№ 12 2006

ТЕХНОЛОГИЯ И ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЕ МАШИНЫ

666.1.4:681.7.068.4

ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТЬ ЗОНЫ ФОРМИРОВАНИЯ СВЕТОВОДА К ИЗМЕНЕНИЯМ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИХ ПАРАМЕТРОВ

Канд. техн. наук, доц. В.А. ИЛЬИЧЕВ

Определяется влияние возмущений технологических параметров (скорости вытяжки, вязкости стекломассы) на геометрию световода, вытягиваемого из разогретой стекломассы. Получены уравнения возмущений, позволяющие определить требования к точности поддержания технологических параметров на заданном уровне

Influence of technological parameters perturbations (i.e. drawing rate, fluid glass viscosity) on geometry of the optical path which is drawn out from warmed-up glass is determined. Perturbation equations allowing to define tolerance requirements of technological parameters maintenance at the set level are obtained.

Рассматривается процесс вытяжки оптических стержней (световодов) из разогретой стекломассы. При установившемся режиме вытяжки могут возникать различного рода возмущения, в том числе технологических параметров, которые приводят к отклонениям геометрических характеристик поперечного сечения вытягиваемого световода. Представляется весьма актуальной задачей выяснение степени влияния возмущений технологических параметров на геометрию вытягиваемого стержня.

Рассмотрим влияние таких технологических параметров как скорость вытяжки $\upsilon_{\text{в}}$ и динамическая вязкость стекломассы $\mu=\mu(z)$, где z — осевая координата сечения зоны формирования световода.

Параметром, определяющим качество световода, выбран радиус сечения зоны формирования $r=r(z,t)$, где t — момент времени наблюдения. Уравнения возмущений могут быть получены из уравнений движения вязкоупругой среды, рассмотренных в [1]. Решения для возмущенного движения ищутся в виде

$$\left.\begin{aligned}\tilde{\upsilon}(z,t)&=\upsilon(z)+\overline{\upsilon}(z,t)\\ \tilde{p}(z,t)&=p(z)+\overline{p}(z,t)\\ \tilde{\mu}(z,t)&=\mu(z)+\overline{\mu}(z,t)\\ \tilde{s}(z,t)&=s(z)+\overline{s}(z,t)\end{aligned}\right\} \tag{1}$$

где $\upsilon(z)$, $p(z)$, $\mu(z)$, $s(z)$ — решения для скорости, напряжения, вязкости, площади поперечного сечения зоны формирования, соответствующие невозмущенному движению стекломассы; $\overline{\upsilon}(z)$, $\overline{p}(z)$, $\overline{\mu}(z)$, $\overline{s}(z)$ — возмущения скорости, напряжения, вязкости, площади поперечного сечения зоны формирования световода.

В [2] показано, что решения для установившегося движения $\upsilon(z)$, $p(z)$ определяются после интегрирования следующей системы уравнений:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\upsilon}{dz} &= \frac{p + C\upsilon}{A + B\upsilon^2} \\ \frac{dp}{dz} &= \frac{D\upsilon p + E}{A + B\upsilon^2} \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

где $A = 3\mu$ (принято $\mu = \text{const}$); $B = -\lambda\rho$; λ — время релаксации; ρ — плотность стекломассы; $C = -\lambda\rho g$; g — ускорение свободного падения; $D = -3\mu g$.

Подставим соотношения (1) в исходную систему уравнений движения стекломассы, приведенную в [1], (с учетом уравнений (2)). После соответствующих преобразований получим систему дифференциальных уравнений для возмущенного движения стекломассы

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial\bar{\upsilon}}{\partial t} &= -(\upsilon + \bar{\upsilon})\frac{\partial\bar{\upsilon}}{\partial z} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial\bar{p}}{\partial z} - \bar{\upsilon}\frac{\partial\upsilon}{\partial z} \\ \frac{\partial\bar{p}}{\partial t} &= \frac{3(\mu + \bar{\mu})}{\lambda}\frac{\partial\bar{\upsilon}}{\partial z} - (\upsilon + \bar{\upsilon})\frac{\partial\bar{p}}{\partial z} - \bar{\upsilon}\frac{\partial p}{\partial z} - \frac{\bar{p}}{\lambda} + \frac{3\bar{\mu}}{\lambda}\frac{\partial\upsilon}{\partial z} \\ \frac{\partial\bar{s}}{\partial t} &= -(s + \bar{s})\frac{\partial\bar{\upsilon}}{\partial z} - (\upsilon + \bar{\upsilon})\frac{\partial\bar{s}}{\partial z} - \frac{\bar{s}\upsilon - \bar{\upsilon}s}{\upsilon}\frac{\partial\upsilon}{\partial z} \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Ранее проведенные исследования [3] показывают, что возмущением силового фактора можно пренебречь. Его влияние значительно меньше возмущений $\bar{\upsilon}(z,t)$ и $\bar{\mu}(z,t)$. Тогда первое и второе уравнения системы (3) можно привести к одному уравнению

