

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ В ЗАДАЧАХ ДИНАМИКИ РОТОРНЫХ СИСТЕМ С ОПОРАМИ ЖИДКОСТНОГО ТРЕНИЯ

Канд. техн. наук, доц. О.В. СОЛОМИН, асп. А.А. МОРОЗОВ

Статья посвящена обзору современных численных методов интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений, которые могут использоваться при решении задач динамики роторных систем с опорами жидкостного трения. Подробно представлены необходимые расчетные соотношения для численной реализации этих методов. Приводятся результаты сравнительного анализа некоторых численных методов на примере решения уравнений динамики жесткого симметричного ротора. Обсуждаются преимущества и недостатки рассматриваемых методов.

This article surveys modern numerical methods of integration of ordinary differential equations that can be used for task solution of dynamics in rotor systems with fluid-film bearings. Necessary mathematical expressions for its programming are described in this paper. The results of comparative analysis of computing efficiency of these methods by the example of solution of equations of dynamics of a rigid symmetrical rotor are represented. Advantages and weaknesses of considered numerical methods are discussed.

Широкое применение опор жидкостного трения в конструкциях высокоскоростных турбомашин приводит к необходимости совершенствования моделей динамики роторных систем и методов их численной реализации. Существуют различные подходы к решению задач динамики роторных систем [1—3], однако наиболее информативным из них, видимо, следует считать непосредственное интегрирование уравнений движения ротора, т.е. применение метода траекторий (в литературе также встречаются термины «метод переходных режимов» и «метод орбит») [4—6]. Достоинства такого подхода к моделированию заключаются в возможности решать нелинейные, в общем случае, уравнения движения ротора с учетом нелинейных реакций смазочного слоя подшипников. В результате получаются траектории движения центра цапфы ротора в радиальном зазоре подшипника. Форма, расположение и размеры этих траекторий позволяют судить об особенностях динамического поведения роторной системы в целом.

Нелинейность гидродинамических реакций подшипника делает невозможным аналитическое решение уравнений движения и приводит к необходимости привлечения численных методов для их интегрирования. Несмотря на значительное количество работ, в которых для исследования динамики роторной системы применялся метод траекторий, следует отметить отсутствие единого мнения в выборе численного метода интегрирования уравнений движения [1—24]. В литературе практически отсутствуют сведения о проводившихся исследованиях точности методов, скорости их сходимости, затратах оперативной памяти и т.д. применительно к решению рассматриваемой задачи. Нет и рекомендаций по выбору шага интегрирования по времени, если он постоянный, или закона его изменения, в том случае, когда шаг интегрирования меняется. Некоторым исключением является работа [7], однако и она оставляет много вопросов, а, кроме того, в последнее время исследователи стали использовать и относительно новые методы численного интегрирования. В связи с этим возникает необходимость анализа используемых методов и выработки рекомендаций по их применению, поскольку, как справедливо отмечается в [7], «пригодность метода зависит от характера задачи».

В настоящее время известно большое количество численных методов интегрирования систем обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) первого порядка. Обычно их разделяют на явные и неявные, одношаговые и многошаговые, а также на методы, основанные на разложении в ряд [25—28]. Неявные методы, как правило, более устойчивы и обладают более высокой точностью, однако алгоритмы явных методов проще в реализации и работают быстрее. К неявным методам относят методы Адамса, Милна, Хемминга и др. К явным методам относятся методы Эйлера, Рунге-Кутты и др. [25—28]. Используя одношаговые методы, мы получаем численное решение только из самого дифференциального уравнения и начального условия. Алгоритм многошаговых методов сложнее и состоит из двух частей: первая из них — это стартовая процедура для определения приближенных значений решения в нескольких первых точках, а вторая — многошаговая формула для получения приближенного решения в остальных точках. Стартовые значения можно получить несколькими способами: разложением в ряд Тейлора; используя одношаговый метод (например, метод Рунге-Кутты); вычисляя стартовые значения методами Адамса низкого порядка с меньшим шагом [28]. К преимуществам многошаговых методов можно отнести высокую точность и устойчивость решения, а также для этих методов достаточно легко оценить погрешность на шаге. В качестве недостатков этих методов нужно отметить невозможность самостартования и относительную сложность их программирования.

Преимущества одношаговых методов заключаются в простоте и высокой скорости численной реализации, а к недостаткам можно отнести относительно низкую точность и сложность в оценке погрешности. Применение метода разложения в ряд основано на использовании формулы Тейлора [25]. Преимущества использования такого подхода заключаются в устойчивости получаемого вычислительного алгоритма, а также в том, что можно указать методы, дающие более точный результат без увеличения числа шагов. Недостатками таких методов являются сложность программирования и оценки погрешности на шаге.

