frac{N_2}{k(n, \rho) z_2}. \quad (17)$$

Решая уравнения (12) и (13), находим

$$N_1 = \frac{c}{k(n, \rho) + c} P; \quad N_2 = \frac{k(n, \rho)}{k(n, \rho) + c} P. \quad (18)$$

Связь удлинений с растягивающей силой  $P$  рассчитываем по формуле (11) или (17):

$$\lambda = \frac{cP}{(k(n, \rho) + c) z_1},$$

или

$$\lambda = \frac{P}{(k(n, \rho) + c) z_2}. \quad (19)$$

Представим зависимости (18) и (19) в безразмерном виде:

$$\begin{aligned} \bar{N}_1 &= \frac{c}{k(n, \rho) + c} \bar{P}; \\ \bar{N}_2 &= \frac{k(n, \rho)}{k(n, \rho) + c} \bar{P}; \\ \bar{\lambda} &= \frac{1+c}{k(n, \rho) + c} \bar{P}. \end{aligned} \quad (20)$$

При параллельном соединении усилия и перемещения пружин при упругом деформировании определяются формулами (16), а в случае перехода второй пружины в неупругое деформирование — формулами (20).

Учитывая, что по условию совместности деформаций  $\lambda_2 = \lambda$ , можно показать, что

$$\bar{\lambda}_2 = \lambda_2 / \lambda_{2\text{ф.т}} = \lambda / \lambda_{\text{ф.т}} = \bar{\lambda}.$$

В этом случае алгоритм вычислений при неупругой деформации второй пружины пред-

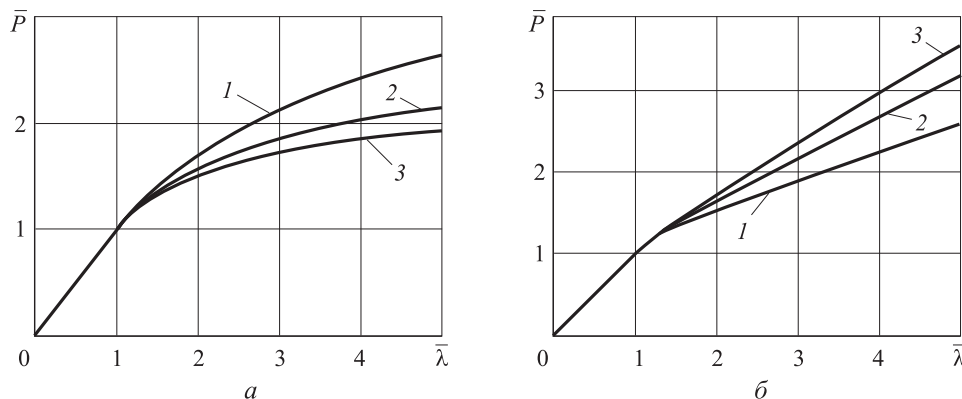


Рис. 3. Зависимость  $\bar{P}$  от  $\bar{\lambda}$  для  $n = 0,01$ :

$a$  — последовательное соединение пружин;  $b$  — параллельное соединение пружин;  
1 —  $c = 0,5$ ; 2 —  $c = 1,0$ ; 3 —  $c = 1,5$