$$\frac{\partial\bar{\upsilon}}{\partial t} = \frac{\bar{\upsilon}\lambda\dfrac{dp}{dz}(\bar{\upsilon} + \upsilon) + 3\dfrac{d\upsilon}{dz}(\upsilon\bar{\mu} - \mu\bar{\upsilon})}{3(\mu + \bar{\mu})}. \tag{4}$$

В [2] показывается, что при установившемся режиме процесса вытяжки в практически реализуемой области технологических параметров напряжение в сечении световода по его длине практически постоянно, т. е. $\dfrac{\partial p}{\partial z} \approx 0$. С учетом этого допущения (4) принимает вид

$$\frac{\partial\bar{\upsilon}}{\partial t} = \frac{d\upsilon}{dz}\frac{(\upsilon\bar{\mu} - \mu\bar{\upsilon})}{(\mu + \bar{\mu})}. \tag{5}$$

Введем безразмерные отклонения скорости α_υ и вязкости α_μ стекломассы, тогда $\bar{\upsilon} = \upsilon\alpha_\upsilon$; $\mu + \bar{\mu} = \mu(1 + \alpha_\mu)$; $\bar{\mu} = \mu\alpha_\mu$. Кроме того, представим скорость в виде [2] $\upsilon = (\upsilon_в - \upsilon_0)z/L + \upsilon_0$, где υ_0 — скорость стекломассы в начале зоны формирования; L — длина зоны формирования.

Теперь уравнение (5) примет вид

$$\frac{\partial\alpha_\upsilon}{\partial\tau} = \frac{1 - \alpha_k}{1 + \alpha_\mu}(\alpha_\mu - \alpha_\upsilon), \tag{6}$$

где $\alpha_k = \dfrac{1}{k}$; $k = \dfrac{\upsilon_в}{\upsilon_0}$ — коэффициент перетяжки; $\tau = \dfrac{t}{L}\upsilon_в$.

После интегрирования уравнения (6) получим

$$\alpha_\upsilon = \alpha_\mu + C\exp\left(-\frac{1-\alpha_k}{1+\alpha_\mu}\tau\right). \tag{7}$$

Постоянную C_1 найдем из начального условия: при $\tau = 0$ $\alpha_\upsilon = \alpha_{\upsilon_0}$, где $\alpha_{\upsilon_0} = \alpha_{\upsilon_0}(z)$ — распределение начального возмущения скорости стекломассы вдоль зоны формирования,

$$C_1 = \alpha_{\upsilon_0} - \alpha_\mu. \tag{8}$$

Подставив (8) в (7), получим

$$\alpha_\upsilon = \alpha_\mu + (\alpha_{\upsilon_0} - \alpha_\mu)\exp\left(-\frac{1-\alpha_k}{1+\alpha_\mu}\tau\right). \tag{9}$$

Уравнение (9) показывает, что возмущения вязкости и скорости не являются независимыми. Хотя с одной стороны, если отсутствуют возмущения по вязкости $(\alpha_\mu = 0)$, то возмущения по скорости в начальный момент времени можно задавать произвольно. С другой стороны, если задавать произвольным образом возмущение по вязкости $\alpha_\mu = \alpha_\mu(z)$, то и при отсутствии начального возмущения по скорости $(\alpha_{\upsilon_0} = 0)$, в соответствии с (9), будет иметь место возмущение скоростного фактора.

Из выражения (9) следует, что при $\tau \to \infty$ $\alpha_\upsilon \to \alpha_\mu$, т. е. возмущение по скорости асимптотически приближаются к возмущению по вязкости. В отсутствии возмущения по вязкости $\alpha_\upsilon = \alpha_{\upsilon_0}\exp\left(-(1-\alpha_k)\tau\right) \to 0$ при $\tau \to \infty$. То есть в этом случае процесс вытяжки устойчив.