Целью выполнения данного обзора является желание дать общую картину применяемых методов численного интегрирования уравнений динамики роторов. Система уравнений движения ротора может быть представлена в виде:

$$\dot{X} = F(X, t), \quad (1)$$

где $X = (x_1, \dots, x_{2N})^T$; $\dot{X} = (\dot{x}_1, \dots, \dot{x}_{2N})^T$; $F(X, t) = (f_1(x_1, \dots, x_{2N}, t), \dots, f_{2N}(x_1, \dots, x_{2N}, t))$, N — число степеней свободы рассматриваемой роторной системы.

При интегрировании уравнений движения ротора в ряде работ [4, 7, 8] используется метод Эйлера, который, являясь самым простым численным методом с точки зрения организации вычислительной процедуры, обладает в то же время наименьшей точностью. Кроме этого, метод Эйлера может сопровождаться потерей устойчивости численного счета вследствие накопления вычислительной погрешности. Однако в ряде случаев метод Эйлера даёт очень гладкое решение при сравнительно большом шаге интегрирования [7]. Вычислительный процесс по методу Эйлера описывается соотношениями [25—28]:

$$x_{i+1} = x_i + \Delta x_i; \quad \Delta x_i = f(x_i, t_i) \Delta t, \quad (2)$$

где $i = \overline{1, M}$ — текущий момент времени; $\Delta t = t / (M - 1)$ — шаг интегрирования; t — время интегрирования. В соотношениях (2) и далее по тексту расчетные выражения приводятся не умаляя общности рассуждений только для одной переменной, x_k ($k = \overline{1, 2N}$).

Для остальных переменных при реализации конкретного метода численного интегрирования используются аналогичные выражения.

Модификация метода Эйлера (метод Эйлера-Коши с итерациями), позволяющая несколько повысить точность вычислений, применялась для расчета траекторий движения неуравновешенного жесткого ротора в работе [9]. Расчетные соотношения можно записать в виде (2) аналогично [25—28]:

$$\Delta x_i = 0,5\Delta t \left(f(x_i, t_i) + f(x_{i+1}^*, t_{i+1}) \right), \text{ где } x_{i+1}^* = x_i + f(x_i, t_i)\Delta t. \quad (3)$$

Весьма широко при определении траекторий центра цапфы ротора в зазоре подшипника применяются методы семейства Рунге-Кутты и их модификации. В частности, метод Рунге-Кутты четвертого порядка находит свое применение в работах [5, 10, 11]. В работе [7] отмечается высокая привлекательность данного метода при решении задач динамики роторных систем с гидродинамическими подшипниками, что обусловлено незначительными проявлениями неустойчивости метода при расчете ускорений и относительно небольшом времени счета по сравнению с другими методами при одинаковых шагах интегрирования. Выражения для определения приближенного решения имеют вид [25 — 28]:

$$\begin{aligned} \Delta x_i &= \Delta t(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)/6; \\ k_1 &= f(x_i, t_i); \quad k_2 = f(x_i + k_1/2, t_i + \Delta t/2); \\ k_3 &= f(x_i + k_2/2, t_i + \Delta t/2); \quad k_4 = f(x_i + k_3/2, t_i + \Delta t/2). \end{aligned} \quad (4)$$

В технических и физических приложениях находит применение метод Рунге-Кутты пятого порядка, для которого справедливо [25, 28]:

$$\begin{aligned} \Delta x_i &= \Delta t(k_1 + 4k_3 + k_5)/2; \\ k_1 &= f(x_i, t_i); \quad k_2 = f(x_i + k_1/2, t_i + \Delta t/2); \quad k_3 = f(x_i + (k_1 + k_2)/4, t_i + \Delta t/2); \\ k_4 &= f(x_i - k_2 + 2k_3, t_i + \Delta t); \quad k_5 = f(x_i + (7k_1 + 10k_2 + k_4)/27, t_i + 2\Delta t/3); \\ k_6 &= f(x_i + (28k_1 - 125k_2 + 546k_3 + 54k_4 - 378k_5)/625, t_i + \Delta t/3). \end{aligned} \quad (5)$$

Метод Рунге-Кутты-Мерсона четвертого порядка, примененный в [12] для расчета динамики ротора на опорах с плавающей втулкой, имеет вид [25, 28]:

$$\begin{aligned} \Delta x_i &= \Delta t(k_1 + 4k_4 + k_5)/6; \\ k_1 &= f(x_i, t_i); \quad k_2 = f(x_i + k_1/3, t_i + \Delta t/3); \quad k_3 = f(x_i + (k_1 + k_2)/6, t_i + \Delta t/3); \\ k_4 &= f(x_i - k_1/8 + 3k_3/8, t_i + \Delta t/2); \quad k_5 = f(x_i + (k_1/2 - 3k_2/2 + 2k_4), t_i + \Delta t). \end{aligned} \quad (6)$$

В ряде случаев целесообразно использовать переменный (адаптивный) шаг по времени при интегрировании уравнений движения ротора. К примеру, при движении неуравновешенного ротора в области больших эксцентриситетов (малых значений зазора) следует принять во внимание сильно нелинейные реакции смазочного слоя. Чтобы избежать неустойчивости численного счета, приходится применять очень мелкий шаг по времени. Однако в области малых и средних эксцентриситетов шаг можно увеличить без существенной потери точности.

