

# Новые материалы и технологии

УДК 620.22-419.8

## Возможности повышения местной устойчивости подкрепленных и интегральных композитных конструкций

А.А. Смердов

МГТУ им. Н.Э. Баумана, 105005, Москва, Российская Федерация, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1.

## Possibilities of improving the local stability of stiffened and integral composite structures

A.A. Smerdov

Bauman Moscow State Technical University, building 1, 2-nd Baumanskaya str., 5, 105005, Moscow, Russian Federation.



e-mail: asmerdov@mail.ru

**i** Подкрепленные и интегральные композитные конструкции широко используются в современной ракетно-космической технике. Одной из причин исчерпания несущей способности таких конструкций является местная потеря устойчивости композитных пластин, сжатых вдоль длинных сторон. На сегодняшний день не существует расчетных методов, учитывающих при проектировании несущих оболочек корректно все эффекты, связанные с использованием композитов. В предлагаемой работе получены расчетные формулы, позволяющие проводить исследование местной устойчивости элементов подкреплений композитных панелей и оболочек при различных граничных условиях. Приведена сводка коэффициентов, используемых при расчетах устойчивости подкрепляющих элементов. Выполнен численный анализ различных типов и структур подкрепляющих элементов, а также анализ возможностей компромиссной оптимизации композитных структур с целью одновременного обеспечения их общей и местной устойчивости. Показано, что использование современных и перспективных композитов позволяет значительно повысить несущую способность композитных несущих оболочек при условии оптимального проектирования композитных структур подкрепляющих элементов.

**Ключевые слова:** композит, панель, оболочка, местная устойчивость, расчет, оптимизация.

**i** Stiffened and integral composite constructions are widely used in modern rocket and space engineering. Local buckling of composite plates compressed along their long sides can cause failure of such structures. At present, there are no design methods that take into account all peculiarities of load-bearing shells made of composite materials. This paper presents calculation formulas derived to investigate the local buckling of the elements of stiffened composite panels and shells under various boundary conditions. The buckling coefficients of stiffened elements are presented and the numerical analysis of various types and structures of stiffened elements is performed. The application of the compromise optimization to provide simultaneous global and local stability of composite structures is

discussed. It is shown that the use of advanced composites can considerably increase the load-bearing capacity of shells if the design of stiffened elements is optimal.

**Keywords:** composite, panel, shell, local buckling, calculation, optimization.

Подкрепленные конструкции широко используются в ракетно-космической технике и в других отраслях народного хозяйства. Первоначально они представляли собой клепаные или сварные металлические панели и оболочки. Со временем появились многослойные анизотропные композитные структуры [1, 2]. В настоящее время главное направление разработки таких конструкций связано с созданием из углепластика [3] интегральных панелей, в которых обшивка и подкрепляющие элементы объединены в единое целое [4]. При изготовлении таких панелей могут использоваться современные высокопроизводительные технологии инфузии и инъекции, что обеспечивает дополнительные преимущества подобным изделиям [5].

Подкрепленные (интегральные) конструкции могут различаться по типам используемых подкреплений. Некоторые из них показаны на рис. 1. Прежде всего следует выделить подкрепления с открытым профилем (рис. 1, а) и закрытым профилем (рис. 1, б), а также многостеночную структуру (рис. 1, в).

Основной смысл создания подкрепленных (в том числе интегральных) конструкций заключается в повышении изгибной жесткости и, следовательно, устойчивости панели или оболочки за счет сравнительно небольшого увеличения ее массы, что особенно важно для крупногабаритных ракетно-космических конструкций.

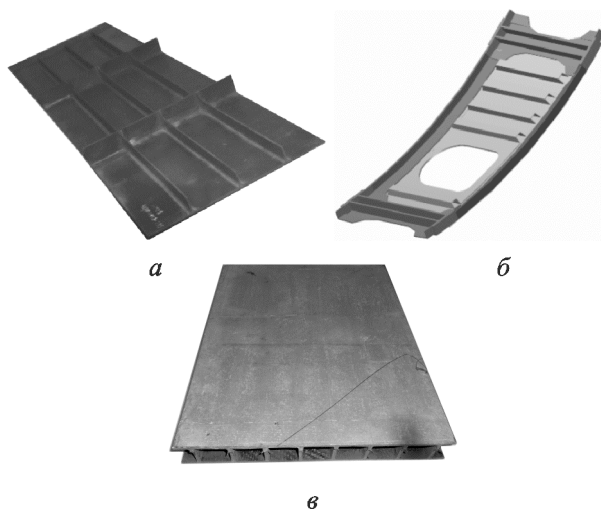


Рис. 1. Примеры композитных интегральных панелей:

- а — подкрепления с открытым профилем;
- б — подкрепления с закрытым профилем;
- в — многостеночная структура

Вместе с тем для подобных конструкций характерны дополнительные механизмы разрушения, которые могут привести к преждевременному исчерпанию несущей способности подкрепленной панели или оболочки. Основным из них является местная потеря устойчивости [6, 7] — потеря устойчивости отдельных элементов конструкции без глобального изменения ее конфигурации.

Местная потеря устойчивости композитных подкрепленных конструкций, как правило, приводит к иным последствиям, чем у традиционных металлических [8]. Так, например, известно [6], что для металлических стрингерных или стрингерно-шпангоутных (вафельных) отсеков ракет допускается местная потеря устойчивости обшивки, поскольку пластическое деформирование в высоконагруженных зонах приводит к перераспределению напряжений и сохранению несущей способности конструкции. Напротив, в композитных подкрепленных конструкциях недопустима потеря устойчивости никаких элементов. Хрупкое разрушение полимерных композитов может инициировать процессы, приводящие к лавинообразному разрушению или потере устойчивости всей конструкции.