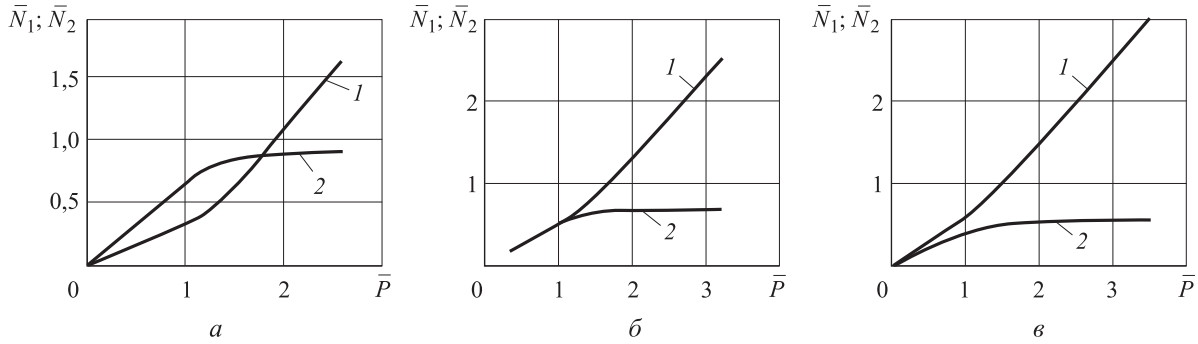


Рис. 4. Зависимость  $\bar{N}_1$  и  $\bar{N}_2$  от  $\bar{P}$  при параллельном соединении пружин для  $n = 0,01$ :  
 $a - c = 0,5$ ;  $b - c = 1,0$ ;  $v - c = 1,5$ ; 1 —  $\bar{N}_1$ ; 2 —  $\bar{N}_2$

ставляет собой следующую цепочку вычислений:

$$c, n \rightarrow \rho_p \rightarrow k(n, \rho_p) \rightarrow \bar{\lambda} \rightarrow \bar{P} \rightarrow \bar{N}_1 \rightarrow \bar{N}_2.$$

Зависимости  $\bar{P}$  от  $\bar{\lambda}$  при работе пружин в области упругой и неупругой деформации при последовательном и параллельном соединениях показаны на рис. 3. Следует отметить, что даже при равных значениях  $\bar{P}$  растягивающие усилия пружин разные вследствие различия нагрузки  $P_{ф.т}$ , которая определяется формулами (3) и (14).

Для параллельно соединенных пружин зависимости между  $\bar{N}_1$ ,  $\bar{N}_2$  и  $\bar{P}$  приведены на рис. 4.

**Разгрузка и определение остаточных удлинений.** Пусть разгрузка происходит с некоторой нагрузки  $P_p$ , большей чем  $P_{ф.т}$ , т. е.  $P_p \geq P_{ф.т}$ . Для последовательного соединения пружин нагрузка  $P_{ф.т}$  определяется формулой (3). Считаем, что разгрузка осуществляется по упругому закону. Очевидно, что при полной разгрузке остаточные усилия в пружинах будут равны нулю, а остаточное удлинение по формулам (5) и (8) будет равно

$$\bar{\lambda}_{ост} = \bar{\lambda}_p - \lambda_p^y = \frac{c(1-k_p)}{k_p(1+c)} \bar{P}_p. \quad (21)$$

Здесь  $\bar{\lambda}_{ост} = \lambda_{ост} / \lambda_{ф.т}$ , где  $\lambda_{ф.т}$  определяется формулой (4);  $k_p = k(n, \rho_p)$  — значение коэффициента  $k(n, \rho)$  в момент разгрузки от силы  $\bar{P}_p = P_p / P_{ф.т}$ , при этом параметр  $\rho$ , соответствующий силе  $P_p$ , равен  $\rho_p$ .

Таким образом, по формуле (21) можно определить остаточные перемещения составной пружины при последовательном соединении. В этом случае задаемся глубиной зоны неупругих деформаций перед разгрузкой, т. е.  $\rho_p$ , а затем находим усилие разгрузки  $\bar{P}_p$  и опреде-

ляем  $\bar{\lambda}_{ост}$ , т. е. получаем следующий алгоритм вычислений:

$$c, n \rightarrow \rho_p \rightarrow k(n, \rho_p) \rightarrow \bar{\lambda}_{2p} \rightarrow \bar{P}_p \rightarrow \bar{\lambda}_{ост}.$$

Для параллельного соединения пружин нагрузка  $P_{ф.т}$  определяется формулой (14). Поступая аналогично изложенному выше, по формулам (20) получаем

$$\bar{\lambda}_{ост} = \frac{1-k_p}{k_p+c} \bar{P}_p. \quad (22)$$

Вычитая от усилий в стержнях при нагрузке  $P_p$  их значения, определяемые при их упругой работе, находим значения остаточных усилий при полной разгрузке данной конструкции. Запишем их в следующем виде:

$$\begin{aligned} \bar{N}_{1ост} &= \frac{c(1-k_p)}{(1+c)(k_p+c)} \bar{P}_p; \\ \bar{N}_{2ост} &= \frac{c(k_p-1)}{(1+c)(k_p+c)} \bar{P}_p. \end{aligned} \quad (23)$$

Здесь  $\bar{N}_{1ост} = N_{1ост} / P_{ф.т}$ ;  $\bar{N}_{2ост} = N_{2ост} / P_{ф.т}$ .