Адаптивный метод Рунге-Кутты четвертого порядка с контролем величины шага для достижения заданной точности при больших значениях шага применялся в исследованиях [13—15]. Процедура расчета может быть описана следующим образом [28]. Сначала вычисляем значение $x_{i+1} = x_{i+1}^{\Delta t}$ в соответствии с (4) с шагом Δt в точке t_{i+1} , а затем в точке

t_{i+1} находим значение $x_{i+1} = x_{i+1}^{\Delta/2}$ с шагом $\Delta/2$. Тогда погрешность ε на i -м шаге будет приближенно равна: $|x_{i+1}^{\Delta} - x_{i+1}^{\Delta/2}| / (2^p - 1)$, где p — порядок метода, в данном случае равный 4. Если погрешность превосходит заданную величину, то уменьшаем шаг в 2 раза. Через несколько шагов, если погрешность не увеличивается, увеличиваем величину шага в 2 раза. Процедура повторяется до окончания вычислительного процесса.

Возможность нахождения траекторий ротора, основанная на применении методов Рунге-Кутты второго и шестого порядков [28], упоминается в работе [7]. Устойчивые траектории, полученные этими методами, приведены авторами работы [7] в обсуждении статьи [13], где отмечают превосходные вычислительные качества методов семейства Рунге-Кутты в решении задач динамики роторов.

Интегрирование уравнений движения методами семейства Адамса также встречается в ряде исследований. Так, в работе [1] применен явный метод Адамса-Башфорта, для которого расчетное соотношение имеет вид [26—28]:

$$\Delta x_i = \Delta t(55f_i - 59f_{i-1} + 37f_{i-2} - 9f_{i-3})/24, \quad (7)$$

учитывая невозможность «самостартования» этого метода, первые три точки траектории определялись методом Эйлера. Соотношение (7) применялось и в [16] с той лишь разницей, что первые три точки определялись методом Рунге-Кутты четвертого порядка. Вариант метода Адамса-Штермера применялся в работе [17].

К недостаткам явных методов Адамса следует отнести худшие свойства устойчивости численного алгоритма по сравнению с неявными методами [27, 28]. Неявные методы Адамса, обладая лучшей устойчивостью, позволяют вести расчеты с большими шагами. Сочетание явных и неявных методов Адамса, известное как метод Адамса-Башфорта-Моултона [26, 27], также рассматривалось в работе [7]. В этом случае сначала вычисляют прогноз искомого значения на $(i+1)$ шаге (x_{i+1}^0), а затем производят его коррекцию и находят решение (x_{i+1}):

$$\begin{aligned} \text{прогноз: } x_{i+1}^0 &= x_i + \Delta t(55f_i - 59f_{i-1} + 37f_{i-2} - 9f_{i-3})/24; \\ \text{коррекция: } x_{i+1} &= x_i + \Delta t(9f_{i+1}^0 - 19f_i + 5f_{i-1} + f_{i-2})/24. \end{aligned} \quad (8)$$

Другим методом типа «прогноз—коррекция» является метод Хемминга [26, 28], который использован в исследовании [18]:

$$\begin{aligned} \text{прогноз: } x_{i+1}^0 &= x_{i-3} + 4\Delta t(2f_i - f_{i-1} + 2f_{i-2})/3; \\ \text{коррекция: } x_{i+1} &= (9x_i - x_{i-2} + 3\Delta t(f_{i+1}^0 + 2f_i - f_{i-1}))/8. \end{aligned} \quad (9)$$

При теоретическом исследовании переходных процессов в роторных системах [7] применялся также метод «прогноз—коррекция» по Милну [26]:

$$\begin{aligned} \text{прогноз: } x_{i+1}^0 &= x_{i-3} + 4\Delta x(2f_i - f_{i-1} + 2f_{i-2})/3; \\ \text{коррекция: } x_{i+1} &= x_{i-1} + \Delta t(f_{i+1}^0 + 4f_i + f_{i-1})/3. \end{aligned} \quad (10)$$

Несмотря на то, что, как правило, авторы исследований, в которых применялись методы типа «прогноз — коррекция», не указывают каких-либо сложностей с использо-

ванием этих методов, в работе [7] и в обсуждении к работе [13] указывается, что методы Милна и Хемминга приводят к существенной неустойчивости счета и их применение для решения рассматриваемых задач нецелесообразно. Метод Адамса-Башфорта дает лучшие результаты, но все же уступает в точности и устойчивости одношаговым методам семейства Рунге-Кутты.