Цель работы — исследование возможностей повышения местной устойчивости подкрепленных и интегральных композитных конструкций за счет оптимального выбора структурных параметров многослойных элементов.

Для описания потери устойчивости многослойных композитных элементов подкреплений может быть использована классическая постановка задачи устойчивости [9], дополненная методами анализа многослойных анизотропных композитных структур [7, 10]. Для сжатых удлиненных пластин (элементов подкрепленных конструкций) погонная критическая нагрузка

$$q_{кр} = k_{\sigma} \frac{\pi^2 D}{b^2}, \quad (1)$$

где  $D$  — цилиндрическая жесткость пластины;  $b$  — ширина пластины;  $k_{\sigma}$  — коэффициент, определяется в зависимости от условий закрепления длинных сторон; его значения для различных типов закрепления приведены в [6, 9, 12]. Расчетная схема задачи и основные обозначения показаны на рис. 2, а.

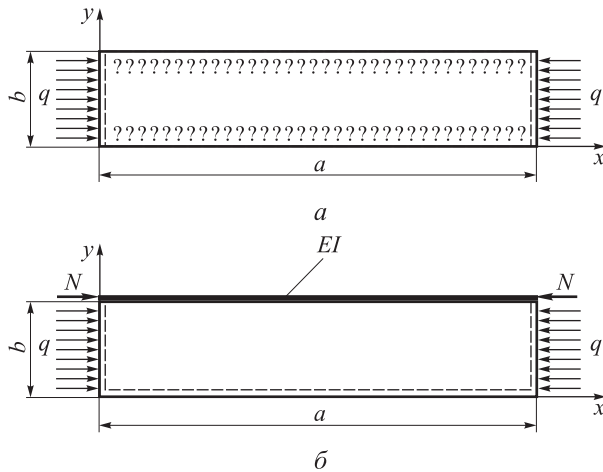


Рис. 2. Расчетная схема задачи о местной устойчивости:

$a$  — полки подкрепляющего профиля с произвольными граничными условиями,  $b$  — пластины с подкрепленным краем

Формула (1) справедлива для однородных изотропных пластин. При анализе многослойных элементов подкрепленных конструкций ограничимся случаем ортотропной в осях  $x$ ,  $y$  пластины, структура которой симметрична относительно ее срединной плоскости (для несимметричной пластины даже малые нагрузки, действующие в ее срединной плоскости, приведут к появлению кривизн и выходу пластины из плоскости).

Расчетные формулы для многослойных композитных пластин могут быть получены на основе энергетического критерия устойчивости в форме Брайана [9], который в данном случае имеет вид

$$\delta(U + V) = 0. \quad (2)$$

Здесь  $U$  — изменение потенциальной энергии пластины при переходе ее в отклоненное состояние;  $V$  — работа докритических напряжений на бифуркационных деформациях второго порядка малости [9],

$$V = \frac{1}{2} \iint_S (T_x^{(0)} w_{,x}^2 + 2T_{xy}^{(0)} w_{,x} w_{,y} + T_y^{(0)} w_{,y}^2) dx dy, \quad (3)$$

где  $S$  — площадь срединной плоскости;  $T_x^{(0)}$ ,  $T_y^{(0)}$ ,  $T_{xy}^{(0)}$  — внутренние погонные силы в координатной плоскости (для сжатых в направлении продольной оси полок композитных профилей,  $T_x^{(0)} = -q$ ,  $T_y^{(0)} = T_{xy}^{(0)} = 0$ ),  $w(x, y)$  — бифуркационные поперечные перемещения срединной поверхности; индекс после запятой обозначает дифференцирование по соответствующей координате.

Для многослойных симметричных пластин справедливы следующие выражения [7, 8]:

$$U = \frac{1}{2} \iint_S (D_{xx} w_{,xx}^2 + 2D_{xy} w_{,xx} w_{,yy} + D_{yy} w_{,yy}^2 + 4D_{ss} w_{,xy}^2) dx dy; \quad (4)$$

$$D_{xx} = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^n [g_{11}^{(i)} \cos^4 \varphi_i + g_{22}^{(i)} \sin^4 \varphi_i + (2g_{12}^{(i)} + 4g_{66}^{(i)}) \sin^2 \varphi_i \cos^2 \varphi_i] (z_i^3 - z_{i-1}^3);$$

$$D_{xy} = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^n [(g_{11}^{(i)} + g_{22}^{(i)} - 4g_{66}^{(i)}) \sin^2 \varphi_i \cos^2 \varphi_i + g_{12}^{(i)} (\sin^4 \varphi_i + \cos^4 \varphi_i)] (z_i^3 - z_{i-1}^3);$$

$$D_{yy} = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^n [g_{11}^{(i)} \sin^4 \varphi_i + g_{22}^{(i)} \cos^4 \varphi_i + (2g_{12}^{(i)} + 4g_{66}^{(i)}) \sin^2 \varphi_i \cos^2 \varphi_i] (z_i^3 - z_{i-1}^3);$$

$$D_{ss} = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^n [(g_{11}^{(i)} + g_{22}^{(i)} - 2g_{12}^{(i)}) \sin^2 \varphi_i \cos^2 \varphi_i + g_{66}^{(i)} (\sin^2 \varphi_i - \cos^2 \varphi_i)^2] (z_i^3 - z_{i-1}^3);$$

$$g_{11}^{(i)} = \frac{E_1^{(i)}}{1 - \nu_{12}^{(i)} \nu_{21}^{(i)}}; \quad g_{22}^{(i)} = \frac{E_2^{(i)}}{1 - \nu_{12}^{(i)} \nu_{21}^{(i)}};$$

$$g_{12}^{(i)} = \nu_{12}^{(i)} g_{22}^{(i)} = \nu_{21}^{(i)} g_{11}^{(i)}; \quad g_{66}^{(i)} = G_{12}^{(i)}.$$

