

УДК 539.3

Метод расчета рассеяния энергии в конструкциях из гибридных композитов*

Ю.И. Димитриенко¹, Е.А. Губарева¹, Н.Н. Федонюк², Д.О. Яковлев¹¹ МГТУ им. Н.Э. Баумана, 105005, Москва, Российская Федерация, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1.² ФГУП «Крыловский государственный научный центр», 196158, Санкт-Петербург, Российская Федерация, Московское шоссе, 44.

A method of calculation of energy dissipation in hybrid composite structures

Y.I. Dimitrienko¹, E.A. Gubareva¹, N.N. Fedonyuk², D.O. Yakovlev¹¹ Bauman Moscow State Technical University, building 1, 2-nd Baumanskaya str., 5, 105005, Moscow, Russian Federation.² Krylov State Research Centre, Moskovskoe shosse, 44, 196158, St. Petersburg, Russian Federation.

e-mail: dimit.bmstu@gmail.com, gubareva_ea@pochta.ru, yadmtr@gmail.com



Для многих изделий машиностроения, авиастроения и судостроения важным элементом являются системы гашения вибраций из полимерных композиционных материалов, которые кроме высоких удельных упруго-прочностных свойств обладают и значительными диссипативными характеристиками, что обеспечивает возможность создания многофункциональных силовых конструкций, обладающих одновременно и значительными демпфирующими свойствами. Представлен метод расчета параметров рассеяния энергии в особых типах композитных конструкций — на основе гибридных материалов с различными типами армирующих волокон и полимерных матриц. Метод базируется на использовании модели линейно-вязкоупругих сред при установившихся колебаниях и асимптотической теории многослойных пластин, которая обобщена для вязкоупругих сред. Эта теория позволяет с высокой точностью вычислять все шесть компонент тензора напряжений в тонких многослойных композитных пластинах при циклическом нагружении, включая поперечные напряжения и напряжения межслойного сдвига, поскольку диссипативные свойства слоисто-волоконистых полимерных композитов проявляются, существенным образом, как раз в этих направлениях. С помощью разработанного метода проведено численное моделирование напряжений в вязкоупругой пластине из композитного гибридного слоисто-волоконистого материала при изгибных колебаниях на основе стеклянных и арамидных волокон, а также содержащего специальные слои высокодемпфирующего полимера МПВТ-А. Численные расчеты показали, что максимальные значения коэффициента рассеяния энергии реализуются в слоях композитной пластины из высокодемпфирующего материала МПВТ-А, а также в слоях с арамидными волокнами, обладающими вязкоупругими свойствами. Обнаружен эффект, состоящий в том, что максимум коэффициента рассеяния энергии в гибридной композитной пластине при изгибных колебаниях реализуется при определенном значении угла 35° . Этот эффект может быть использован при проектировании оптимальных структур гибридных композитных пластин.

Ключевые слова: рассеяние энергии, гибридные композиты, вязкоупругость, коэффициенты рассеяния, асимптотическая теория пластин.

* Исследование выполнено за счет средств Задания № 1.445.2014/К Минобрнауки РФ.

i Vibration damping systems made of polymer composite materials are important elements of engineering, aerospace, and shipbuilding products. These systems, along with high specific elastic and strength properties, have significant dissipative characteristics, which makes it possible to create multifunctional power structures with high damping properties. A method for calculating the energy dissipation parameters in special types of composite structures made of hybrid materials with various types of fiber reinforcements and polymer matrices is presented. The method is based on the linear viscoelastic media model under steady-state vibrations and the asymptotic theory of laminated plates generalized to viscoelastic media. This theory makes it possible to accurately calculate all components of the stress tensor in thin multilayered composite plates under cyclic loading including interlayer transverse stresses and strains. The dissipative properties of multilayered fiber polymer composites are manifested mainly in these directions. This method was used for the numerical simulation of flexural vibrations of a viscoelastic plate made of hybrid laminated composite material containing glass and aramid fibers, as well as special MPVT-A polymer layers. The results of analysis show that the energy dissipation is maximum in the MPVT-A polymer layers and in the layers containing viscoelastic aramid fibers. It has been found that the energy dissipation in a hybrid composite plate under flexural vibrations is maximum at a certain angle. This phenomenon can be used in the design of optimal structures of hybrid composite plates.

Keywords: energy dissipation, hybrid composites, viscoelasticity, damping coefficients, asymptotic plate theory.

Полимерные композиционные материалы кроме высоких удельных упруго-прочностных характеристик имеют существенные диссипативные характеристики, что позволяет создавать на их основе силовые конструкции, обладающие одновременно и значительными демпфирующими свойствами [1–3]. Особый интерес представляют конструкции из гибридных композитов, в которых используется несколько типов армирующих волокон, например, стеклянные и арамидные, имеющие ярко выраженные диссипативные свойства [4]. Такие гибридные композиты позволяют за счет определенного подбора их структуры получать материалы с разнообразными свойствами, которыми не обладают традиционные композиты с одним типом армирующих наполнителей [5–7]. Перспективным является исследование возможности создания конструкций из гибридных композитов, имеющих одновременно высокие жесткостные и диссипативные характеристики. Эта проблема до настоящего времени еще не была исследована. Для анализа достаточно тонких эффектов влияния внутренней структуры армирования гибридных композитов на их жесткостные и диссипативные свойства необходимы высокоточные методы расчета параметров рассеяния энергии.

Существующие методики расчета диссипации (рассеяния) энергии в композитных конструкциях [1, 2, 8, 9] основаны на инженерных подходах к определению коэффициентов демпфирования на основе так называемых упруго-диссипативных моделей и приближенных те-

ориях расчета упругих напряжений в пластинах, которые не учитывают поперечных напряжений и напряжений межслойного сдвига. Поскольку диссипативные свойства полимеров проявляются существенным образом как раз при межслойных сдвигах, для точного расчета рассеяния энергии в композитных конструкциях необходима разработка теории, в которой рассчитывались бы все шесть напряжений.

Цель работы — разработка метода расчета рассеяния энергии в конструкциях из гибридных композитов.

Для моделирования диссипативных характеристик в работе используется не приближенная упруго-диссипативная модель материалов, а хорошо теоретически обоснованная модель вязкоупругого поведения полимерных композиционных материалов [10–12]. Расчет всех шести ненулевых компонент тензора напряжений в вязкоупругих конструкциях осуществляется на основе обобщения асимптотической теории тонких пластин, предложенной в работах [13–17], для вязкоупругих материалов.

Коэффициенты рассеяния энергии в вязкоупругих конструкциях. Рассмотрим конструкцию, механическое поведение которой можно моделировать с помощью модели линейно-вязкоупругой среды [18]. В этом случае при моногармонических колебаниях такой среды тензоры напряжений и деформаций являются моногармоническими функциями

$$\sigma_{ij} = \text{Re}(\sigma_{ij}^* e^{i\omega t}); \quad \epsilon_{ij} = \text{Re}(\epsilon_{ij}^* e^{i\omega t}),$$

где σ_{ij}^* , ϵ_{ij}^* — комплексные амплитуды тензоров напряжений и деформаций; $\text{Re}(\cdot)$ — действительная часть комплексной величины; i — мнимая единица; ω — частота колебаний.

Введем локальный коэффициент рассеяния энергии, который определен для каждой точки конструкции с декартовыми координатами x_m :

$$\delta = w^* / \psi. \quad (1)$$

Здесь w^* — функция рассеяния энергии, осредненная за цикл колебаний. В качестве ψ выберем накопленную энергию за цикл колебаний, которые определяются по формулам [18]

$$w^* = \frac{\omega}{2} (\text{Re}(\sigma_{ij}^*) \text{Im}(\epsilon_{ij}^*) - \text{Im}(\sigma_{ij}^*) \text{Re}(\epsilon_{ij}^*)); \quad (2)$$

$$\psi = \frac{\omega}{2} (\text{Re}(\sigma_{ij}^*) \text{Re}(\epsilon_{ij}^*) + \text{Im}(\sigma_{ij}^*) \text{Im}(\epsilon_{ij}^*)), \quad (3)$$

где $\text{Im}(\cdot)$ — мнимая часть комплексной величины.

Для линейно-вязкоупругих сред амплитуды тензоров напряжений и деформаций связаны следующими линейными соотношениями:

$$\sigma_{ij}^* = C_{ijkl}^*(\omega, x_m) \epsilon_{kl}^*; \quad \epsilon_{ij}^* = \Pi_{ijkl}^*(\omega, x_m) \sigma_{kl}^*, \quad (4)$$

Здесь $C_{ijkl}^*(\omega, x_m)$ — тензор комплексных модулей упругости; $\Pi_{ijkl}^*(\omega, x_m)$ — обратный к нему тензор комплексных податливостей, $\Pi_{ijkl}^* = C_{ijkl}^{*-1}$. Эти тензоры зависят от частоты колебаний, а для неоднородных конструкций, к которым относятся конструкции из композитов, тензоры C_{ijkl}^* и Π_{ijkl}^* зависят также и от координат x_m .