В ряде случаев, когда ротор можно считать жестким, что имеет место для многих практически важных приложений, или для получения качественных оценок влияния тех или иных параметров роторной системы на ее динамическое поведение, можно использовать простые уравнения движения. В частности, широко распространена модель симметричного жесткого горизонтального ротора на двух одинаковых опорах жидкостного трения (рис. 1) [1–3, 5, 6, 9, 10, 13, 15, 19]:

$$\begin{cases} M\ddot{X} = R_x(X, Y, \dot{X}, \dot{Y}) + M\Delta\omega^2 \cos(\omega t); \\ M\ddot{Y} = R_y(X, Y, \dot{X}, \dot{Y}) + M\Delta\omega^2 \sin(\omega t) - Mg, \end{cases} \quad (11)$$

где M — масса ротора, приходящаяся на одну опору; Δ — дисбаланс; ω — частота вращения ротора. Входящие в систему (11) реакции смазочного слоя R_x и R_y должны находиться, строго говоря, путем численного решения уравнений гидродинамической теории смазки на каждом шаге интегрирования по времени [1, 2].

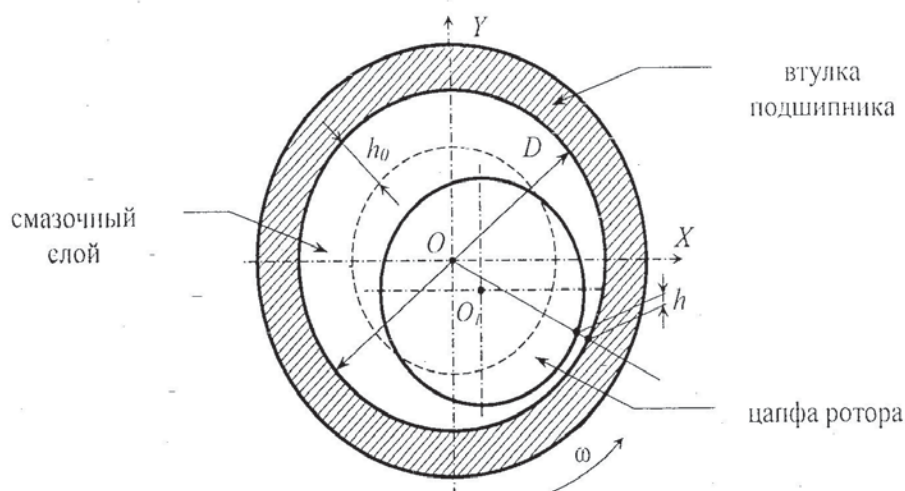


Рис. 1. Динамическая система «ротор—подшипники жидкостного трения»

В работе [19] рассматривается применение дельта-метода фазовой плоскости для интегрирования уравнений движения типа (11) в том случае, когда реакции смазочного слоя R_x и R_y приняты линеаризованными [1—3]. Основная идея этого метода заключается в аппроксимации фазового портрета в координатах «перемещение — скорость» дугами окружности. Основное достоинство метода заключается в том, что интегрирование основано на приращении цикла колебаний, а не времени. Приращение времени автоматически регулируется, обеспечивая требуемое приращение цикла колебаний независимо от частоты. В этом случае можно добиться значительного сокращения объема вычислений для системы со сложной реакцией, частоту которой нельзя предсказать заранее. Этот метод особенно эффективен при исследовании роторных систем со мно-

гими степенями свободы, когда частоты реакций по различным координатам неодинаковы [19].

При рассмотрении реальной роторной системы применяется, как правило, метод конечных элементов (реже — метод переходных матриц) [2, 6]. В этом случае динамика роторной системы описывается матричным уравнением [2, 3, 6]:

$$M\ddot{X} + B\dot{X} + KX = F(X, \dot{X}, t), \quad (12)$$

где M , B и K — матрицы масс, демпфирования и жесткости ротора; F — вектор внешних сил (в том числе, реакций опор); X — вектор перемещений; t — время.

Для решения уравнения (12) часто используются методы, основанные на аппроксимации ускорений \ddot{x}_{i+1} конечными разностями: метод Ньюмарка, θ — метод Уилсона, метод Хуболта и др. [20—23]. Эти методы могут быть использованы и для решения уравнений движения жесткого ротора, а в упомянутых работах отмечается их высокая сходимость и устойчивость. Однако в литературе отсутствуют сведения об исследованиях по сравнительному анализу их численной эффективности с другими методами применительно к рассматриваемому классу задач.

Для исследования динамических процессов в сложных системах «ротор — подшипники», описываемых уравнением вида (12) с нелинейными гидродинамическими реакциями смазочного слоя в работах [20, 21], применяется метод Ньюмарка. Техника интегрирования в данном случае сводится к аппроксимациям [29]:

$$x_{i+1} = x_i + \Delta\dot{x}_i + 0,5\Delta t^2 [(1-2\beta)\ddot{x}_i + 2\beta\ddot{x}_{i+1}]; \quad \dot{x}_{i+1} = \dot{x}_i + \Delta t [(1-\gamma)\ddot{x}_i + \gamma\ddot{x}_{i+1}], \quad (13)$$

где параметры β и γ определяют устойчивость и точность интегрирования; значения $\beta = 0,25$ и $\gamma = 0,5$ делают метод Ньюмарка безусловно устойчивым.