Здесь  $i$  — номер слоя;  $E_1^{(i)}$ ,  $E_2^{(i)}$ ,  $G_{12}^{(i)}$ ,  $\nu_{12}^{(i)}$  ( $E_2^{(i)} \nu_{12}^{(i)} = E_1^{(i)} \nu_{21}^{(i)}$ ) — технические константы упругости материала слоя в его естественной системе координат 12, в которой ось 1 слоя совпадает с направлением укладки волокон, а ось 2 направлена по нормали к ней в плоскости слоя;  $\varphi_i$  — угол армирования слоя (угол между осью 1 слоя и осью  $x$  конструкции; рассматриваются ортотропные перекрестно армированные слои  $\pm \varphi_i$ ).

Наиболее прост анализ устойчивости прямоугольной пластины, два противоположных края которой шарнирно оперты [9, 12]. В этом случае решение можно представить в следующем виде:

$$w(x, y) = w_m \sin \frac{m\pi x}{a} \xi(y),$$

где  $m$  — любое число натурального ряда ( $m = 1, 2, 3, \dots$ );  $\xi(y)$  — функция, которая должна удовлетворять уравнению

$$\xi_{,yyyy} - \frac{2D_{xy} + 4D_{ss}}{D_{yy}} \left( \frac{m\pi}{a} \right)^2 \xi_{,yy} = 0$$

$$-\frac{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 \left[ q_m - D_{xx} \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 \right]}{D_{yy}} \xi = 0. \quad (5)$$

Здесь  $q_m$  — собственное значение нагрузки для формы с  $m$  полуволнами вдоль оси  $x$ .

При двух незакрепленных сторонах пластины, параллельных оси  $x$ , она может потерять устойчивость как стержень. При этом  $\xi_{,y} = 0$  и  $q_m = D_{xx}(m\pi/a)^2$ . Если хотя бы одна из этих сторон закреплена, то критическая нагрузка должна быть больше, и, следовательно, третье слагаемое уравнения (5) имеет знак «-». Общее решение такого уравнения может быть записано в виде

$$\xi(y) = c_1 \sin k_2 y + c_2 \cos k_2 y + c_3 \operatorname{sh} k_1 y + c_4 \operatorname{ch} k_1 y, \quad (6)$$

где

$$k_1^2 = \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 \frac{D_{xy} + 2D_{ss}}{D_{yy}} + \frac{m\pi}{a} \sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 \frac{(D_{xy} + 2D_{ss})^2}{D_{yy}^2} + \frac{q_m - \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 D_{xx}}{D_{yy}}};$$

$$k_2^2 = -\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 \frac{D_{xy} + 2D_{ss}}{D_{yy}} + \frac{m\pi}{a} \sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 \frac{(D_{xy} + 2D_{ss})^2}{D_{yy}^2} + \frac{q_m - \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 D_{xx}}{D_{yy}}}.$$

Граничные условия для выражения (6):

- шарнирное опирание

$$\xi = 0, \quad \xi_{,yy} = 0;$$

- заделка

$$\xi = 0, \quad \xi_{,y} = 0;$$

- свободный край

$$\xi_{,yy} - \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 \frac{D_{xy}}{D_{yy}} \xi = 0,$$

$$\xi_{,yyy} - \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 \frac{D_{xy} + 4D_{ss}}{D_{yy}} \xi_{,y} = 0.$$

Решения для изотропных пластин с различными условиями закрепления приведены в работе [12].

Для шарнирно опертых по всем четырем сторонам пластин можно принять [9]  $\xi(y) = \sin(n\pi y/b)$ , где  $n = 1, 2, 3, \dots$ . Таким образом,  $k_2 = n\pi/b$ , откуда следует [12]

$$q_{mn} = \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 D_{xx} + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 (2D_{xy} + 4D_{ss}) + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^4 \left(\frac{a}{m\pi}\right)^2 D_{yy}.$$

Потеря устойчивости пластины произойдет при достижении нагрузкой наименьшего из собственных значений. Поскольку зависимость  $q_{mn}$  от величины  $n$  монотонна, очевидно, что для поиска критической нагрузки следует принять  $n = 1$ . При соизмеримых длинах сторон пластины минимум по  $m$  находится перебором; если  $a/b \gg 1$ , то можно считать величину  $m\pi/a$  непрерывно изменяющимся параметром и искать минимум, приравнявая к нулю производную от  $q_m$  по этому параметру. Результат минимизации может быть записан в виде, аналогичном (1):

$$q_{кр} = k_\sigma \frac{\pi^2 D_{xx}}{b^2}, \quad (7)$$

$$\text{где } k_\sigma = 2 \left( \sqrt{\frac{D_{yy}}{D_{xx}}} + \frac{D_{xy} + 2D_{ss}}{D_{xx}} \right).$$

Различные варианты условий закрепления длинных сторон пластины представлены в табл. 1. Для каждого варианта приводится характеристическое уравнение, из которого определяются собственные значения нагрузок, а также функции формы.