Полагая  $k_p < 1$ , из последних формул следует, что  $\bar{N}_{1ост} > 0$ , а  $\bar{N}_{2ост} < 0$ , причем  $\bar{N}_{1ост} = |\bar{N}_{2ост}|$ .

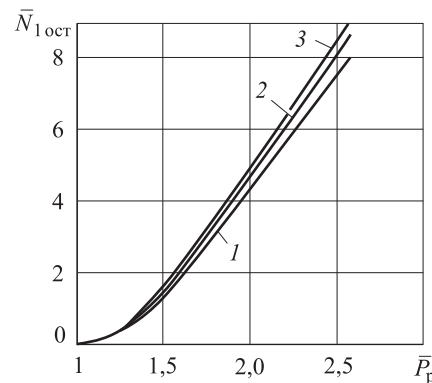


Рис. 5. Зависимости  $\bar{N}_{1ост}$  от  $\bar{P}_p$  при параллельном соединении пружин при  $n = 0,01$ :  
 $1 - c = 0,5$ ;  $2 - c = 1,0$ ;  $3 - c = 1,5$

Таким образом, в процессе полной разгрузки первая пружина растягивается, а вторая пружина сжимается усилием  $\bar{N}_{1\text{ост}}$ .

Остаточные перемещения и усилия составной пружины при параллельном соединении в соответствии с формулами (22) и (23), определяют по следующему алгоритму:

$$c, n \rightarrow \rho_p \rightarrow k(n, \rho_p) \rightarrow \bar{\lambda}_p \rightarrow \bar{P}_p \rightarrow \bar{\lambda}_{\text{ост}} \rightarrow \\ \rightarrow \bar{N}_{1\text{ост}} \rightarrow \bar{N}_{2\text{ост}}.$$

Зависимости  $\bar{N}_{1\text{ост}}$  от  $\bar{P}_p$  для параллельно соединенных пружин показаны на рис. 5.

**Реактивные усилия.** При определении реактивного усилия, развиваемого пружиной, обладающей ЭПФ, считаем, что остаточная фазовая деформация в процессе формовосстановления исчезает полностью и характеристические температуры фазовых превращений не зависят от напряжений.

Рассмотрим процесс нагрева пружины с ЭПФ (в нашем случае второй пружины) только в области температур фазового перехода, т. е. от  $A_n$  до  $A_k$ .

При последовательном соединении пружин условие совместности деформаций при изменении температуры нагрева на величину  $dT$  имеет вид

$$d(\lambda_1 + \lambda_{2R} + \lambda_{2t}) = d\lambda_{\text{п.ф.}} \quad (24)$$

Здесь  $\lambda_1$  и  $\lambda_{2R}$  — осадка первой и второй пружины от действия реактивной силы  $R$  соответственно;  $\lambda_{2t}$  — температурная осадка второй пружины;  $\lambda_{\text{п.ф.}}$  — осадка пружины, обусловленная ЭПФ.

Далее считаем, что процесс формовосстановления происходит упруго, т. е. возникающая при нагреве реактивная сила не вызывает в пружине с ЭПФ появление неупругих фазовых деформаций. Следовательно, можно записать

$$\lambda = \lambda_1 + \lambda_{2R} = R/z.$$

Очевидно, что температурная осадка пружины

$$\lambda_{2T} = H_{\text{нагр}} \xi(T)(T - A_n),$$

где  $H_{\text{нагр}}$  — высота пружины после разгрузки перед нагревом;  $\xi(T)$  — коэффициент температурного расширения материала пружины;  $T$  — текущая температура.