В работе [20] обсуждаются также возможность применения методов Хуболта и θ -метода Уилсона. В методе Хуболта используются разностные формулы для экстраполяции ускорений и скоростей вида [29]:

$$\ddot{x}_{i+1} = (2x_{i+1} - 5x_i + 4x_{i-1} - x_{i-2})/\Delta t^2; \quad \dot{x}_{i+1} = (11x_{i+1} - 18x_i + 9x_{i-1} - 2x_{i-2})/6\Delta t. \quad (14)$$

В q -методе Уилсона предполагается линейное изменение ускорения в интервале времени от t_i до t_{i+1} [29], что дает:

$$\ddot{x}_{i+1} = \ddot{x}_i + 6(x_{i+1} - x_i)/\theta^2\Delta t^2 - 6\dot{x}_i/\theta\Delta t - 2\ddot{x}_i; \quad \dot{x}_{i+1} = 3(x_{i+1} - x_i)/\theta\Delta t - 2\dot{x}_i - \theta\Delta t\ddot{x}_i/2. \quad (15)$$

Безусловная устойчивость метода обеспечивается при $\theta = 1,4$. Существуют и другие эффективные методы интегрирования уравнений вида (12), например, [23, 24].

Сравнительный анализ численных методов интегрирования будем проводить на примере системы уравнений (11). Это позволяет исключить из рассмотрения множество факторов, повышающих вычислительную сложность задачи, и сосредоточиться исключительно на качественном анализе методов интегрирования уравнений динамики. Следует полагать, что при прочих равных условиях вычислительные качества методов сохранятся и при решении более сложных задач вида (12). Для гидродинамических реакций R_x и R_y будем использовать аппроксимацию «короткого» гидродинамического подшипника [2, 6, 30]:

$$R_x(X, Y, \dot{X}, \dot{Y}) = -\mu DL^3 \frac{\pi}{2} \left[\frac{\omega Y + 2\dot{X}}{2(h_0^2 - X^2 - Y^2)^{3/2}} + \frac{3X(X\dot{X} + Y\dot{Y})}{(h_0^2 - X^2 - Y^2)^{5/2}} \right];$$

$$R_y(X, Y, \dot{X}, \dot{Y}) = -\mu DL^3 \frac{\pi}{2} \left[\frac{2\dot{Y} - \omega X}{2(h_0^2 - X^2 - Y^2)^{3/2}} + \frac{3Y(X\dot{X} + Y\dot{Y})}{(h_0^2 - X^2 - Y^2)^{5/2}} \right];$$
(16)

где h_0 — номинальный радиальный зазор; D и L — диаметр и длина подшипника; ω — частота вращения ротора; μ — динамическая вязкость смазочного материала. Отметим, что в работе [30] применен метод Рунге-Кутты четвертого порядка.

Введем следующие безразмерные величины: $\bar{t} = \omega t$; $X = X/h_0$; $\bar{Y} = Y/h_0$. Для нахождения решения представим (11) в безразмерном виде ($\lambda = Mh_0^3\omega$):

$$\ddot{\bar{X}} = \frac{1}{\lambda} \left[R_x + M\Delta\omega h_0^2 \cos(\bar{t}) \right]; \quad \ddot{\bar{Y}} = \frac{1}{\lambda} \left[R_y + M\Delta\omega h_0^2 \sin(\bar{t}) - \frac{h_0^2}{\omega} Mg \right].$$
(17)

По результатам выполненного обзора для сравнения вычислительной эффективности были выбраны следующие методы: метод Эйлера, метод Эйлера-Коши, Рунге-Кутты четвертого и пятого порядков, метод Адамса-Башфорта и метод Ньюмарка. При выборе метода учитывалась частота их использования как в задачах динамики роторов, так и при решении других вычислительных проблем.

Для сравнения эффективности рассмотренных методов на примере решения уравнений (11) при реакциях опор вида (16) было разработано программное обеспечение в системе компьютерной математики MATLAB. Оценка эффективности методов проводилась по следующим критериям: погрешность расчета как функция величины шага; время интегрирования до достижения заданной точности как функция шага; величина погрешности как функция затраченного времени интегрирования. Вычислительная эффективность работы алгоритмов оценивалась на расчетах траекторий движения системы «ротор — подшипники» (рис. 2).

Представленные траектории (рис. 2) получены для роторной системы (рис. 1) с параметрами: $D = 50$ мм; $L = 50$ мм; $h_0 = 25$ мкм; $M = 10$ кг; $\Delta = 2,5$ мкм; смазка — жидкий водород при 20 К. Устойчивое положение уравновешенного ротора (рис. 2, а) было достигнуто при $\omega = 1000$ рад/с; увеличение частоты до $\omega = 1800$ рад/с приводило к возникновению полускоростного вихря (рис. 2, б). Устойчивая эллиптическая орбита неуравновешенного ротора (рис. 2, в) была получена при $\omega = 1000$ рад/с, а рост частоты до $\omega = 2000$ рад/с приводит к возникновению неустойчивых движений ротора вследствие возникновения автоколебаний (рис. 2, г).