Подставив соотношения (4) в (2) и (3), выразим w^* и ψ через амплитуды напряжений:

$$w^* = \frac{\omega}{2} \Pi_{ijkl}'' (\text{Re}(\sigma_{ij}^*) \text{Re}(\sigma_{kl}^*) + \text{Im}(\sigma_{ij}^*) \text{Im}(\sigma_{kl}^*)); \quad (5)$$

$$\psi = \frac{\omega}{2} \text{Re}(\Pi_{ijkl}^*) (\text{Re}(\sigma_{ij}^*) \text{Re}(\sigma_{kl}^*) + \text{Im}(\sigma_{ij}^*) \text{Im}(\sigma_{kl}^*)),$$

где $\Pi_{ijkl}'' = -\text{Im}(\Pi_{ijkl}^*)$.

Введем интегральный коэффициент рассеяния энергии конструкции, который определим следующим образом:

$$\bar{\delta} = \frac{W^*}{\Psi}; \quad W^* = \int_V w^* dV; \quad \Psi = \int_V \psi dV. \quad (6)$$

Если конструкция представляет собой плоскую пластину, то суммарные величины рассеяния энергии W^* и накопленной энергии Ψ можно представить в виде

$$W^* = \int_{\Sigma} \int_{-0.5}^{0.5} w^* d\xi d\Sigma; \quad \Psi = \int_{\Sigma} \int_{-0.5}^{0.5} \psi d\xi d\Sigma. \quad (7)$$

Здесь Σ — срединная поверхность пластины; $\xi = x_3/h$ — безразмерная координата по нормали к срединной поверхности пластины; h — толщина пластины.

Многослойные гибридные композитные пластины. Рассмотрим случай когда пластина представляет собой гибридный слоисто-волоконистый композит (ГСВК), часть слоев которого является однонаправленными материалами, вообще говоря с различными типами волокон (гибридные композиты), повернутыми на угол ϕ_α вокруг оси Ox_3 , а другая часть слоев — это изотропные материалы, где $\alpha \in \{1 \dots N\}$, N — число слоев в пластине. В единой для всех слоев ГСВК системе координат Ox_m компоненты тензора комплексных модулей упругости α -го слоя вычисляются с помощью формул преобразования компонент тензора 4-го ранга [19]:

$$C_{ijkl}^*(\omega, \xi) = C_{mnpq}^{*\alpha}(\omega) Q_{im}^\alpha Q_{jn}^\alpha Q_{kp}^\alpha Q_{lq}^\alpha, \quad (8)$$

$$\xi \in [\xi_{\alpha-1}, \xi_\alpha].$$

Здесь Q_{im}^α — элементы матрицы поворота слоя с номером α ,

$$[Q_{im}^\alpha] = \begin{bmatrix} \cos \phi_\alpha & \sin \phi_\alpha & 0 \\ -\sin \phi_\alpha & \cos \phi_\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad (9)$$

$\xi_{\alpha-1}$, ξ_α — координаты α -го слоя по направлению Ox_3 ; $C_{ijkl}^{*\alpha}(\omega)$ — компоненты тензора комплексных модулей упругости слоя в повернутой (собственной) системе координат $Ox_m^{(\alpha)}$ слоя, ось $Ox_1^{(\alpha)}$ которой совпадает с направлением ориентации волокон каждого слоя. Для однонаправленных слоев компоненты $C_{ijkl}^{*\alpha}$ тензоров комплексных модулей упругости в собственной системе координат вычисляются следующим образом [20]:

$$C_{1111}^{*\alpha} = \frac{E_L^{*\alpha}}{\Delta^*} (1 - \nu_T^{*\alpha 2});$$

$$C_{2222}^{*\alpha} = C_{3333}^{*\alpha} = \frac{E_T^{*\alpha}}{\Delta^*} (1 - \nu_L^{*\alpha 2} \kappa^*);$$

$$C_{2233}^{*\alpha} = \frac{E_T^{*\alpha}}{\Delta^*} (\nu_T^{*\alpha} + \nu_L^{*\alpha} \kappa^*); \quad (10)$$

$$C_{1133}^{*\alpha} = C_{1122}^{*\alpha} = \frac{\nu_L^{*\alpha} E_T^{*\alpha}}{\Delta^*} (1 + \nu_T^{*\alpha});$$

$$C_{1313}^{*\alpha} = C_{1212}^{*\alpha} = G_L^{*\alpha}; \quad C_{2323}^{*\alpha} = G_T^{*\alpha};$$

$$\Delta^* = 1 - \nu_T^{*\alpha 2} - 2\nu_L^{*\alpha 2} (1 + \nu_T^{*\alpha}) \kappa^*; \quad \kappa^* = \frac{E_T^{*\alpha}}{E_L^{*\alpha}}.$$

Здесь $E_L^{*\alpha}$ — продольный комплексный модуль упругости однонаправленного (1D) слоя в направлении ориентации волокон; $E_T^{*\alpha}$ — поперечный комплексный модуль упругости слоя; $v_L^{*\alpha}$ — продольный комплексный коэффициент Пуассона; $v_T^{*\alpha}$ — поперечный комплексный коэффициент Пуассона; $G_L^{*\alpha}$ — продольный комплексный модуль сдвига; $G_T^{*\alpha}$ — поперечный комплексный модуль сдвига. Эти характеристики рассчитываются по смесевым формулам для 1D композита, состоящего из волокон и матрицы (для однонаправленных слоев и волокон и матрица полагаются вязкоупругими) [20]:

$$\begin{aligned} E_L^{*\alpha} &= E_f^{*\alpha}\varphi_f + E_m^{*\alpha}(1 - \varphi_f); \\ E_T^{*\alpha} &= \left(\frac{\varphi_f}{E_f^{*\alpha}} + \frac{1 - \varphi_f}{E_m^{*\alpha}} \right)^{-1}; \\ v_L^{*\alpha} &= v_f^{*\alpha}\varphi_f + v_m^{*\alpha}(1 - \varphi_f); \quad v_T^{*\alpha} = v_m^{*\alpha}; \\ G_L^{*\alpha} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\varphi_f(1 + v_f^{*\alpha})}{E_f^{*\alpha}} + \frac{(1 - \varphi_f)(1 + v_m^{*\alpha})}{E_m^{*\alpha}} \right)^{-1}; \\ G_T^{*\alpha} &= \frac{E_T^{*\alpha}}{2(1 + v_T^{*\alpha})}, \end{aligned} \quad (11)$$

где $E_f^{*\alpha}$ — модуль упругости волокон; $v_f^{*\alpha}$ — коэффициент Пуассона волокон; φ_f — относительное объемное содержание волокон в 1D композите; $E_m^{*\alpha}$ и $v_m^{*\alpha}$ — комплексные модуль упругости и коэффициент Пуассона матрицы, которые вычисляются через комплексный модуль сдвига $G_m^{*\alpha}$ и модуль объемного сжатия $K_m^{*\alpha}$ по формулам, подобным аналогичным формулам в теории упругости [18]:

$$E_m^{*\alpha} = \frac{9K_m^{*\alpha}G_m^{*\alpha}}{3K_m^{*\alpha} + G_m^{*\alpha}}; \quad v_m^{*\alpha} = \frac{3K_m^{*\alpha} - 2G_m^{*\alpha}}{6K_m^{*\alpha} + 2G_m^{*\alpha}}. \quad (12)$$

Предполагается, что матрица при всестороннем сжатии проявляет только упругие свойства [18], тогда модуль объемного сжатия является вещественной константой и рассчитывается по формуле

$$K_m^{*\alpha} = \frac{2G_m^{*\alpha}}{3} \frac{1 + v_m^{*\alpha}}{(1 - v_m^{*\alpha})},$$

где $v_m^{*\alpha}$ — начальное значение коэффициента Пуассона при $\omega = 0$. Для волокон коэффициент Пуассона полагается вещественной константой: $v_f^{*\alpha} = v_f^{*\alpha}$.

Часть слоев ГСВК представляет собой изотропные неармированные материалы. Для этих слоев также справедливы формулы (8)–(10),

но в них следует положить $\varphi_\alpha = 0$, $Q_{im}^{*\alpha} = \delta_{im}$, $E_L^{*\alpha} = E_T^{*\alpha} = E_m^{*\alpha}$, $v_L^{*\alpha} = v_T^{*\alpha} = v_m^{*\alpha}$, $G_L^{*\alpha} = G_T^{*\alpha} = G_m^{*\alpha}$, в результате формулы (8) и (10) принимают следующий вид:

$$\begin{aligned} C_{ijkl}^{*\alpha}(\omega, \xi) &= C_{ijkl}^{*\alpha}(\omega); \quad \xi \in [\xi_{\alpha-1}, \xi_\alpha]; \\ C_{1111}^{*\alpha} &= C_{2222}^{*\alpha} = C_{3333}^{*\alpha} = \frac{E_m^{*\alpha}}{\Delta^*}(1 - v_m^{*\alpha 2}); \\ C_{2233}^{*\alpha} &= C_{1133}^{*\alpha} = C_{1122}^{*\alpha} = \frac{v_m^{*\alpha} E_m^{*\alpha}}{\Delta^*}(1 + v_m^{*\alpha}); \\ C_{1313}^{*\alpha} &= C_{1212}^{*\alpha} = C_{2323}^{*\alpha} = G_m^{*\alpha}; \\ \Delta^* &= 1 - v_m^{*\alpha 2} - 2v_m^{*\alpha 2}(1 + v_m^{*\alpha}). \end{aligned}$$