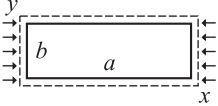
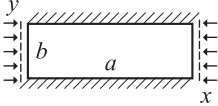
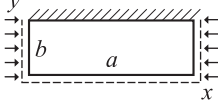
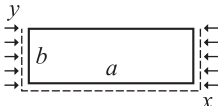
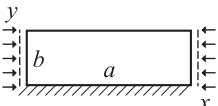
Критическая нагрузка во всех случаях закрепления может быть представлена в виде (7). Значение коэффициентов  $k_\sigma$  для различных условий закрепления и структур пластины приведены в табл. 2. Рассматриваются однородные перекрестно армированные структуры квадратных пластин и пластин с большим удлинением. Отсчет углов ведется от оси  $x$ . Расчеты проведены для углепластика ЛУ-П/ЭНФБ, из которого в последние годы выполнялось большинство ракетно-космических композитных конструкций.

Следует отметить, что приведенные в табл. 2 значения не могут использоваться для сравнения устойчивости различных структур, поскольку в соответствии с формулой (7) они должны умножаться на величину  $D_{xx}$ , которая также зависит от структурных параметров. Однако в пределах каждого столбца полезно сравнить величины коэффициентов  $k_\sigma$  для различных удлинений и условий закрепления пластин.

Следует обратить внимание на очень малые величины  $k_\sigma$  для однонаправленных структур, армированных в направлении приложения

Таблица 1

## К расчету устойчивости многослойных прямоугольных ортотропных пластин

Условие закрепления	Характеристическое уравнение	Собственные формы
	$\sin k_2 b = 0$	$\sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}$
	$(k_1 \sin k_2 b - k_2 \operatorname{sh} k_1 b)(k_2 \sin k_2 b + k_1 \operatorname{sh} k_1 b) + k_1 k_2 (\cos k_2 b - \operatorname{ch} k_1 b)^2 = 0;$	$\sin \frac{m\pi x}{a} \left[ \sin k_2 y - \frac{k_2}{k_1} \operatorname{sh} k_1 y + \xi (\cos k_2 y - \operatorname{ch} k_1 y) \right];$ $\xi = \frac{k_2 (\cos k_2 b - \operatorname{ch} k_1 b)}{k_2 \sin k_2 b + k_1 \operatorname{sh} k_1 b}$
	$k_1 \operatorname{ch} k_1 b \sin k_2 b - k_2 \operatorname{sh} k_1 b \cos k_2 b = 0$	$\sin \frac{m\pi x}{a} (\operatorname{sh} k_1 b \sin k_2 y - \sin k_2 b \operatorname{sh} k_1 y)$
	$k_1 (k_1^2 - \beta)(k_2^2 + \alpha) \sin k_2 b \operatorname{ch} k_1 b - k_2 (k_1^2 - \alpha)(k_2^2 + \beta) \cos k_2 b \operatorname{sh} k_1 b = 0;$ $\alpha = \left( \frac{m\pi}{a} \right)^2 \frac{D_{xy}}{D_{yy}}; \beta = \left( \frac{m\pi}{a} \right)^2 \frac{D_{xy} + 4D_{ss}}{D_{yy}}$	$\sin \frac{m\pi x}{a} \left[ \sin k_2 y + \frac{(k_2^2 + \alpha) \sin k_2 b}{(k_1^2 - \alpha) \operatorname{sh} k_1 b} \operatorname{sh} k_1 y \right]$
	$\left[ (k_2^2 + \alpha) \sin k_2 b + \frac{k_2}{k_1} (k_1^2 - \alpha) \operatorname{sh} k_1 b \right] \times$ $\times \left[ k_2 (k_2^2 + \beta) \sin k_2 b - k_1 (k_1^2 - \beta) \operatorname{sh} k_1 b \right] +$ $+ \left[ (k_2^2 + \alpha) \cos k_2 b + (k_1^2 - \alpha) \operatorname{ch} k_1 b \right] \times$ $\times k_2 \left[ (k_2^2 + \beta) \cos k_2 b + (k_1^2 - \beta) \operatorname{ch} k_1 b \right] = 0;$ $\alpha = \left( \frac{m\pi}{a} \right)^2 \frac{D_{xy}}{D_{yy}}; \beta = \left( \frac{m\pi}{a} \right)^2 \frac{D_{xy} + 4D_{ss}}{D_{yy}}$	$\sin \frac{m\pi x}{a} \left[ \sin k_2 y - \frac{k_2}{k_1} \operatorname{sh} k_1 y - \xi (\cos k_2 y - \operatorname{ch} k_1 y) \right];$ $\xi = \frac{(k_2^2 + \alpha) \sin k_2 b + \frac{k_2}{k_1} (k_1^2 - \alpha) \operatorname{sh} k_1 b}{(k_2^2 + \alpha) \cos k_2 b + (k_1^2 - \alpha) \operatorname{ch} k_1 b}$

нагрузки. Особенно это характерно для пластин со свободным краем: потеря устойчивости удлиненной пластины с одним свободным краем и шарнирным закреплением на другом при любом армировании происходит с одной полуволной в направлении оси  $x$ . При малых значениях поперечного модуля упругости и модуля сдвига волокна у свободного края ведут себя подобно стержням: даже при  $a/b = 10$  зависимость критической нагрузки от величины  $a$  все еще сохраняется. При остальных условиях закрепления образуется несколько волн в продольном направлении и слабость поперечных и сдвиговых характеристик сказывается в меньшей мере. С увеличением угла армирования коэффициенты  $k_\sigma$  значительно возрастают. При этом уменьшаются длины волн в продольном направлении: даже для квадратной пластины при углах, больших  $45^\circ$ , для пластин с закрепленными краями критической форме соответствует не одна полуволна, а две.