Пусть  $\xi(T)$  меняется по линейному закону, т. е.

$$\xi(T) = a_\xi + b_\xi T,$$

где  $a_\xi, b_\xi$  — коэффициенты, определяемые экспериментально. Тогда

$$d\lambda_{2T} = H_{\text{нагр}} [b_\xi(T - A_n) + \xi(T)] dT.$$

При нагреве накопленная при кручении фазовая деформация снижается по линейному закону в зависимости от температуры [3]. Следовательно

$$\lambda_{\text{п.ф.}} = \frac{\lambda_{\text{ост}}}{A_k - A_n} (T - A_n).$$

Отсюда

$$d\lambda_{\text{п.ф.}} = \frac{\lambda_{\text{ост}}}{A_k - A_n} dT.$$

С учетом приведенных выше формул уравнение (24) примет следующий вид:

$$d\left(\frac{R}{z}\right) = \left\{ \frac{\lambda_{\text{ост}}}{A_k - A_n} - H_{\text{нагр}} [b_\xi(T - A_n) + \xi(T)] \right\} dT.$$

Интегрируя это уравнение от  $A_n$  до  $T$  с учетом того, что при  $T = A_n$  реактивная сила  $R$  должна быть равна нулю, находим

$$R(T) = z(T)(T - A_n) \left( \frac{\lambda_{\text{ост}}}{A_k - A_n} - H_{\text{нагр}} \xi(T) \right). \quad (25)$$

Здесь

$$z(T) = \frac{z_1 z_2(T)}{z_1 + z_2(T)}.$$

Полагая в формуле (25) второе слагаемое малым по сравнению с первым и пренебрегая им, получаем

$$R(T) = z(T) \frac{T - A_n}{A_k - A_n} \lambda_{\text{ост}}.$$

Представим эту формулу в безразмерном виде:

$$\bar{R}(T) = \frac{z(T)}{z} \frac{T - A_n}{A_k - A_n} \bar{\lambda}_{\text{ост}}, \quad (26)$$

где  $\bar{R}(T) = R(T)/P_{\text{ф.т}}$ . Здесь  $P_{\text{ф.т}}$  определяется по формуле (3).

Определим максимальную реактивную силу, развиваемую последовательно соединенной пружиной по формуле (26):

$$\bar{R}_{\text{max}} = \bar{R}(A_k) = \frac{z(A_k)}{z} \bar{\lambda}_{\text{ост}}.$$

Подставив значение остаточного удлинения пружины, выраженное через усилие разгрузки  $\bar{P}_p$ , получим

$$\bar{R}_{\text{max}} = \frac{c(1 - k_p)}{k_p [1 + c(A_k)]} \bar{P}_p.$$

Здесь  $c(A_k) = z_1/z_2(A_k)$ .

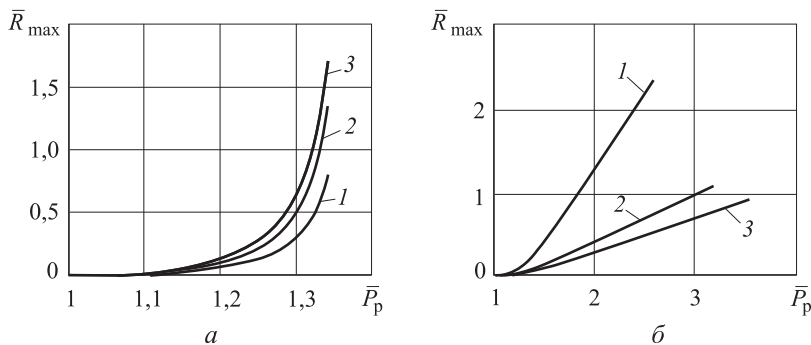


Рис. 6. Зависимости  $\bar{R}_{\max}$  от  $\bar{P}_p$  при последовательном (а) и параллельном (б) соединении пружин для  $n = 0,01$ :  
 1 —  $c = 0,5$ ; 2 —  $c = 1,0$ ; 3 —  $c = 1,5$

Алгоритм определения  $\bar{R}_{\max}$ : зададимся характеристиками пружины  $n$ ,  $c$  и  $c(A_k)$  с учетом того, что  $\bar{P}_p = k_p \bar{\lambda}_{2p}$ , а  $\bar{\lambda}_{2p} = 1/\rho_p$ . Далее вычисления проводятся по цепочке:

$$\rho_p \rightarrow k_p \rightarrow \bar{\lambda}_{2p} \rightarrow \bar{P}_p \rightarrow \bar{R}_{\max}.$$