Таким образом, в представленной модели ГСВК вязкоупругие свойства однонаправленных слоев определяются комплексными модулями сдвига матриц $G_m^{*\alpha}$ и комплексными модулями упругости волокон $E_f^{*\alpha}$, а для изотропных слоев СВК — только комплексными модулями сдвига $G_m^{*\alpha}$. Упругие свойства матриц, кроме того, характеризуются модулями объемного сжатия $K_m^{*\alpha}$, а для волокон — коэффициентами Пуассона $v_f^{*\alpha}$. Примем далее для характеристик $G_m^{*\alpha}$ и $E_f^{*\alpha}$ модель вязкоупругости с экспоненциальными ядрами релаксации [18] при учете температурно-временной аналогии. Тогда для $G_m^{*\alpha}$ и $E_f^{*\alpha}$ имеем следующие аналитические выражения от частоты колебаний [18]:

$$\begin{aligned} G_m^{*\alpha} &= \text{Re}(G_m^{*\alpha}) + i \text{Im}(G_m^{*\alpha}); \\ \text{Re}(G_m^{*\alpha}) &= G_m^{*\alpha} h_m^{*\alpha} + \sum_{\gamma=1}^N \frac{A_{m\gamma}^{*\alpha}}{1 + (\tilde{\omega}_m^{*\alpha} \tau_{m\gamma}^{*\alpha})^2}; \\ \text{Im}(G_m^{*\alpha}) &= \sum_{\gamma=1}^n \frac{A_{m\gamma}^{*\alpha} \tilde{\omega}_m^{*\alpha} \tau_{m\gamma}^{*\alpha}}{1 + (\tilde{\omega}_m^{*\alpha} \tau_{m\gamma}^{*\alpha})^2}; \\ E_f^{*\alpha} &= \text{Re}(E_f^{*\alpha}) + i \text{Im}(E_f^{*\alpha}); \\ \text{Re}(E_f^{*\alpha}) &= E_f^{*\alpha} h_f^{*\alpha} + \sum_{\gamma=1}^N \frac{A_{f\gamma}^{*\alpha}}{1 + (\tilde{\omega}_f^{*\alpha} \tau_{f\gamma}^{*\alpha})^2}; \\ \text{Im}(E_f^{*\alpha}) &= \sum_{\gamma=1}^n \frac{A_{f\gamma}^{*\alpha} \tilde{\omega}_f^{*\alpha} \tau_{f\gamma}^{*\alpha}}{1 + (\tilde{\omega}_f^{*\alpha} \tau_{f\gamma}^{*\alpha})^2}; \\ \tilde{\omega}_m^{*\alpha} &= \omega Z_m^{*\alpha}(\theta); \quad Z_m^{*\alpha}(\theta) = \exp\left(\frac{a_m^{*\alpha} \Delta \theta}{b_m^{*\alpha} + \Delta \theta}\right); \\ \tilde{\omega}_f^{*\alpha} &= \omega Z_f^{*\alpha}(\theta); \quad Z_f^{*\alpha}(\theta) = \exp\left(\frac{a_f^{*\alpha} \Delta \theta}{b_f^{*\alpha} + \Delta \theta}\right); \\ \alpha &= 1, \dots, N; \\ h_m^{*\alpha} &= (1 - d_m^{*\alpha}) \exp(-c_m^{*\alpha} \Delta \theta) + d_m^{*\alpha}; \\ h_f^{*\alpha} &= (1 - d_f^{*\alpha}) \exp(-c_f^{*\alpha} \Delta \theta) + d_f^{*\alpha}, \end{aligned} \quad (13)$$

где G_m^α , ν_m^α , $A_{m\gamma}^\alpha$, $\tau_{m\gamma}^\alpha$, a_m^α , b_m^α , d_m^α , c_m^α , E_f^α , ν_f^α , $A_{f\gamma}^\alpha$, $\tau_{f\gamma}^\alpha$, a_f^α , b_f^α , d_f^α , c_f^α , α — вещественные константы, характеризующие упругие и вязкоупругие свойства матриц и волокон в слоях ГСВК; θ — температура, $\Delta\theta = \theta - \theta_0$; θ_0 — начальное значение температуры.

После определения компонент тензора комплексных модулей упругости ГСВК C_{ijkl}^* по (8)–(13), вычислим компоненты тензора упругих податливостей $\Pi_{ijkl}^* = C_{ijkl}^{*-1}$. Для расчета коэффициентов рассеяния энергии (1) и (6) необходимо также рассчитать амплитуды напряжений $\sigma_{ij}^*(x_m)$ в рассматриваемой конструкции (пластине).

Расчет амплитуд напряжений в композитных пластинах. Рассмотрим квазистатические колебания пластины из ГСВК под действием давления на внешней и внутренней сторонах пластины $\xi = \pm 0,5$ с амплитудными значениями p_+^* и p_-^* . На торцах пластины заданы амплитуды колебаний перемещений u_{ei}^* . Распределение амплитуд напряжений $\sigma_{ij}^*(x_m)$ в пластине, рассматриваемой как трехмерное тело, под действием такой системы нагрузок будет определяться решением следующей задачи линейной вязкоупругости при установившихся колебаниях [18]:

$$\begin{aligned} \nabla_j \sigma_{ij}^* &= 0; \\ \varepsilon_{ij}^* &= \frac{1}{2} (\nabla_j u_i^* + \nabla_i u_j^*); \\ \sigma_{ij}^* &= C_{ijkl}^* \varepsilon_{kl}^*; \\ \Sigma_{3\pm} : \sigma_{i3}^* &= -\tilde{p}_\pm^* \delta_{i3}, \quad \Sigma_T : u_i^* = u_{ei}^*, \quad \Sigma_S : [\sigma_{i3}^*] = 0, \\ [u_3^*] &= 0, \end{aligned} \quad (15)$$

состоящей из уравнений равновесия, соотношений Коши, соотношений линейной вязкоупругости (4), граничных условий на внешней и внутренней поверхностях $\Sigma_{3\pm}$ (их уравнение имеет вид $\tilde{x}_3 = \pm h/2$) и на торцевой поверхности Σ_T , а также граничных условий на поверхности контакта Σ_S слоев пластины. Здесь $[u_3^*]$ — скачок функций; u_j^* — компоненты вектора комплексных амплитуд перемещений; $\nabla_j = \partial/\partial \tilde{x}_j$ — оператор дифференцирования по декартовым координатам.

Принимаем допущения: 1) малым является параметр $\kappa = h/L \ll 1$, представляющий собой отношение толщины пластины h к характерному размеру всей пластины L (ее максимальной длине); 2) амплитуда колебаний давления \tilde{p}_\pm^* на внешней и внутренней поверхностях пластины имеет порядок малости $O(\kappa^3)$ по сравнению

с E_0 . Характерное значение модуля упругости материала пластины (размерная величина)

$$\tilde{p}_\pm = \kappa^3 p_\pm; \quad p_\pm = O(1)E_0, \quad (16)$$

где $O(1)$ — безразмерная величина, порядка 1.

Для решения задачи (15) используем аналогию между упругим и линейно вязкоупругим решением [18]. Тогда, применяя асимптотический метод решения упругой задачи для многослойной пластины, предложенный в [13], выражения для компонент тензора амплитуд напряжений в вязкоупругой пластине, можно записать в следующем виде:

$$\begin{aligned} \sigma_{IJ}^* &= \sigma_{IJ}^{*(0)}; \quad \sigma_{33}^* = -\kappa^2 \int_{-0,5}^{\xi} (\langle \sigma_{3J,J}^{*(1)} \rangle - \sigma_{3J,J}^{*(1)}) d\xi + \\ &+ \kappa^3 \left[-p_-^* - \Delta p^*(\xi + 0,5) + \int_{-0,5}^{\xi} (\langle \sigma_{3J,J}^{*(2)} \rangle - \sigma_{3J,J}^{*(2)}) d\xi \right]; \\ \sigma_{I3}^* &= \kappa \sigma_{I3}^{*(1)} + \kappa^2 \int_{-0,5}^{\xi} (\langle \sigma_{IJ,J}^{*(1)} \rangle - \sigma_{IJ,J}^{*(1)}) d\xi. \end{aligned} \quad (17)$$

Здесь и далее индексы I, J, K, L пробегает значения 1, 2. Входящие в эти выражения напряжения $\sigma_{IJ}^{*(0)}$, $\sigma_{I3}^{*(1)}$, $\sigma_{IJ}^{*(1)}$ и $\sigma_{I3}^{*(2)}$ вычисляются по формулам

$$\begin{aligned} \sigma_{IJ}^{*(0)} &= C_{IJKL}^{*(0)} \varepsilon_{KL}^{*(0)}; \\ \sigma_{IJ}^{*(1)} &= \xi C_{IJKL}^{*(0)} \eta_{KL}^* + \tilde{N}_{IJKLM}^{*(0)} \varepsilon_{KL,M}^{*(0)}; \\ \sigma_{I3}^{*(1)} &= \varepsilon_{KL,J}^{*(0)} \int_{-0,5}^{\xi} (\langle C_{IJKL}^{*(0)} \rangle - C_{IJKL}^{*(0)}) d\xi; \\ \sigma_{33}^{*(1)} &= 0; \quad \sigma_{33}^{*(2)} = \int_{-0,5}^{\xi} (\langle \sigma_{IJ,J}^{*(1)} \rangle - \sigma_{IJ,J}^{*(1)}) d\xi, \end{aligned} \quad (18)$$