Результаты сравнительного анализа устойчивости удлиненных ( $a/b = 10$ ) пластин различной структуры, изготовленных из того же углепластика ЛУ-П/ЭНФБ, приведены на рис. 3. Каждая кривая показывает отношение критической нагрузки для текущей структуры и текущих условий закрепления к соответствующей критической нагрузке однородной по толщине квазиизотропной структуры из данного материала [10].

Максимум устойчивости во всех случаях соответствует структуре  $[\pm 45^\circ]$ , различна лишь относительная эффективность этой структуры. Однако такие структуры имеют крайне низкую жесткость в продольном направлении. Поскольку подкрепление панелей и оболочек производится, как правило, с целью повышения их жесткости и общей устойчивости, при проектировании необходимо решать задачу компромиссной оптимизации [8, 13] для обеспечения как общей устойчивости панели или оболочки,

Таблица 2

**Значения коэффициентов  $k_{\sigma}$  для различных удлинений и условий закрепления  
перекрестно армированных пластин из углепластика**

$a/b$	Схема закрепления	Схема армирования					
		$[0^\circ]$	$[\pm 20^\circ]$	$[\pm 45^\circ]$	$[\pm 60^\circ]$	$[90^\circ]$	Квазиизотропная
1		1,24	2,02	6,89	14,0	10,2	4,00
		1,56	2,64	11,0	20,4	20,4	7,69
		1,36	2,28	8,99	16,7	15,8	5,74
		1,04	1,15	1,87	2,72	1,58	1,39
		1,06	1,20	2,21	3,82	3,68	1,64
10		0,70	1,57	6,89	13,1	10,2	4,00
		1,40	2,59	10,4	20,2	20,4	6,97
		1,02	2,06	8,62	16,6	14,8	5,42
		0,050	0,20	1,02	1,84	0,59	0,43
		0,24	0,49	1,96	3,81	3,55	1,27

так и местной устойчивости полок подкрепляющего элемента.

Некоторые результаты решения такой задачи представлены на рис. 4. На рисунке приведены границы предельных возможностей в пространстве требований максимизации продольного модуля упругости и местной устойчивости удлиненных пластин с шарнирным закреплением и свободным краем (по осям отложены безразмерные величины, отнесенные к соответствующим характеристикам однородной по толщине квазиизотропной структуры из

углепластика ЛУ-П/ЭНФБ). Эти границы отделяют область доступных требований к свойствам проектируемой конструкции (выделена затемнением) от области, в которой удовлетворение требований невозможно [13].

Для увеличения изгибной жесткости край полки иногда подкрепляют стержнем из однонаправленного материала, как это показано на рис. 2, б. Соотношение между внутренними силовыми факторами в пластине и стержне можно получить из условия равенства деформаций в направлении оси  $x$ :

$$\frac{N}{EF} = \frac{q}{E_x H}.$$

Здесь  $H$  — толщина пластины;  $E_x$  — средний модуль упругости ее материала;  $EF$  — жесткость стержня на растяжение-сжатие. Таким образом, сила, действующая в подкрепляющем стержне,

$$N = -\eta qb.$$

Здесь  $\eta$  — безразмерный коэффициент, зависящий от отношения жесткостей стержня и пластины,

$$\eta = \frac{EF}{E_x H b}.$$

Изменение полной потенциальной энергии в данном случае запишется в виде

$$\Delta \mathcal{E} = U + V + U_{ст} + V_{ст},$$

где величины  $U$  и  $V$  для пластины определяют согласно (4) и (3),

$$U_{ст} = \frac{1}{2} \int_0^a EI w_b^2{}_{,xx} dx; \quad V_{ст} = \frac{1}{2} \int_0^a N w_b^2{}_{,x} dx.$$

Здесь  $EI$  — изгибная жесткость стержня;  $w_b$  — поперечное перемещение стержня:  $w_b(x) = w(x, y)|_{y=b}$ . Таким образом, по-прежнему справедливо выражение (6), граничные условия для которого при  $y=0$  записываются в виде  $\xi = 0, \xi_{,yy} = 0$ , а при  $y=b$ :

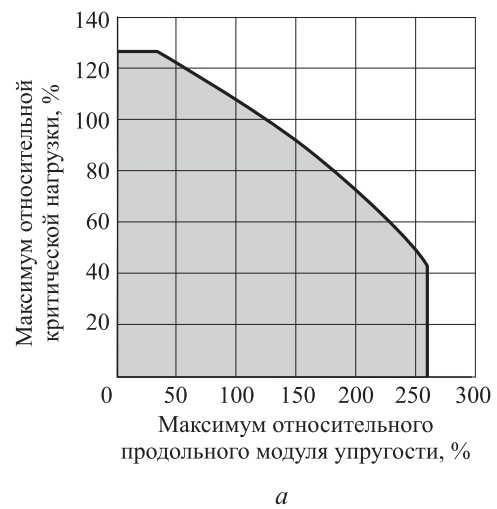
$$\begin{aligned} \xi_{,yy} + \mu \xi_{,y} - \alpha \xi &= 0; \\ \xi_{,yyy} - \beta \xi_{,y} + \lambda \xi &= 0, \end{aligned}$$