В расчетах были приняты следующие критерии окончания вычислительного процесса: а) для сходящейся в точку траектории (рис. 2а), учитывая, что реакция подшипника и координаты положения центра цапфы меняются слабо, процесс продолжается, пока разность между соответствующими величинами на текущем и предыдущем шаге не станет меньше заданного значения; б) для сходящейся к предельному циклу траектории (рис. 2, в) процесс продолжается, пока расстояние между ближайшими витками траектории не будет меньше некоторого значения; в) для расходящейся траектории (рис. 2, б, г) расчет прекращается, если расстояние между двумя ближайшими витками увеличивается на протяжении заданного количества витков и цапфа достигает определенного значения эксцентриситета. Следует отметить, что в общем случае движение ротора не

ограничивается представленными картинками и траектории могут принимать иной вид [5, 7, 10, 20].

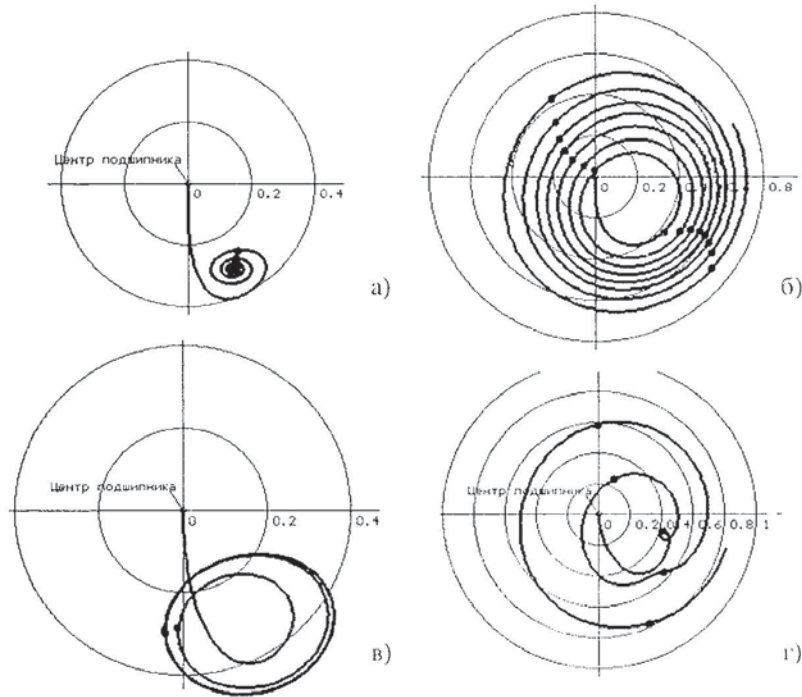


Рис. 2. Траектории движения ротора: уравновешенного (а, б) и неуравновешенного (в, г)

Полученные результаты (рис. 3) иллюстрируют зависимость суммарного времени расчета от абсолютной величины шага интегрирования. Как и можно было предположить, наиболее быстрым является метод Эйлера, а самым медленным из описанных методов — метод Рунге-Кутты пятого порядка. Однако отметим, что методы Эйлера-Коши и Ньюмарка практически одинаковы по быстродействию.

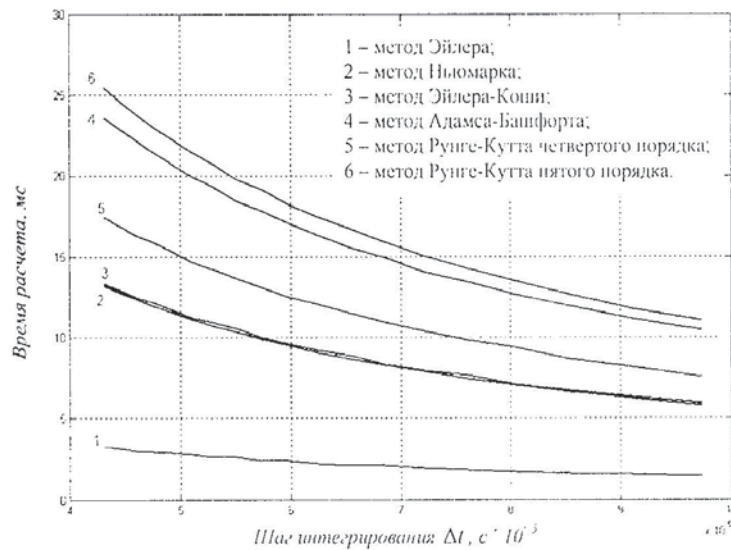


Рис. 3. Зависимость времени расчета от величины шага интегрирования

Анализ локальной погрешности интегрирования от времени расчета показывает, что при одной и той же величине шага наибольшую погрешность вносит метод Эйлера, а наименьшую обеспечивают методы Рунге-Кутты. Отметим также, что применение методов Адамса-Башфорта и Эйлера сопряжено с риском появления неустойчивости счета при малых шагах интегрирования (рис. 4 и 5), что сопровождается экспоненциальным ростом погрешности при увеличении шага.