где тензоры осредненных вязкоупругих констант пластины

$$\begin{aligned} C_{IJKL}^{*(0)} &= C_{IJKL}^* - C_{IJK3}^* C_{k3i3}^{*-1} C_{i3KL}^*; \\ \bar{C}_{IJKL}^* &= \langle C_{IJKL}^{*(0)} \rangle = \langle C_{IJKL}^* \rangle - \langle C_{IJK3}^* C_{k3i3}^{*-1} C_{i3KL}^* \rangle; \\ \tilde{N}_{IJKLM}^{*(0)} &= N_{IJKLM}^{*(0)} + \Phi_{IJKLM}^*; \\ N_{IJKLM}^{*(0)} &= -C_{IJK3}^* C_{k3P3}^{*-1} \int_{-0,5}^{\xi} (\langle C_{PMKL}^{*(0)} \rangle - C_{PMKL}^{*(0)}) d\xi; \\ \Phi_{KLMNS}^*(\xi) &= \tilde{\Phi}_{KLMNS}^*(\xi) - \langle \tilde{\Phi}_{KLMNS}^*(\xi) \rangle; \\ \tilde{\Phi}_{KLMNS}^*(\xi) &= - \int_{-0,5}^{\xi} (C_{K3i3}^{*-1} \delta_{SL} + C_{L3i3}^{*-1} \delta_{SK}) C_{i3MN}^* d\xi. \end{aligned} \quad (19)$$

В формуле (19) введена операция осреднения по толщине пластины

$$\langle u_i^{*(1)} \rangle = \int_{-0,5}^{0,5} u_i^{*(1)} d\xi. \quad (20)$$

Компоненты тензора амплитуд деформаций $\varepsilon_{IJ}^{*(0)}$ и кривизн η_{KL}^* срединной поверхности пластины определяются по формулам

$$\eta_{KL}^* = -u_{3,KL}^{*(0)}; \quad \varepsilon_{IJ}^{*(0)} = \frac{1}{2}(u_{I,J}^{*(0)} + u_{J,I}^{*(0)}) \quad (21)$$

и зависят от трех функций: $u_I^{*(0)}$ — амплитуд продольных перемещений пластины и $u_3^{*(0)}$ — амплитуды прогиба, для вычисления которых имеем следующую систему дифференциальных уравнений квазистатических колебаний теории пластин и определяющих соотношений теории пластин:

$$T_{IJ,J}^* = 0; \quad Q_{J,J}^* = \Delta \bar{p}^*; \quad M_{IJ,J}^* - Q_I^* = 0; \quad (22)$$

$$T_{IJ}^* = \bar{C}_{IJKL}^* \varepsilon_{KL}^{*(0)} + B_{IJKL}^* \eta_{KL}^* + \pm \varepsilon_{KL,M}^{*(0)};$$

$$M_{IJ}^* = B_{IJKL}^* \varepsilon_{KL}^{*(0)} + D_{IJKL}^* \eta_{KL}^* + \bar{K}_{IJKLM}^* \varepsilon_{KL,M}^{*(0)}.$$

Здесь T_{IJ}^* — амплитуды усилий; M_{IJ}^* — амплитуды моментов; Q_I^* — амплитуды перерезывающих сил. Компоненты осредненных тензоров $B_{IJKL}^*, D_{IJKL}^*, K_{IJKLM}^*$ и \bar{K}_{IJKLM}^* вычисляются по формулам

$$B_{IJKL}^* = \kappa \langle \xi C_{IJKL}^{(0)} \rangle; \quad K_{IJKLM}^* = \kappa \langle \xi \tilde{N}_{IJKLM}^{(0)} \rangle;$$

$$K_{IJKL}^* = \kappa \langle \int_{-0,5}^{\xi} (\langle C_{IJKL}^{(0)} \rangle - C_{IJKL}^{(0)}) d\xi \rangle; \quad (23)$$

$$\bar{D}_{IJKL}^* = \kappa^2 \langle \xi^2 C_{IJKL}^{(0)} \rangle; \quad \bar{K}_{IJKLM}^* = \kappa^2 \langle \xi \tilde{N}_{IJKLM}^{(0)} \rangle.$$

Выражения (17) дают точные значения для компонент напряжений с точностью до членов 1-го порядка малости для σ_{IJ}^* и 3-го порядка малости для σ_{I3}^* и σ_{33}^* относительно параметра κ .

Амплитуды перемещений в пластине с точностью до членов 2-го порядка малости имеют следующий вид:

$$u_I^* = u_I^{*(0)} + \kappa \left(-\xi u_{3,I}^{*(0)} + \varepsilon_{KL}^{*(0)} U_{IKL}^*(\xi) \right); \quad (24)$$

$$u_3^* = u_3^{*(0)} + \kappa \varepsilon_{KL}^{*(0)} U_{3KL}^*(\xi),$$

где

$$U_{iKL}^*(\xi) = 2 \left(\langle \int_{-0,5}^{\xi} C_{i3j3}^{*-1} C_{j3KL}^* d\xi \rangle - \int_{-0,5}^{\xi} C_{i3j3}^{*-1} C_{j3KL}^* d\xi \right). \quad (25)$$

Изгибные колебания многослойных пластин. Рассмотрим задачу об изгибных квазистатических колебаниях многослойной вязкоупругой пластины прямоугольной формы под действием равномерно распределенного давления. Полагаем, что слои пластины расположены

симметрично относительно плоскости $\xi = 0$. В этом случае для задачи изгиба пластины нулевыми являются следующие функции:

$$u_I^{*(0)} = 0; \quad \varepsilon_{KL}^{*(0)} = 0; \quad T_{IJ}^* = 0; \quad (26)$$

$$\sigma_{IJ}^{*(0)} = 0; \quad \sigma_{I3}^{*(1)} = 0,$$

а ненулевыми неизвестными функциями — только $u_3^{*(0)}(x)$, $M_{11}^*(x)$, $Q_1^*(x)$. Здесь $x = x_1$ — безразмерная продольная координата пластины. Тогда тождественно ненулевые уравнения (12) и кинематические соотношения (14) принимают вид

$$M_{11,11}^* = \Delta \bar{p}^*; \quad M_{11}^* = D_{1111}^* \eta_{11}^*; \quad \eta_{11}^* = -u_{3,11}^{*(0)}. \quad (27)$$

Решение уравнений (27) вместе с граничными условиями шарнирного закрепления: при $x = 0$ и $x = 1$: $u_3^{*(0)} = 0$, $u_{3,11}^{*(0)} = 0$ — это решение для прогиба пластины в теории Кирхгофа — Лява [18]:

$$u_3^{*(0)} = -\frac{\Delta \bar{p}^*}{24 D_{11}^*} x(x^3 - 2x^2 + 1); \quad (28)$$

$$D_{11}^* = \langle \xi^2 C_{1111}^{*(0)} \rangle,$$

тогда напряжения (16) принимают следующий вид:

$$\sigma_{IJ}^* = \frac{C_{IJ11}^{*(0)} \Delta \bar{p}^*}{2\kappa^2 D_{11}^*} \xi x(x-1);$$

$$\sigma_{I3}^* = \frac{\Delta \bar{p}^*}{\kappa D_{11}^*} \left(x - \frac{1}{2} \right) \int_{-0,5}^{\xi} (\langle \xi C_{1111}^{*(0)} \rangle - \xi C_{1111}^{*(0)}) d\xi; \quad (29)$$

$$\sigma_{33}^* = -\tilde{p}^* - \Delta \bar{p}^* (\xi + 0,5) + \frac{\Delta \bar{p}^*}{D_{11}^*} \int_{-0,5}^{\xi} (\langle \sigma^{*(2)} \rangle - \sigma^{*(2)}) d\xi.$$

Здесь $\Delta \bar{p}^* = \kappa^3 \Delta p^*$; $\tilde{p}^* = \kappa^3 p^*$, а также учтено, что

$$\frac{\Delta \bar{p}^*}{D_{1111}^*} = \frac{\Delta p^*}{D_{11}^*} = \frac{\Delta \tilde{p}^*}{\kappa^3 D_{11}^*}.$$

Результаты численного моделирования. Применим разработанную методику для расчета коэффициентов рассеяния энергии в ГБСК, которые состоят из семи слоев ($N = 7$): слои 1 и 7 — однонаправленные композиты с волокнами 1-го типа и матрицей 1-го типа; слои 3 и 5 — однонаправленные композиты с волокнами 2-го типа и матрицей 1-го типа; остальные слои (№ 2, 4 и 6) — изотропные неармированные материалы с матрицей 2-го типа. Таким образом, в таком ГБКМ имеется четыре различных типа материала: два типа волокон и два типа матриц. В качестве матрицы 1-го типа была выбрана