где величины  $\alpha$  и  $\beta$  пояснены в табл. 1;

$$\lambda = \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 \frac{\eta qb - \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 EI}{D_{yy}}; \quad \mu = \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 \frac{GI_p}{D_{yy}}.$$

С учетом данных граничных условий характеристическое уравнение для подкрепленной пластины имеет вид

$$\left[ (k_2^2 + \alpha) \sin k_2 b - \mu k_2 \cos k_2 b \right] \times$$



а

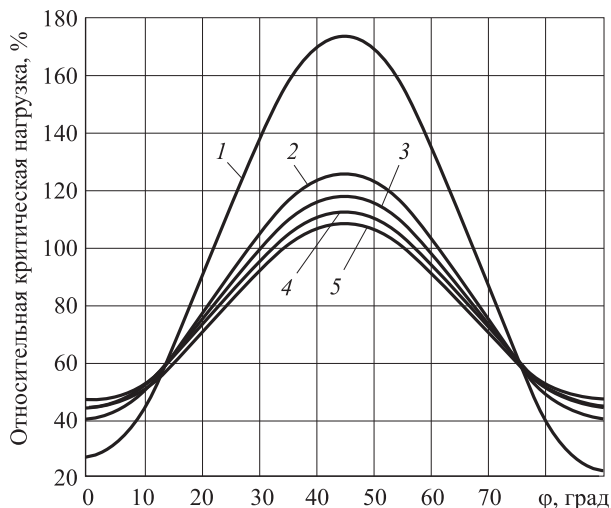


Рис. 3. Относительные критические нагрузки для длинных перекрестно армированных пластин из углепластика ЛУ-П/ЭНФБ:

- 1 — шарнирное закрепление одной ненагруженной стороны и свободный край на другой;
- 2 — шарнирное закрепление обеих ненагруженных сторон;
- 3 — шарнирное закрепление одной ненагруженной стороны и заделка другой;
- 4 — заделка одной ненагруженной стороны и свободный край на другой;
- 5 — заделка обеих ненагруженных сторон



б

Рис. 4. Границы предельных возможностей при одновременной максимизации критической нагрузки и продольного модуля упругости для длинных перекрестно-армированных пластин из углепластика ЛУ-П/ЭНФБ с шарнирным закреплением обеих ненагруженных сторон (а) и шарнирным закреплением одной ненагруженной стороны с заделкой другой (б)

$$\begin{aligned} & \times \left[ k_1 (k_1^2 - \beta) \operatorname{ch} k_1 b + \lambda \operatorname{sh} k_1 b \right] - \\ & - \left[ (k_1^2 - \alpha) \operatorname{sh} k_1 b + \mu k_1 \operatorname{ch} k_1 b \right] \times \\ & \times \left[ k_2 (k_2^2 + \beta) \cos k_2 b - \lambda \sin k_2 b \right] = 0, \end{aligned}$$

а собственная форма определяется функцией

$$\begin{aligned} & \sin \frac{m\pi x}{a} \left[ \sin k_2 y + \right. \\ & \left. + \frac{(k_2^2 + \alpha) \sin k_2 b - \mu k_2 \cos k_2 b}{(k_1^2 - \alpha) \operatorname{sh} k_1 b + \mu k_1 \operatorname{ch} k_1 b} \operatorname{sh} k_1 y \right]. \end{aligned}$$

Следует обратить внимание на изменение форм потери устойчивости в зависимости от жесткости подкрепляющего стержня: при малой жесткости формы близки к указанным в четвертой строке табл. 1 (в частности, критическая нагрузка соответствует одной полуволне по длине пластины); при увеличении жесткости стержня решение приближается к приведенному в третьей строке табл. 1.

Эффективность использования подкрепляющих профилей со стержнем на свободном краю иллюстрирует рис. 5. Увеличение диаметра стержня сопровождается уменьшением толщины пластины так, что общая масса остается постоянной. На рисунке показаны значения суммарной критической силы  $q_{кр} b(1+\eta)$  и изгибной жесткости  $b^2(EF + E_x b h / 3)$  подкрепляющего профиля относительно точки закрепления, которая определяет повышение общей устойчивости подкрепленной панели или оболочки [6, 7]. Расчеты проведены для квазиизотропной пластины из углепластика ЛУ-П/ЭНФБ с максимальной толщиной (без стержня) 5 мм,  $b = 40$  мм, стержень выполнен из однонаправленного углепластика ЛУ-П/ЭНФБ и имеет круглое сечение. По осям абсцисс на рис. 5 отложена доля массы стержня в общей массе подкрепленного профиля (рассмотренный диапазон соответствует значениям радиуса стержня 3...7 мм), а по осям ординат — безразмерные значения описанных характеристик, отнесенные к соответствующим величинам пластины с максимальной толщиной.