При параллельном соединении пружин справедливо следующее условие совместности деформаций:

$$d\lambda_1 = d\lambda_2 = d\lambda_{п.ф}, \tag{27}$$

где  $\lambda_1 = R_1/z_1$ ;  $\lambda_2 = R_2/z_2 + \lambda_{2ф.т}$ ;  $R_1$  и  $R_2$  — реактивные усилия в первой и второй пружинах. При этом уравнение равновесия имеет вид

$$R_1 + R_2 + N_{\text{ост}1} + N_{\text{ост}2} = R. \tag{28}$$

Решая совместно уравнения (27) и (28), с учетом формул, рассмотренных для последовательного соединения пружин, получаем для реактивного усилия следующую формулу:

$$R(T) = \left\{ [1 + c(T)] \frac{\lambda_{\text{ост}}}{A_k - A_n} H_{\text{нагр}} \xi(T) \right\} z(T) (T - A_n).$$

Аналогично предыдущему случаю, пренебрегая вторым слагаемым в виду его малости, имеем

$$R(T) = \frac{\lambda_{\text{ост}} (T - A_n)}{A_k - A_n} [1 + c(T)] z(T).$$

Найдем значение максимальной реактивной силы:

$$R_{\max} = R(A_k) = \lambda_{\text{ост}} [1 + c(A_k)] z_2(A_k).$$

Приведем эту формулу к безразмерному ви-

ду, поделив ее на  $P_{ф.т}$ , определяемую по формуле (14):

$$\bar{R}_{\max} = \frac{1 + c(A_k)}{1 + c} \frac{z_2(A_k)}{z_2} \bar{\lambda}_{\text{ост}}. \tag{29}$$

Подставив в формулу (29) значение  $\bar{\lambda}_{\text{ост}}$ , получим

$$\bar{R}_{\max} = \frac{1 + c(A_k)}{1 + c} \frac{c}{c(A_k)} \frac{1 - k_p}{k_p - c} \bar{P}_p.$$

Здесь учтено, что

$$\frac{z_2(A_k)}{z_2} = \frac{c}{c(A_k)}.$$

Зависимости максимальных реактивных усилий  $\bar{R}_{\max}$  от значения нагрузки в момент разгрузки  $\bar{P}_p$  приведены на рис. 6. В расчетах принималось, что жесткость пружины с ЭПФ в аустенитном состоянии в 2 раза больше ее значения в мартенситном состоянии. На рисунке видно, что при разгрузке с некоторого значения  $\bar{P}_p$  значение реактивного усилия  $\bar{R}_{\max}$  может превышать значение нагрузки  $\bar{P}_p$ , особенно при последовательном соединении пружин (рис. 6, а).

Таким образом, в результате исследования получены зависимости осевых перемещений пружин от нагрузки при последовательном и параллельном их соединении с учетом неупругой деформации. Выведены формулы для расчета остаточных перемещений пружин в зависимости от усилий разгрузки. Определены значения реактивных усилий развиваемых пружинами при рассмотренных видах соединений.

### Литература

[1] Лихачев В.А., Кузьмин С.Л., Каменцева З.П. *Эффект памяти формы*. Ленинград, Изд-во ЛГУ, 1987. 218 с.