матрица эпоксидного типа — один из наиболее широко применяемых типов полимерных матриц для волокнистых композитов, а в качестве матрицы 2-го типа был выбран тетразол-содержащий полимер МПВТ-А (поли-N-метилаллил-5-винилтетразол), обладающий повышенными вязкоупругими свойствами [21]. Армирующие волокна 1-го типа были выбраны стеклянными. Эти волокна практически не проявляют вязкоупругих свойств и поэтому полагались упругими, а в качестве волокон 2-го типа были выбраны органические волокна Армос [4], которые проявляют достаточно существенные вязкоупругие свойства, эти волокна при численном моделировании рассматривались как вязкоупругие. Константы (14) для эпоксидной матрицы ЭД-20 имеют следующие значения:

$$\begin{aligned} G_m^\alpha &= 0,5 \text{ ГПа}; \quad \nu_m^\alpha = 0,35; \quad c_m^\alpha = 0,01; \\ d_m^\alpha &= 0,02; \quad n_m = 1; \quad A_{m1}^\alpha = 0,5 \text{ ГПа}; \\ \tau_{m1}^\alpha &= 10^{-4} \text{ с}; \quad a_m^\alpha = 30 \text{ К}; \quad b_m^\alpha = 300 \text{ К}, \\ \alpha &= 1, 3, 5, 7. \end{aligned} \quad (30)$$

Константы (14) для тетразолсодержащего полимера МПВТ-А имеют следующие значения:

$$\begin{aligned} G_m^\alpha &= 0,2 \text{ ГПа}; \quad \nu_m^\alpha = 0,35; \quad c_m^\alpha = 0,01; \\ d_m^\alpha &= 0,02; \quad n_m = 1; \quad A_{m1}^\alpha = 0,9 \text{ ГПа}; \\ \tau_{m1}^\alpha &= 10^{-3} \text{ с}; \quad a_m^\alpha = 20 \text{ К}; \quad b_m^\alpha = 300 \text{ К}, \\ \alpha &= 2, 4, 6. \end{aligned} \quad (31)$$

Характеристики арамидных вязкоупругих волокон:

$$\begin{aligned} E_f^\alpha &= 120 \text{ ГПа}; \quad \nu_f^\alpha = 0,25; \quad c_f^\alpha = 0,003; \\ d_f^\alpha &= 0,02; \quad n_m = 1; \quad A_{f1}^\alpha = 120 \text{ ГПа}; \\ \tau_{f1}^\alpha &= 10^{-5} \text{ с}; \quad a_f^\alpha = 30 \text{ К}; \quad b_f^\alpha = 300 \text{ К}, \\ \alpha &= 1, 7. \end{aligned} \quad (32)$$

Характеристики стеклянных упругих волокон:

$$\begin{aligned} E_f^\alpha &= 200 \text{ ГПа}; \quad \nu_f^\alpha = 0,25; \quad n_m = 1; \\ A_{f1}^\alpha &= 0 \text{ ГПа}, \quad \alpha = 3, 5. \end{aligned} \quad (33)$$

Коэффициент армирования 1D однонаправленных слоев с обоими типами волокон был принят равным 0,6. Все характеристики (30)–(33) полимерных материалов и волокон, кроме коэффициентов Пуассона, определялись путем наилучшей аппроксимации экспериментальных кривых изменения действительных частей модуля сдвига $\text{Re}(G_m^*(\theta))$ и модуля упругости $\text{Re}(E_f^*(\theta))$, а также экспериментальных зависимостей тангенсов углов потерь

$$\text{tg } \delta_{G_m^*}(\theta) = \text{Im}(G_m^*(\theta)) / \text{Re}(G_m^*(\theta));$$

$$\text{tg } \delta_{E_f^*}(\theta) = \text{Im}(E_f^*(\theta)) / \text{Re}(E_f^*(\theta))$$

от температуры материалов с помощью аналитических зависимостей (13).

Зависимости действительной части комплексных модулей сдвига $\text{Re}(G_m^*)$ полимера МПВТ-А и эпоксидной матрицы, а также относительной действительной части комплексного модуля упругости арамидного волокна $\text{Re}(E_f^*) / \text{Re}(E_f^*)_0$ от температуры показаны на рис. 1. Наибольшей теплостойкостью обладают арамидные волокна, а теплостойкость эпоксидной матрицы выше, чем у тетразолсодержащего полимера.

Зависимости от температуры тангенса угла механических потерь $\text{tg } \delta_{G_m^*}(\theta)$ для тетразолсодержащего полимера МПВТ-А и эпоксидной матрицы, а также тангенса угла механических

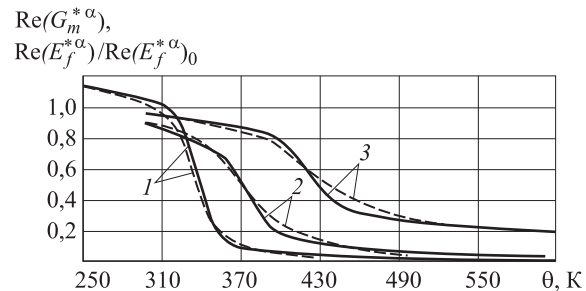


Рис. 1. Зависимости действительной части комплексных модулей сдвига $\text{Re}(G_m^*)$ тетразолсодержащего полимера МПВТ-А (1), эпоксидной матрицы (2) (ГПа) и относительной действительной части комплексного модуля упругости арамидного волокна $\text{Re}(E_f^*) / \text{Re}(E_f^*)_0$ (3) от температуры: — — — эксперимент; — — — аппроксимация по формулам (13)

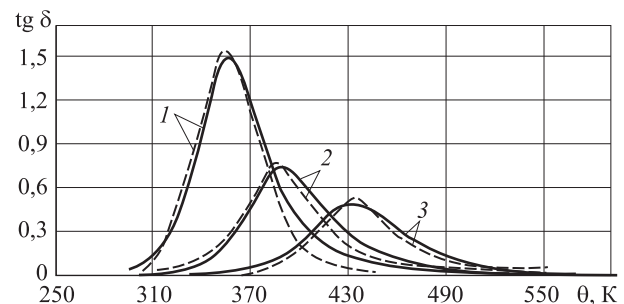


Рис. 2. Зависимости тангенса угла механических потерь $\text{tg } \delta_{G_m^*}$ для тетразолсодержащего полимера МПВТ-А (1), эпоксидной матрицы (2) и тангенса угла механических потерь $\text{tg } \delta_{E_f^*}$ (3)

для арамидного волокна от температуры: — — — эксперимент; — — — аппроксимация по формулам (13)

потерь $\text{tg } \delta_{E_f^\alpha}$ арамидных волокон, полученные экспериментально и путем аппроксимации по формулам (13), представлены на рис. 2. Экспериментальные данные по полимеру МПВТ-А заимствованы из работы [21], по эпоксидной матрице ЭД-20 — из работы [22], а по арамидным волокнам — из [4]. Полимер МПВТ-А имеет очень высокое значение экстремума тангенса угла механических потерь, превышающее 1, эпоксидная матрица имеет максимальное значение $\text{tg } \delta_{G_m^\alpha}(\theta) = 0,7$, а максимум тангенса угла потерь арамидных волокон составляет около 0,5. Однако все материалы отличаются температурой достижения экстремумов — 350, 395 и 440 К соответственно, что обуславливает различные частотные зависимости тангенсов угла потерь данных материалов в диапазоне 1...1 000 Гц (рис. 3). Максимум функции $\text{tg } \delta_{G_m^\alpha}(\omega)$ для МПВТ-А достигается на частоте $\omega_m = 65$ Гц, для эпоксидной матрицы этот максимум реализуется при $\omega_m = 382$ Гц, а для арамидного волокна частота экстремума превышает выбранную границу 1 КГц и функция $\text{tg } \delta_{E_f^\alpha}(\omega)$ в рассмотренном диапазоне является монотонновозрастающей.

ГСВК имеет 7-слойную структуру: $[0^\circ/\text{П}/+45^\circ/\text{П}/-45^\circ/\text{П}/0^\circ]$, где П — полимер МПВТ-А, относительные толщины слоев $h_\alpha = \xi_\alpha - \xi_{\alpha-1}$ были выбраны следующими: $h_2 = h_6 = 0,03$; $h_1 = h_7 = 0,225$; $h_3 = h_5 = 0,225$; $h_4 = 0,04$. Геометрические размеры пластины: $L = 1$ м, $h = 2 \cdot 10^{-2}$ м, давление на поверхностях пластины $\text{Re}(\tilde{p}_+^*) = 0,2$ МПа, $\text{Re}(\tilde{p}_-^*) = 0,1$ МПа.

Распределения действительных частей комплексных амплитуд тензоров изгибных напряжений $\text{Re} \sigma_{11}^*$, сдвиговых напряжений $\text{Re} \sigma_{13}^*$ и поперечных напряжений по толщине $\text{Re} \sigma_{33}^*$ пластины для различных значений продольной координаты x приведены на рис. 4. Максимальные значения изгибных напряжений $\text{Re} \sigma_{11}^*$ реализуются в 1-м и 7-м слоях с продольной ориентацией стеклянных волокон $\varphi_1 = \varphi_7 = 0^\circ$ в срединной части пластины при $x = 0,5$, а максимальные значения сдвиговых напряжений $\text{Re} \sigma_{13}^*$ — на краях пластины при $x = 0$ и 1 в 3-м и 5-м слоях с ориентацией арамидных волокон $\varphi_3 = 45^\circ$, $\varphi_5 = -45^\circ$. Поперечные напряжения $\text{Re} \sigma_{33}^*$ одинаковы для всех значений x . Для рассмотренного типа композита все действительные части комплексных амплитуд тензоров напряжений $\text{Re} \sigma_{ij}^*$ практически не зависят от частоты колебаний ω , в том числе сдвиговые и поперечные напряжения. Этот факт объясняется тем, что напряжения $\text{Re} \sigma_{13}^*$ и $\text{Re} \sigma_{11}^*$ соглас-

но формулам (29) определяются значениями комплексного модуля упругости $C_{1111}^{*(0)}$, которые практически не зависят от вязкоупругих свойств матрицы и арамидных волокон.