Важным практическим вопросом, который возникает при проведении численных расчетов, является выбор подходящей величины шага. Если шаг слишком мал, то расчет потребует неоправданно много машинного времени, а число ошибок на отдельных шагах, складывающихся в суммарную ошибку, будет весьма велико. Если же, наоборот, шаг выбран слишком большим, то значительной будет локальная погрешность, обусловленная усечением рядов, и накопившаяся суммарная ошибка будет также недопустимо большой.

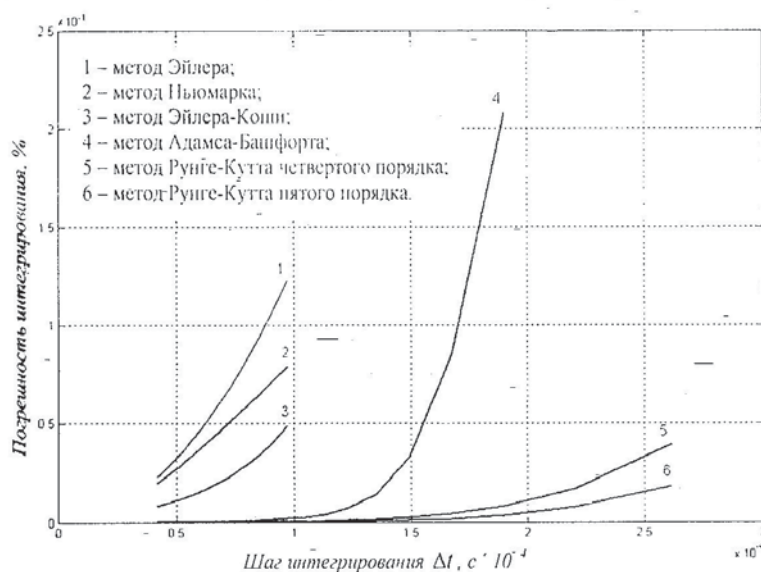


Рис. 4. Зависимость абсолютной погрешности от величины шага

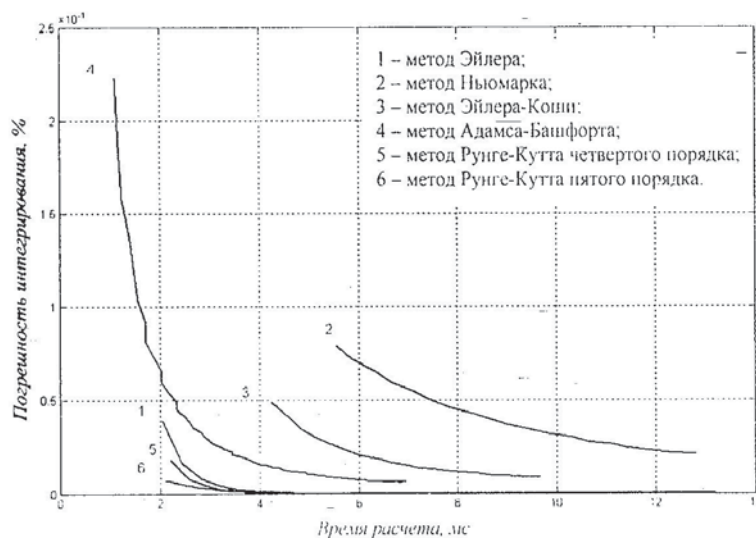


Рис. 5. Зависимость абсолютной погрешности от времени расчета

На рис. 5 изображены зависимости локальной погрешности для различных методов от времени их численной реализации на ЭВМ. Данные получены для однопроцессорной машины с процессором *Intel Pentium 4* с тактовой частотой 2 ГГц, однако очевидно, что качественный характер полученных результатов не изменится и на других процессорах. На графиках можно увидеть, что при одной и той же локальной погрешности наибольшей скоростью обладают методы Рунге-Кутты четвертого и пятого порядка, наименьшей — метод Ньюмарка.

По результатам работы можно сделать следующие замечания и выводы:

1. Наиболее оптимальным для решения задач моделирования динамики роторов по показателю «время расчета – точность вычислений» является применение методов Рунге-Кутты. Применение методов Эйлера и Эйлера-Коши является оправданным только для расчета стартовых точек для многошаговых методов.

2. Вычислительные схемы типа «прогноз — коррекция» (Милна, Хемминга, Адамса-Башфорта) могут приводить к «разваливанию» счета вследствие проявления неустойчивости этих методов при определенных значениях шага. В то же время наилучшим из этих методов следует признать метод Адамса-Башфорта.

3. Представляется перспективным дальнейшее изучение возможностей применения методов Ньюмарка, Хуболта и θ -метода Уилсона к решению задач динамического расчета и моделирования роторных систем (в т.ч. с распределенными параметрами) с опорами, уплотнениями и демпферами жидкостного трения.