- [2] Мовчан А.А. Микромеханические определяющие уравнения для сплавов с памятью формы. *Проблемы машиностроения и надежности машин*, 1994, № 6, с. 47–53.
- [3] Абдрахманов С.А., Кожошов Т.Т. О работе цилиндрической пружины, обладающей эффектом памяти формы. *IV Междунар. научн. конф. Актуальные проблемы механики и машиностроения*. Алматы, КазНТУ, 2009, с. 143–147.
- [4] Абдрахманов С.А., Доталиева Ж.Ж. О зависимости «нагрузка–перемещение» для цилиндрических пружин в неупругой области ее деформирования. *Вестник КНУ им. Ж. Баласагына*, спец. вып., сер. № 3, 2012, с. 63–65.
- [5] Белков Е.Г., Землянушнова Н.Ю. Определение границ зоны упругих деформаций в поперечном сечении витка пружины при контактном заневоливании. *Известия Тульского государственного университета. Технические науки*, 2008, № 3, с. 19–25.
- [6] Абдрахманов С.А., Ибрагимов Р.Ш., Джаналиев Н.Р. *Деформация гибкой балки из материала с эффектом памяти формы*. Бишкек, Изд-во ТЕКНИК, 2007. 260 с.
- [7] Гюнтер В.Э., ред. *Никелид титана. Медицинский материал нового поколения*. Томск, Изд-во МИЦ, 2006. 296 с.
- [8] Ильин А.А., Хачин В.Н. Пластичность и сверхэластичность никелида титана в предмартенситном состоянии. *Сб. тр. Междунар. конф. Ti-2007 в СНГ, Украина, Ялта, 15–18 апреля 2007*. Ялта, Межгосударственная Ассоциация Титан, с. 385–387.
- [9] Гюнтер В.Э., ред. *Медицинские материалы и имплантаты с памятью формы. В 14 т. Т. 14. Имплантаты с памятью формы в офтальмологии*. Томск, Изд-во МИЦ, 2012. 192 с.
- [10] Родин Н.П., Ломовской О.В., Богданович В.И. *Применение материалов с эффектом памяти формы в производстве летательных аппаратов*. Самара, Изд-во СГАУ, 2007. 69 с.

## References

- [1] Likhachev V.A., Kuz'min S.L., Kamentseva Z.P. *Effekt pamiati formy* [The shape memory effect]. Leningrad, LGU publ., 1987. 218 p.
- [2] Movchan A.A. Mikromekhanicheskie opredel'aiushchie uravneniia dlia splavov s pamiat'iu formy [Micromechanical constitutive equations for shape memory alloys]. *Problemy mashinostroeniia i nadezhnosti mashin* [Journal of Machinery Manufacture and Reliability]. 1994, no. 6, pp. 47–53.
- [3] Abdrakhmanov S.A., Kozhoshov T.T. O rabote tsilindricheskoi pruzhiny, obladaiushchei effektom pamiati formy [The work of the coil spring with shape memory]. *4 Mezhdunarodnaia nauchnaia konferentsiia «Aktual'nye problemy mekhaniki i mashinostroeniia»* [4 International Scientific Conference «Actual Problems of Mechanics and Engineering»]. Almaty, KazNTU publ., 2009, pp. 143–147.
- [4] Abdrakhmanov S.A., Dotalieva Zh.Zh. O zavisimosti «nagruzka–peremeshchenie» dlia tsilindricheskikh pruzhin v neuprugoi oblasti ee deformirovaniia [On the dependence of «load-displacement» for the coil springs in the inelastic region of its deformation]. *Vestnik KNU im. Zh. Balasagyna* [Bulletin of the KNU named after Zh. Balasagyn]. Special iss. Ser. no. 3, 2012, pp. 63–65.
- [5] Belkov E.G., Zemlianushnova N.Iu. Opredelenie granits zony uprugikh deformatsii v poperechnom sechenii vitka pruzhiny pri kontaktnom zanevolivanii [Delimitation of the area of elastic deformation in the cross section of the spring coil in contact zanevolivanii]. *Izvestiia Tul'skogo gosudarstvennogo universiteta. Tekhnicheskie nauki* [Proceedings of the Tula State University. Technical sciences]. 2008, no. 3, pp. 19–25.
- [6] Abdrakhmanov S.A., Ibragimov R.Sh., Dzhanaliev N.R. *Deformatsiia gibkoi balki iz materiala s effektom pamiati formy* [Deformation of the flexible beam from the material with shape memory effect]. Bishkek, TEKNIK publ., 2007. 260 p.
- [7] *Nikelid titana. Meditsinskii material novogo pokoleniia* [Nikelid titanium. Medical is a new generation]. Ed. Giunter V.E. Tomsk, MITS publ., 2006. 296 p.
- [8] Il'in A.A., Khachin V.N. Plastichnost' i sverkhelastichnost' nikelida titana v predmartensitnom sostoianii [Plasticity and superelasticity NiTi in premartensitic condition]. *Sbornik trudov mezhdunarodnoi konferentsii Ti-2007 v SNG, Ukraina, Ialta, 15–18 apreliia 2007*