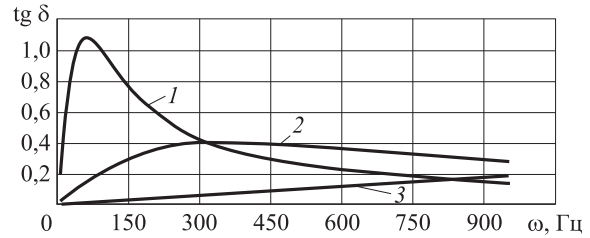


Рис. 3. Расчетные частотные зависимости тангенса угла механических потерь $\text{tg } \delta_{G_m^\alpha}$ для тетразолсодержащего полимера МПВТ-А (1), эпоксидной матрицы (2) и тангенса угла механических потерь $\text{tg } \delta_{E_f^\alpha}$ (3) для арамидного волокна

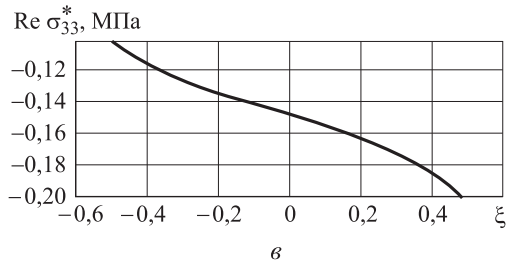
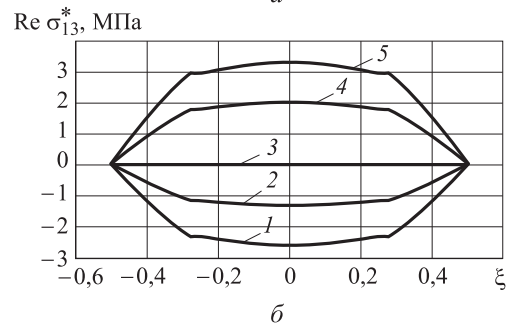
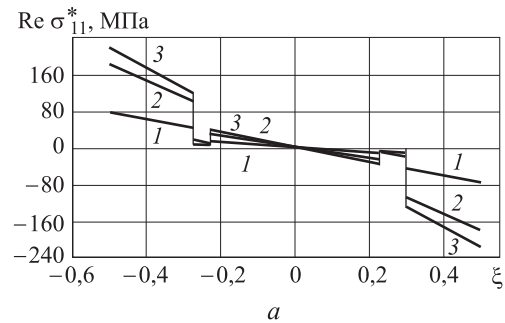


Рис. 4. Распределение действительной части амплитуды:

a — изгибных напряжений $\text{Re} \sigma_{11}^*$ по толщине пластины из ГСВК в различных зонах (1 — $x = 0,1$, 2 — $0,4$, 3 — $0,5$);

b — касательных напряжений $\text{Re} \sigma_{13}^*$ по толщине пластины из ГСВК в различных зонах (1 — $x = 0$, 2 — $0,25$, 3 — $0,5$, 4 — $0,75$, 5 — 1);

$в$ — поперечного напряжения $\text{Re} \sigma_{33}^*$ по толщине пластины из ГСВК

Распределения локального коэффициента (1) рассеяния энергии по пластине представлены на рис. 5. Результаты расчетов показывают, что максимальные значения коэффициента рассеяния энергии реализуются в слоях композитной пластины № 2, 4 и 6 из высокодемпфирующего материала МПВТ-А, а также в слоях с арамидными волокнами с ориентацией волокон $\pm 45^\circ$. Значения коэффициента рассеяния энергии в слоях с продольной ориентацией стеклянных волокон 0° значительно меньше.

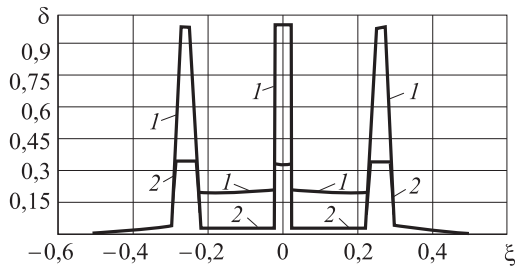


Рис. 5. Распределение локального коэффициента демпфирования $\delta(x, \xi)$ по толщине композитной пластины в различных зонах для частоты 15 Гц:
1 — $x = 0,25$, 2 — $x = 0,5$

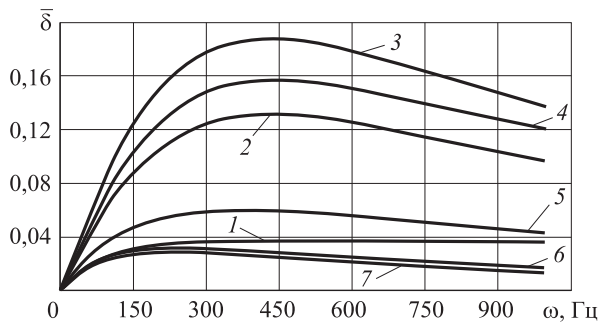


Рис. 6. Зависимость интегрального коэффициента рассеяния энергии от частоты колебаний композитной пластины для различных углов ориентации арамидных волокон в ГСВК:
1 — $\varphi_3 = 0^\circ$; 2 — $\varphi_3 = 15^\circ$; 3 — $\varphi_3 = 30^\circ$; 4 — $\varphi_3 = 45^\circ$;
5 — $\varphi_3 = 60^\circ$; 6 — $\varphi_3 = 75^\circ$; 7 — $\varphi_3 = 90^\circ$

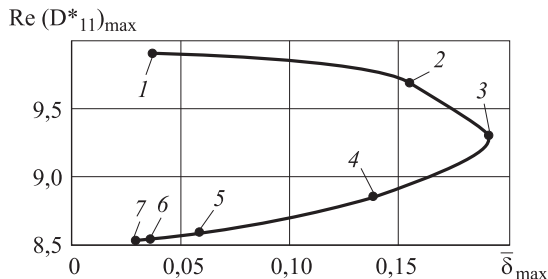


Рис. 7. Соотношение между действительной частью комплексной изгибной жесткости пластины $\text{Re}(D_{11}^*)_{\max}$ и интегральным коэффициентом рассеяния энергии $\bar{\delta}_{\max}$ для различных углов ориентации арамидных волокон в ГСВК:
1 — $\varphi_3 = 0^\circ$; 2 — $\varphi_3 = 15^\circ$; 3 — $\varphi_3 = 30^\circ$; 4 — $\varphi_3 = 45^\circ$;
5 — $\varphi_3 = 60^\circ$; 6 — $\varphi_3 = 75^\circ$; 7 — $\varphi_3 = 90^\circ$

Зависимость интегрального коэффициента рассеяния энергии $\bar{\delta}(\omega)$ (6) от частоты колебаний ω при различных значениях углов ориентации армирования φ_3 ($\varphi_5 = -\varphi_3$) арамидных волокон показана на рис. 6. Для угла $\varphi_3 = \varphi_5 = 0^\circ$ функция $\bar{\delta}(\omega)$ является монотонной и максимум функции достигается при максимальном значении частоты, при остальных значениях угла φ_3 функция $\bar{\delta}(\omega)$ имеет характерный максимум $\bar{\delta}_{\max}$ на некоторой частоте ω_{\max} , причем с увеличением угла φ_3 частота ω_{\max} снижается. Следует отметить, что при изменении угла φ_3 от 0 до 90° максимум функции $\bar{\delta}(\omega)$ изменяется не монотонно: сначала он возрастает до значения $\varphi_3 = 35^\circ$, а потом начинает убывать при изменении φ_3 от 35 до 90° . Таким образом максимальное рассеяние энергии в пластине из ГСВК реализуется при угле армирования арамидных волокон $\varphi_3 = 35^\circ$.

Для проектирования композитных пластин, обладающих одновременно высокими жесткостными и демпфирующими свойствами, введем специальную параметрическую характеристику: зависимость действительной части комплексной изгибной жесткости пластины $\text{Re}(D_{11}^*)_{\max}$, определяемой по (29), от максимального значения интегрального коэффициента рассеяния энергии $\bar{\delta}_{\max}$ композитной пластины. Такая параметрическая характеристика для различных ГСВК с разными углами армирования φ_3 арамидных волокон, полученная расчетным путем по разработанной методике, представлена на рис. 7. Зависимость $\text{Re}(D_{11}^*)_{\max}$ от $\bar{\delta}_{\max}$ для ГСВК не является монотонной: значения угла $\varphi_3 = 35^\circ$ обеспечивают максимальные значения коэффициента рассеяния энергии при достаточно высоких значениях изгибной жесткости. Этот эффект может быть использован при проектировании оптимальных структур ГСВК.