На рисунке видно, что подкрепление свободного края профиля стержнем может повысить его устойчивость только при небольшой длине; для удлиненных полок профилей повышение общей устойчивости может сопровождаться значительным снижением устойчивости местной, поскольку собственная устойчивость длинного стержня весьма низка. Об этом свидетельствуют и формы потери устойчивости: только для очень жестких стержней при  $a/b = 2$

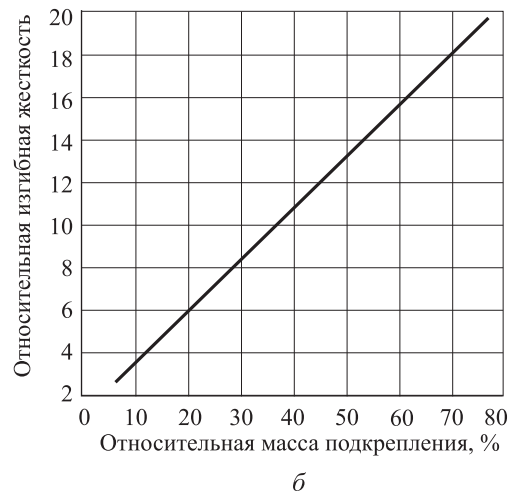
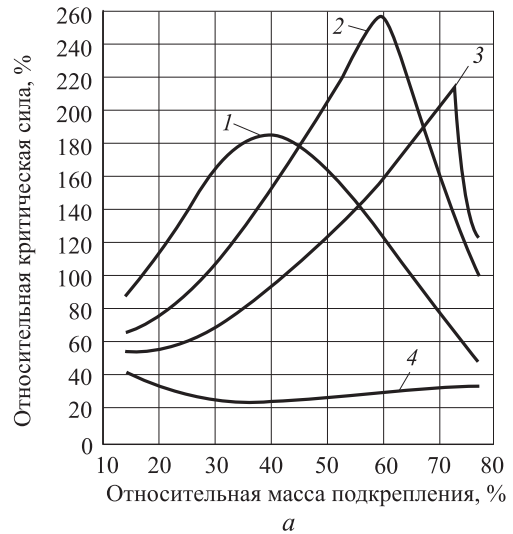


Рис. 5. Относительная критическая сила (а) и относительная изгибная жесткость сечения (б) углепластиковой пластины, подкрепленной стержнем, в зависимости от доли массы стержня в общей массе:  
1 —  $a/b = 1$ ; 2 —  $a/b = 2$ ; 3 —  $a/b = 3$ ; 4 —  $a/b = 10$

образуется две или три полуволны по длине, а при  $a/b = 3$  — даже четыре (нисходящие части кривых на графике); во всех прочих случаях  $m = 1$ .

В заключение необходимо напомнить, что в случае  $a/b \gg 1$  вид закрепления коротких сторон не имеет значения [9] и полученные формулы можно использовать при любом закреплении торцов профилей.

## Выводы

1. Получены расчетные формулы, позволяющие провести аналитическое исследование местной устойчивости элементов подкреплений композитных панелей и оболочек.
2. Проведен численный анализ устойчивости подкрепляющих элементов различных типов и



структур, приведена сводка коэффициентов, используемых при расчетах устойчивости подкрепляющих элементов.

3. Проанализированы возможности комpromисной оптимизации композитных структур в целях одновременного обеспечения как общей устойчивости подкрепленной панели или оболочки, так и местной устойчивости по-

лок подкрепляющего элемента. Показано, что использование современных и перспективных композитов способно значительно повысить несущую способность подкрепленных и интегральных ракетно-космических конструкций при условии оптимального проектирования структур подкрепляющих элементов.

## Литература

- [1] Зорин В.А. Опыт применения композиционных материалов в изделиях авиационной и ракетно-космической техники (Обзор). *Конструкции из композиционных материалов*, 2011, № 4, с. 44–59.
- [2] Зорин В.А., Болтаев П.И. Методы расчета подкрепленных оболочек из композиционных материалов. *Конструкции из композиционных материалов*, 2011, № 2, с. 8–20.
- [3] Смердов А.А., Думанский А.М., Таирова Л.П. Комплексные экспериментальные исследования деформативных и прочностных свойств композитов для отсеков и обтекателей ракет. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Машиностроение. Спец. вып. Крупногабаритные трансформируемые космические конструкции и материалы для перспективных ракетно-космических систем*, 2012, с. 124–136.
- [4] Образцов И.Ф., Сироткин О.С., Литвинов В.Б. Интегральные конструкции из композиционных материалов и перспективы их применения. *Конструкции из композиционных материалов*, 2000, № 2, с. 78–84.
- [5] Смердов А.А., Таирова Л.П., Баслык К.П., Артемьев А.В., Нелюб В.А., Бородулин А.С. Расчетно-экспериментальный анализ двух типов структур из углепластика для крупногабаритных ракетно-космических конструкций. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2013, вып. 7. URL: <http://engjournal.ru/catalog/machin/rocket/859.html> (дата обращения 24 июня 2014).
- [6] Балабух Л.И., Алфутов Н.А., Усюкин В.И. *Строительная механика ракет*. Москва, Высшая школа, 1984. 391 с.
- [7] Васильев В.В. *Механика конструкций из композиционных материалов*. Москва, Машиностроение, 1988. 272 с.
- [8] Смердов А.А. *Разработка методов проектирования композитных материалов и конструкций ракетно-космической техники*. Дис. ... д-ра. техн. наук. Москва, 2008. 410 с.
- [9] Алфутов Н.А. *Основы расчета на устойчивость упругих систем*. Москва, Машиностроение, 1991. 336 с.
- [10] Алфутов Н.А., Зиновьев П.А., Попов Б.Г. *Расчет многослойных пластин и оболочек из композиционных материалов*. Москва, Машиностроение, 1984. 264 с.
- [11] Зиновьев П.А., Смердов А.А. *Оптимальное проектирование композитных материалов*. Москва, Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2006. 103 с.
- [12] Вольмир А.С. *Устойчивость деформируемых систем*. Москва, Наука, 1967. 984 с.
- [13] Смердов А.А. *Основы оптимального проектирования композитных конструкций*. Москва, Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2006. 88 с.