- [Collection of works of the international conference Ti-2007 in the CIS, Ukraine, Yalta, 15–18 April 2007]. Ialta, Mezghosudarstvennaia Assotsiatsiia Titan publ., pp. 385–387.
- [9] *Meditsinskie materialy i implantaty s pamiat'iu formy. V 14 t. T. 14. Implantaty s pamiat'iu formy v oftal'mologii* [Medical Materials and Implants with Shape Memory. In 14 vol. Vol. 14. Shape memory implants in ophthalmology]. Ed. Giunter V.E. Tomsk, MITs publ., 2012. 192 p.
- [10] Rodin N.P., Lomovskoi O.V., Bogdanovich V.I. *Primenenie materialov s efektom pamiati formy v proizvodstve letatel'nykh apparatov* [The use of materials with shape memory effect in the production of aircraft]. Samara, SSAU publ., 2007. 69 p.

Статья поступила в редакцию 24.02.2015

## Информация об авторах

**АБДРАХМАНОВ Сарбагыш Абдрахманович** (Бишкек) — доктор физико-математических наук, профессор кафедры «Механика и промышленная инженерия». Кыргызский государственный технический университет им. И. Раззакова (720044, Кыргызская Республика, Бишкек, пр. Мира, д. 66, e-mail: abdrahmanov7@rambler.ru).

**ДОТАЛИЕВА Жаныгуль Жолдошбаевна** (Бишкек) — кандидат физико-математических наук, доцент кафедры «Механика и промышленная инженерия». Кыргызский государственный технический университет им. И. Раззакова (720044, Кыргызская Республика, Бишкек, пр. Мира, д. 66, e-mail: zh.dotalieva@gmail.com).

**КОЖОШОВ Талантбек Тынымсеитович** (Бишкек) — кандидат физико-математических наук кафедры «Механика и промышленная инженерия». Кыргызский государственный технический университет им. И. Раззакова (720044, Кыргызская Республика, Бишкек, пр. Мира, д. 66, e-mail: tkojoshov7@gmail.com).

**ДЖОЛДОШБАЕВА Мээрим Бактыбековна** (Бишкек) — инженер кафедры «Механика и промышленная инженерия». Кыргызский государственный технический университет им. И. Раззакова (720044, Кыргызская Республика, Бишкек, пр. Мира, д. 66, e-mail: meerimdzhholdoshbaeva@gmail.com).

## Information about the authors

**ABDRAKHMANOV Sarbagysh Abdrakhmanovich** (Bishkek) — Doctor of Science (Physics & Math), Professor, Department of Mechanics and Industrial Engineering. Kyrgyz State Technical University named after I. Razzakov (720044, Kyrgyz Republic, Bishkek, Pr. Mira, Bldg. 66, e-mail: abdrahmanov7@rambler.ru).

**DOTALIEVA Zhanygyl Zholdoshbaevna** (Bishkek) — Candidate of Science (Physics & Math), Associate Professor, Department of Mechanics and Industrial Engineering. Kyrgyz State Technical University named after I. Razzakov (720044, Kyrgyz Republic, Bishkek, Pr. Mira, Bldg. 66, e-mail: zh.dotalieva@gmail.com).

**KOZHOSHOV Talantbek Tynymseitovich** (Bishkek) — Candidate of Science (Physics & Math), Department of Mechanics and Industrial Engineering. Kyrgyz State Technical University named after I. Razzakov (720044, Kyrgyz Republic, Bishkek, Pr. Mira, Bldg. 66, e-mail: tkojoshov7@gmail.com).

**DZHOLDOSHBAEVA Maarim Baktybekovna** (Bishkek) — Engineer, Department of Mechanics and Industrial Engineering. Kyrgyz State Technical University named after I. Razzakov (720044, Kyrgyz Republic, Bishkek, Pr. Mira, Bldg. 66, e-mail: meerimdzhholdoshbaeva@gmail.com).