Выводы

1. Разработан метод расчета рассеяния энергии в конструкциях из гибридных композиционных материалов, состоящих из двух типов армирующих волокон, полимерной матрицы и высокодемпфирующих промежуточных слоев между силовыми слоями. Метод основан на использовании модели вязкоупругих матриц и армирующих волокон, а также асимптотической теории тонких пластин для расчета напряжений в гибридной пластине. Важным преимуществом этой теории является возможность применения аналитических формул для

расчета всех шести компонент напряжений в слоях многослойных пластин.

2. Выполнено численное моделирование напряжений при изгибных колебаниях вязкоупругой пластине из композитного гибридного слоисто-волоконистого материала, на основе стеклянных и арамидных волокон, а также содержащего специальные слои высокодемпфирующего полимера МПВТ-А. Численные расчеты по разработанной теории показали, что максимальные значения коэффициента рассеяния энергии реализуются в слоях композитной пластины из высокодемпфирующего материала МПВТ-А и в слоях с арамидными волокнами,

обладающими вязкоупругими свойствами. Значения коэффициента рассеяния энергии в слоях с продольной ориентацией стеклянных волокон значительно меньше.

3. С помощью численного моделирования обнаружен эффект, состоящий в том, что при изменении угла ориентации арамидных волокон от 0 до 90° максимум коэффициента рассеяния энергии в гибридной композитной пластине при изгибных колебаниях реализуется при определенном значении угла 35°, этот эффект может быть использован при проектировании оптимальных структур гибридных композитных пластин.

Литература

- [1] Zinoviev P.A., Ermakov Y.N. *Energy Dissipation in Composite Materials*. Lancaster (USA), Technomic Publishing Co., 1994. 246 p.
- [2] Смердов А.А. Рассеяние энергии при колебаниях композитных оболочек. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2013, № 7. URL: <http://engjournal.ru/catalog/machin/rocket/858.html> (дата обращения 28 августа 2014).
- [3] Зиновьев П.А., Смердов А.А., Кулиш Г.Г. Экспериментальное исследование упруго диссипативных характеристик углепластиков. *Механика композитных материалов*, 2003, т. 39, № 5, с. 595–602.
- [4] Ульяновко С.Н., Магомедов Г.М., Лебедев Л.Б., Машиноская Г.П., Зеленев Ю.В. Роль межфазного слоя в формировании вязкоупругих свойств высокопрочного органо-пластика. *Механика композитных материалов*, 1987, № 3, с. 414–419.
- [5] Ушаков А.Е., Кленин Ю.Г., Сорина Т.Г., Хайретдинов А.Х., Сафонов А.А. Мостовые конструкции из композитов. *Композиты и наноструктуры*, 2009, № 3, с. 25–37.
- [6] Димитриенко Ю.И., Яковлев Н.О., Ерасов В.С., Федонюк Н.Н., Сборщиков С.В., Губарева Е.А., Крылов В.Д., Григорьев М.М., Прозоровский А.А. Разработка многослойного полимерного композиционного материала с дискретным конструктивно-ортотропным наполнителем. *Композиты и наноструктуры*, 2014, т. 6, № 1, с. 32–48.
- [7] Димитриенко Ю.И., Федонюк Н.Н., Губарева Е.А., Сборщиков С.В., Прозоровский А.А. Многомасштабное конечно-элементное моделирование трехслойных сотовых композитных конструкций. *Наука и образование. МГТУ им. Н.Э. Баумана*, 2014, № 7. URL: <http://technomag.bmstu.ru/doc/717805.html>, doi: 10.7463/0714.0717805 (дата обращения 28 августа 2014).
- [8] Соломатов В.И., Черкасов В.Д., Фомин Н.Е. *Вибропоглощающие композиционные материалы*. Саранск, Изд-во Мордовского ун-та, 2001. 95 с.
- [9] Черкасов В.Д., Юркин Ю.В., Авдонин В.В. Прогнозирование демпфирующих свойств композита с учетом температурной зависимости свойств полимера. *Вестник ТГАСУ*, 2012, № 4, с. 216–225.
- [10] Matzenmiller A., Gerlach S. Micromechanical modeling of viscoelastic composites with compliant fiber–matrix bonding. *Computational Materials Science*, 2004, vol. 29, issue 3, pp. 283–300.
- [11] Haasemann G., Ulbricht V. Numerical evaluation of the viscoelastic and viscoplastic behavior of composites. *Technische Mechanik*, 2010, vol. 30, no. 1–3, pp. 122–135.
- [12] Masoumi S., Salehi M., Akhlaghi M. Nonlinear Viscoelastic Analysis of Laminated Composite Plates – A Multi Scale Approach. *International Journal of Recent advances in Mechanical Engineering (IJMECH)*, 2013, vol. 2, no. 2, pp. 11–18.
- [13] Димитриенко Ю.И. Асимптотическая теория многослойных тонких пластин. *Вестник МГТУ им. Н.Э.Баумана. Сер. Естественные науки*, 2012, № 3, с. 86–100.
- [14] Димитриенко Ю.И., Яковлев Д.О. Сравнительный анализ решений асимптотической теории многослойных тонких пластин и трехмерной теории упругости. *Инженерный*

- журнал: наука и инновации, 2013, № 7. URL: <http://engjournal.ru/catalog/mathmodel/technic/899.html> (дата обращения 15 августа 2014).
- [15] Димитриенко Ю.И., Губарева Е.А., Сборщиков С.В. Асимптотическая теория конструктивно-ортотропных пластин с двухпериодической структурой. *Математическое моделирование и численные методы*, 2014, № 1, с. 36–57.
- [16] Димитриенко Ю.И., Яковлев Д.О. Асимптотическая теория термоупругости многослойных композитных пластин. *Механика композиционных материалов и конструкций*, 2014, т. 20, № 2, с. 260–282.
- [17] Шешенин С.В. Асимптотический анализ периодических в плане пластин. *Известия РАН. Механика твердого тела*, 2006, № 6, с. 71–79.
- [18] Димитриенко Ю.И. *Механика сплошной среды. Т. 4: Основы механики твердых тел*. Москва, Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2013. 580 с.
- [19] Димитриенко Ю.И. *Механика сплошной среды. Т. 1: Тензорный анализ*. Москва, Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2011. 463 с.
- [20] Димитриенко Ю.И., Сборщиков С.В., Соколов А.П., Шпакова Ю.В. Численное моделирование процессов разрушения тканевых композитов. *Вычислительная механика сплошных сред*, 2013, т. 6, № 4, с. 389–402, doi: 10.7242/1999-6691/2013.6.4.43.
- [21] Пазников Е.А., Белоусов А.М., Петреков П.В., Насонов А.Д., Калинин М.А. Исследование вязкоупругих свойств структурированного тетразолсодержащего полимера акустическим методом. *Ползуновский вестник*, 2008, № 1–2, с. 63–65.
- [22] Хоанг Тхе Ву, Осипчик В.С., Смотрова С.А., Горбунова И.Ю. Влияние добавок эластомера на свойства эпоксидных композиций. *Пластические массы*, 2008, № 4, с. 32–34.

References

- [1] Zinoviev P.A., Ermakov Y.N. *Energy Dissipation in Composite Materials*, Lancaster (USA), Technomic Publishing Co., 1994. 246 p.
- [2] Smerdov A.A. Rasseianie energii pri kolebaniiaxh kompozitnykh obolochek [Energy dissipation in vibration of composite shells]. *Inzhenernyi zhurnal: nauka i innovatsii* [Engineering Journal: Science and Innovation]. 2013, no. 7. Available at: <http://engjournal.ru/catalog/machin/rocket/858.html> (accessed 28 August 2014).
- [3] Zinov'ev P.A., Smerdov A.A., Kulish G.G. Experimental Investigation of Elastodissipative Characteristics of Carbon-Fiber-Reinforced Plastics. *Mechanics of Composite Materials*, 2003, vol. 39, no. 5, pp. 393–398.
- [4] Ul'ianenko S.N., Magomedov G.M., Lebedev L.B., Mashinoskaia G.P., Zelenev Iu.V. Rol' mezhfaznogo sloia v formirovanii viazkouprugikh svoistv vysokoprochnogo organoplastika [Role in the formation of the interfacial layer of visco-elastic properties of high organoplastic]. *Mekhanika kompozitnykh materialov* [Mechanics of Composite Materials]. 1987, no. 3, pp. 414–419.
- [5] Ushakov A.E., Klenin Iu.G., Sorina T.G., Khairtdinov A.Kh., Safonov A.A. Mostovye konstruksii iz kompozitov [Bridge structures made of composite materials] *Kompozity i nanostruktury* [Composites and Nanostructures]. 2009, no. 3, pp. 25–37.
- [6] Dimitrienko Iu.I., Iakovlev N.O., Erasov V.S., Fedoniuk N.N., Sborshchikov S.V., Gubareva E.A., Krylov V.D., Grigor'ev M.M., Prozorovskii A.A. Razrabotka mnogosloinogo polimernogo kompozitsionnogo materiala s diskretnym konstruktivno-ortotropnym zapolnitelem [Development of a multilayer polymer composite material with discrete structural-orthotropic fillers]. *Kompozity i nanostruktury* [Composites and Nanostructures]. 2014, vol. 6, no. 1, pp. 32–48.
- [7] Dimitrienko Iu.I., Fedoniuk N.N., Gubareva E.A., Sborshchikov S.V., Prozorovskii A.A. Mnogomasshtabnoe konechno-elementnoe modelirovanie trekhslainykh sotovykh kompozitnykh konstruksii [Multiscale Finite-Element Modeling of Sandwich Honeycomb Composite Structures]. *Nauka i obrazovanie. MGTU im. N.E. Baumana* [Science and Education. Bauman MSTU]. 2014, no. 7. Available at: <http://technomag.bmstu.ru/doc/717805.html> (accessed 28 August 2014). Doi: 10.7463/0714.0717805.
- [8] Solomatov V.I., Cherkasov V.D., Fomin N.E. *Vibropogloshchaiushchie kompozitsionnye materialy* [Vibration composite materials]. Saransk, Ogarev Mordovia State University publ., 2001. 95 p.