## References

- [1] Zorin V.A. Opyt primeneniia kompozitsionnykh materialov v izdeliakh aviatsionnoi i raketno-kosmicheskoi tekhniki (Obzor) [Experience of composite application in articles of aviation, rocket and cosmic technics (review)]. *Konstruktsii iz kompozitsionnykh materialov* [Design of composite materials]. 2011, no. 4, pp. 44–59.
- [2] Boltayev P.I., Zorin V.A. Metody rascheta podkreplennykh obolochek iz kompozitsionnykh materialov [Methods of analysis of stiffened shells from composite materials]. *Konstruktsii iz kompozitsionnykh materialov* [Design of composite materials]. 2011, no. 2, pp. 8–20.

- [3] Smerdov A.A., Dumanskii A.M., Tairova L.P. Kompleksnye eksperimental'nye issledovaniia deformativnykh i prochnostnykh svoystv kompozitov dlia otsekov i obtekatel'ei raket [Comprehensive experimental studies deformability and strength properties of composites for compartments and fairings missiles]. *Vestnik MGTU im. N.E. Baumana. Ser. Mashinostroenie* [Herald of the Bauman Moscow State Technical University. Mechanical Engineering]. *Spetsial'nyi vypusk Krupnogabaritnye transformiruemye kosmicheskie konstruksii i materialy dlia perspektivnykh raketno-kosmicheskikh system* [Special Issue Large transformable space structures and materials for advanced rocket and space systems]. 2012, pp. 124–136.
- [4] Obraztsov I.F., Sirotkin O.S., Litvinov V.B. Integral'nye konstruksii iz kompozitsionnykh materialov i perspektivy ikh primeneniia [Integrated design of composite materials and the prospects for their application]. *Konstruksii iz kompozitsionnykh materialov* [Design of composite materials]. 2000, no. 2, pp. 78–84.
- [5] Smerdov A.A., Tairova L.P., Baslyk K.P., Artem'ev A.V., Neliub V.A., Borodulin A.S. Raschetno-eksperimental'nyi analiz dvukh tipov struktur iz ugleplastika dlia krupnogabaritnykh raketno-kosmicheskikh konstruksii [Experiment-calculated analysis of two types of CFRP structures for large size rocket-space structures]. *Inzhenernyi zhurnal: nauka i innovatsii* [Engineering Journal: Science and Innovations]. 2013, no. 7. Available at: <http://engjournal.ru/catalog/machin/rocket/859.html> (accessed 24 June 2014).
- [6] Balabukh L.I., Alfutov N.A., Usiukin V.I. *Stroitel'naia mekhanika raket* [Construction mechanics missiles]. Moscow, Vysshiaia shkola publ., 1984. 391 p.
- [7] Smerdov A.A. *Razrabotka metodov proektirovaniia kompozitnykh materialov i konstruksii raketno-kosmicheskoi tekhniki*. Diss. dokt. tekhn. nauk [Development of methods for the design of composite materials and structures rocket and space technology. Dr. tech. sci. diss.]. 2008. 410 p.
- [8] Alfutov N.A. *Osnovy rascheta na ustoychivost' uprugikh system* [Bases of calculation on stability of elastic systems]. Moscow, Mashinostroenie publ., 1991. 336 p.
- [9] Alfutov N.A., Zinov'ev P.A., Popov B.G. *Raschet mnogoslainnykh plastin i obolochek iz kompozitsionnykh materialov* [Calculation of laminated plates and shells made of composite materials]. Moscow, Mashinostroenie publ., 1984. 264 p.
- [10] Vasil'ev V.V. *Mekhanika konstruksii iz kompozitsionnykh materialov* [Mechanics of structures from composite materials]. Moscow, Mashinostroenie publ., 1988. 272 p.
- [11] Zinov'ev P.A., Smerdov A.A. *Optimal'noe proektirovanie kompozitnykh materialov* [Optimal design of composite materials]. Moscow, Bauman Press, 2006. 103 p.
- [12] Vol'mir A.S. *Ustoychivost' deformiruemykh system* [Stability of deformable systems]. Moscow, Nauka publ., 1967. 984 p.
- [13] Smerdov A.A. *Osnovy optimal'nogo proektirovaniia kompozitnykh konstruksii* [Principles of optimal design of composite structures]. Moscow, Bauman Press, 2006. 88 p.

Статья поступила в редакцию 30.06.2014

## Информация об авторе

СМЕРДОВ Андрей Анатольевич (Москва) — доктор технических наук, профессор кафедры «Космические аппараты и ракеты-носители». МГТУ им. Н.Э. Баумана (105005, Москва, Российская Федерация, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1, e-mail: asmerdov@mail.ru).

## Information about the author

SMERDOV Andrey Anatol'evich (Moscow) — Dr. Sc. (Eng.), Professor of «Spacecrafts and Launch Vehicles» Department. Bauman Moscow State Technical University (BMSTU, building 1, 2-nd Baumanskaya str., 5, 105005, Moscow, Russian Federation, e-mail: asmerdov@mail.ru).