Теперь перейдем к рассмотрению третьего уравнения системы (3). Введем безразмерное отклонение α_S площади поперечного сечения зоны формирования $s + \overline{s} = s(1+\alpha_S)$ и представим это уравнение в виде

$$s\frac{\partial\alpha_s}{dt} = \left(-s(1+\alpha_s)\left(-\frac{\alpha_\mu}{1+\alpha_\mu}\right) - \frac{s\alpha_s\upsilon - \upsilon\alpha_\upsilon s}{\upsilon}\right)\frac{d\upsilon}{dz} - \upsilon(1+\alpha_\upsilon)\frac{\partial\, s\alpha_\upsilon}{\partial z}. \tag{10}$$

После преобразований (10) примет вид

$$\frac{\partial\alpha_s}{dt} = \left(\frac{\alpha_\mu - \alpha_s}{1+\alpha_\mu} + \alpha_\upsilon\right)\frac{d\upsilon}{dz} - \frac{\upsilon(1+\alpha_\upsilon)}{s}\,\alpha_s\frac{ds}{dz} - \upsilon(1+\alpha_\upsilon)\frac{\partial\alpha_s}{\partial z}. \tag{11}$$

Далее учтем, что $\upsilon = \upsilon(z)$ и $s = s(z)$ являются решениями стационарной задачи, для которых выполняется соотношение $s\upsilon = \text{const}$, т. е.

$$ds = d\frac{s\upsilon}{\upsilon} = s\upsilon\, d\frac{1}{\upsilon} = s\upsilon\left(-\frac{1}{\upsilon^2}\right)d\upsilon = -\frac{s}{\upsilon}d\upsilon.$$

С учетом этого выражения уравнение (11) можно представить в следующей форме:

$$\frac{\partial\alpha_s}{dt} = \left(\frac{\alpha_\mu - \alpha_s}{1+\alpha_\mu} + \alpha_\upsilon + \alpha_s + \alpha_\upsilon\alpha_s\right)\frac{d\upsilon}{dz} - \upsilon(1+\alpha_\upsilon)\frac{\partial\alpha_s}{\partial z}$$

и преобразовать к виду

$$\frac{\partial \alpha_s}{dt} + \upsilon(1+\alpha_\upsilon)\frac{\partial \alpha_s}{\partial z} = \left(\alpha_\mu \frac{1+\alpha_s}{1+\alpha_\mu} + \alpha_\upsilon + \alpha_\upsilon \alpha_s\right)\frac{d\upsilon}{dz}. \tag{12}$$

Умножим левую и правую часть уравнения (12) на $L/\upsilon_в$ и приведем его к безразмерному виду

$$\frac{\partial \alpha_s}{d\tau} + V(1+\alpha_\upsilon)\frac{\partial \alpha_s}{\partial x} = \left(\alpha_\mu \frac{1+\alpha_s}{1+\alpha_\mu} + \alpha_\upsilon + \alpha_\upsilon \alpha_s\right)\frac{dV}{dx}, \tag{13}$$

где $\tau \in [0, \infty)$, $V \in [\frac{\upsilon_0}{\upsilon_в}, 1]$, $x \in [0, 1]$.

Уравнение (13) в совокупности с (9) описывает возмущенное движение стекломассы при произвольных геометрических и технологических характеристиках. Оно представляет собой неоднородное линейное дифференциальное уравнение первого порядка и может быть проинтегрировано известными способами [4].

После интегрирования (13), использовав соотношения $s = \pi r^2$; $s\alpha_s = \pi r^2 \alpha_r^2$, нетрудно выявить связь между возмущениями площади поперечного сечения зоны формирования и ее радиуса $\alpha_r = \sqrt{\alpha_s}$.

Таким образом, полученные уравнения (9), (13) связывают отклонения α_υ, α_μ, α_r. Считая α_υ, α_μ возмущениями, а α_r — откликом на эти возмущения, можно оценить чувствительность зоны формирования к изменениям технологических параметров, а следовательно, определить необходимую точность поддержания этих параметров на заданном уровне.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ильичев В. А. Решение нестационарной задачи движения вязкоупругой среды с подвижными границами // Известия вузов. Машиностроение. — 2005. — № 9. — С. 15—19.
2. Уваров В. П., Ильичев В. А Математические модели процесса вытяжки оптических стержней. С.-Петербург, Химиздат, 2003. — 136 с.
3. Ильичев В. А. Решение стационарной задачи движения стекломассы в зоне формирования оптического стержня // Известия вузов. Машиностроение. — 2005. — № 7. — С. 19—22.
4. Э. Камке. Справочник по дифференциальным уравнениям в частных производных первого порядка. — М.: Наука, 1966 — 260с.