- [9] Cherkasov V.D., Iurkin Iu.V., Avdonin V.V. Prognozirovaniye dempfiruiushchikh svoystv kompozita s uchetom temperaturnoi zavisimosti svoystv polimera [Forecasting of Damping Properties of Composite According to the Temperature Dependences of Polymer Properties]. *Vestnik TGASU* [Vestnik of TSUAB]. 2012, no. 4, pp. 216–225.
- [10] Matzenmiller A., Gerlach S. Micromechanical modeling of viscoelastic composites with compliant fiber–matrix bonding. *Computational Materials Science*, 2004, vol. 29, issue 3, pp. 283–300.
- [11] Haasemann G., Ulbricht V. Numerical evaluation of the viscoelastic and viscoplastic behavior of composites. *Technische Mechanik*, 2010, vol. 30, no. 1–3, pp. 122–135.
- [12] Masoumi S., Salehi M., Akhlaghi M. Nonlinear Viscoelastic Analysis of Laminated Composite Plates – A Multi Scale Approach. *International Journal of Recent advances in Mechanical Engineering (IJMECH)*, 2013, vol. 2, no. 2, pp. 11–18.
- [13] Dimitrienko Iu.I. Asimptoticheskaia teoriia mnogosloinnykh tonkikh plastin [Asymptotic theory of multilayer thin plates]. *Vestnik MGTU im. N.E. Baumana. Ser. Estestvennyye nauki* [Herald of the Bauman Moscow State Technical University. Ser. Natural Sciences]. 2012, no. 3, pp. 86–100.
- [14] Dimitrienko Iu.I., Iakovlev D.O. Sravnitel'nyi analiz reshenii asimptoticheskoi teorii mnogosloinnykh tonkikh plastin i trekhmernoi teorii uprugosti [Comparison analysis of asymptotic theory of multilayer composite plates and three-dimensional theory of elasticity]. *Inzhenernyi zhurnal: nauka i innovatsii* [Engineering Journal: Science and Innovations]. 2013, no. 7. Available at: <http://engjournal.ru/catalog/mathmodel/technic/899.html> (accessed 15 August 2014).
- [15] Dimitrienko Iu.I., Gubareva E.A., Sborshchikov S.V. Asimptoticheskaia teoriia konstruktivno-ortotropnykh plastin s dvukhperiodicheskoi strukturoi [Asymptotic theory of constructive-orthotropic plates with two-periodic structures]. *Matematicheskoe modelirovaniye i chislennyye metody* [Mathematical modeling and computational methods]. 2014, no. 1, pp. 36–57.
- [16] Dimitrienko Iu.I., Iakovlev D.O. Asimptoticheskaia teoriia termouprugosti mnogosloinnykh kompozitnykh plastin [Asymptotic theory of Thermoelasticity of Multilayer Composite Plates]. *Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruksii* [Journal on Composite Mechanics and Design]. 2014, vol. 20, no. 2, pp. 260–282.
- [17] Sheshenin S.V. Asimptoticheskii analiz periodicheskikh v plane plastin [Asymptotic analysis of plates with periodic cross-sections]. *Izvestiia Rossiiskoi akademii nauk. Mekhanika tverdogo tela* [A Journal of Russian Academy of Sciences. Mechanics of Solids]. 2006, no. 6, pp. 57–63.
- [18] Dimitrienko Iu.I. *Mekhanika sploshnoi sredy. Osnovy mekhaniki tverdykh sred* [Continuum Mechanics. Fundamentals of mechanics of solid media]. Moscow, Bauman Press, vol. 4, 2013. 580 p.
- [19] Dimitrienko Iu.I. *Mekhanika sploshnoi sredy. Tenzornyye analiz* [Continuum Mechanics. Tensor analysis]. Moscow, Bauman Press, vol. 1, 2011. 463 p.
- [20] Dimitrienko Iu.I., Sborshchikov S.V., Sokolov A.P., Shpakova Iu.V. Chislennoe modelirovaniye protsessov razrusheniia tkanevykh kompozitov [Computational modeling of failure of textile composites]. *Vychislitel'naia mekhanika sploshnykh sred* [Computational continuum mechanics]. 2013, vol. 6, no. 4, pp. 389–402. Doi: 10.7242/1999-6691/2013.6.4.43.
- [21] Paznikov E.A., Belousov A.M., Petrekov P.V., Nasonov A.D., Kalinin M.A. Issledovaniye viazkouprugikh svoystv strukturirovannogo tetrazolsoderzhashchego polimera akusticheskim metodom [Investigation of the viscoelastic properties of the polymer structured tetrazole acoustic method]. *Polzunovskii vestnik* [Polzunov Herald]. 2008, no. 1–2, pp. 63–65.
- [22] Khoang Tkhe Vu, Osipchik V.S., Smotrova S.A., Gorbunova I.Iu. Vliianie dobavok elastomera na svoystva epoksidnykh kompozitsii [Influence of additives on the properties of epoxy elastomer composition]. *Plasticheskie massy* [International Polymer Science and Technology]. 2008, no. 4, pp. 32–34.

Информация об авторах

ДИМИТРИЕНКО Юрий Иванович (Москва) — доктор физико-математических наук, директор Научно-образовательного центра «Суперкомпьютерное инженерное моделирование и разработка программных комплексов», зав. кафедрой «Вычислительная математика и математическая физика». МГТУ им. Н.Э. Баумана (105005, Москва, Российская Федерация, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1, e-mail: dimit.bmstu@gmail.com).

ГУБАРЕВА Елена Александровна (Москва) — кандидат физико-математических наук, доцент кафедры «Вычислительная математика и математическая физика». МГТУ им. Н.Э. Баумана (105005, Москва, Российская Федерация, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1, e-mail: gubareva_ea@pochta.ru).

ФЕДОНЮК Николай Николаевич (Санкт-Петербург) — кандидат технических наук, начальник лаборатории. ФГУП «Крыловский государственный научный центр» (196158, Санкт-Петербург, Российская Федерация, Московское шоссе, 44).

ЯКОВЛЕВ Дмитрий Олегович (Москва) — аспирант кафедры «Вычислительная математика и математическая физика». МГТУ им. Н.Э. Баумана (105005, Москва, Российская Федерация, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1, e-mail: yadmtr@gmail.com).

Information about the authors

DIMITRIENKO Yuriy Ivanovich (Moscow) — Dr. Sc. (Phys. Math.), Director of Research and Education Center «Supercomputer Engineering Modeling and Software Development», Head of «Computational Mathematics and Mathematical Physics» Department. Bauman Moscow State Technical University (BMSTU, building 1, 2-nd Baumanskaya str., 5, 105005, Moscow, Russian Federation, e-mail: dimit.bmstu@gmail.com).

GUBAREVA Elena Aleksandrovna (Moscow) — Cand. Sc. (Phys. Math.), Associate Professor of «Computational Mathematics and Mathematical Physics» Department. Bauman Moscow State Technical University (BMSTU, building 1, 2-nd Baumanskaya str., 5, 105005, Moscow, Russian Federation, e-mail: gubareva_ea@pochta.ru).

FEDONYUK Nikolay Nikolaevich (St. Petersburg) — Cand. Sc. (Eng.), Head of Laboratory. Krylov State Research Centre (Moskovskoe shosse, 44, 196158, St. Petersburg, Russian Federation).

YAKOVLEV Dmitriy Olegovich (Moscow) — Post-Graduate of «Computational Mathematics and Mathematical Physics» Department. Bauman Moscow State Technical University (BMSTU, building 1, 2-nd Baumanskaya str., 5, 105005, Moscow, Russian Federation, e-mail: yadmtr@gmail.com).



В Издательстве МГТУ им. Н.Э. Баумана
вышел в свет учебник

И.Ф. Кобылкина, В.В. Селиванова

«Материалы и структуры легкой бронезащиты»

Рассмотрен комплекс вопросов, связанных с баллистической стойкостью материалов и защитных структур, предназначенных для индивидуальной и локальной бронезащиты от воздействия высокоскоростных пуль и осколков. Приведены физические и математические модели процессов высокоскоростного взаимодействия пуль и осколков с различными типами бронепреград. Изложены современные представления о механизмах заброневого действия баллистического удара пуль.

По вопросам приобретения обращайтесь:

105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1.
Тел.: +7 499 263-60-45, факс: +7 499 261-45-97;
press@bmstu.ru; www.baumanpress.ru