4. Отдельной задачей является выработка рекомендаций по выбору величины шага интегрирования для конкретного метода. Слишком малый шаг может повлечь за собой увеличение глобальной ошибки за счет увеличения числа шагов и накопления вычислительной погрешности. Перспективным представляется применение адаптивных методов, варьирующих величину шага в зависимости от положения ротора в зазоре подшипника. При этом для более высоких эксцентриситетов положения цапфы рекомендуется использовать более мелкий шаг.

5. Величину шага Δt целесообразно связывать с числом разбиений n периода вращения $T = 2\pi/\omega$ соотношением $\Delta t = T/n$. Тогда моделирование динамики роторов с более высокими частотами вращения требует меньшего числа разбиений n , что позволяет снизить время моделирования. Вообще замечено, что меньшие скорости вращения требуют меньшей величины шага интегрирования.

6. Отдельное внимание следует уделить уточнению критериев останова счета и оценки погрешности полученного решения. Кроме этого, важным является анализ устойчивости численного расчета. При появлении первых признаков неустойчивости (резких перегибов, выпадов, «гармошек» траектории) следует уменьшать величину шага, избегая тем самым «разваливания» счета. Это особенно актуально при движении ротора на высоких эксцентриситетах.

7. Контроль устойчивости и качества моделирования можно проводить по характеру гладкости рассчитанных ускорений. Достаточно гладкий характер изменения ускорений является, как правило, следствием высокого качества моделирования динамического поведения роторной системы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Артеменко Н. П. Гидростатические опоры роторов быстроходных машин. — Харьков: «Основа», 1992. — 198 с.
2. Yamamoto T., Ishida Y. Linear and nonlinear rotordynamics. A modern treatment with applications. — New York, John Wiley & Sons, 2001. — 326 p.

3. Rao J. S. Rotor dynamics comes of age // Sixth International Conference on Rotor Dynamics: Proceedings. — Sydney, Australia: The University of New South Wales, 2002. — Vol. 1. — P. 15—26.
4. Шапиро, Колшер. Применение методов переходных режимов и ступенчатого воздействия для расчета газовых подшипников // Проблемы трения и смазки, 1970. — № 3. — С. 146—157.
5. Сингх. Теоретический расчет траектории движения центра шипа радиального подшипника // Проблемы трения и смазки, 1976. — № 4. — С. 148—155.
6. Handbook of rotordynamics / Edited by Ehrich F. — New York, McGraw-Hill, 1992. — 542 p.
7. Керк Гантер. Переходные процессы в системах «ротор — подшипники» // Конструирование и технология машиностроения. — 1974. — № 2. — С. 306—319.
8. Абдул-Вахед. Устойчивость подшипников крупных турбомашин и их колебания, вызываемые дисбалансом // Проблемы трения и смазки, 1982. — № 1. — С. 70—80.
9. Hashimoto H., Wada S. Dynamic behavior of unbalanced rigid shaft supported on turbulent journal bearings: theory and experiment // Transactions of ASME. — 1990. — Vol. 112. — P. 404—408.
10. Бэдгли Букер. Неустойчивость турборотора — влияние начальных переходных процессов на плоское движение // Проблемы трения и смазки. — 1969. — № 4. — С. 37—45.
11. Бар-Иозеф Блех. Устойчивость гибкого ротора, опирающегося на радиальные подшипники с питанием по окружности // Проблемы трения и смазки, 1977. — № 4. — С. 94—102.
12. Прокопьев В. Н. Динамика роторов на подшипниках с плавающими невращающимися втулками // Проблемы машиностроения и надежности машин. — 1995. — № 5. — С. 37—42.
13. Эйкерсидр. Границы устойчивости по отношению к вихрю для радиального подшипника конечной длины // Проблемы трения и смазки. — 1971. — № 1. — С. 170—182.
14. Sarone G, Russo M. Short bearing theory prediction of inertial turbulent journal orbits // Journal of tribology. — 1990. — Vol. 112, October. — P. 643—649.
15. Feng Z. C., Zhana X. Z. Rubbing phenomena in rotor — stator contact // Chaos, solitons and fractals, 2002. — № 14. — P. 257—267.
16. Назин В. И. О вынужденных колебаниях и устойчивости роторов на сегментных гидростатических подшипниках // Исследование гидростатических опор и уплотнений двигателей летательных аппаратов. — Харьков: Изд-во ХАИ, 1987. — С. 85—90.
17. Дзема Н. В. Расчет характеристик втулочного подшипника скольжения, питающегося через ротор // Высокоскоростные гидростатические опоры двигателей летательных аппаратов. — Харьков: Изд-во ХАИ, 1990. — С. 131—142.
18. Шульженко Н. Г., Воробьев Ю. С. Численный анализ колебаний системы «турбоагрегат — фундамент». — Киев: Наукова думка, 1991. — 232 с.
19. Сейрег Дэндейдж. Применение фазового моделирования к исследованию влияния величины дисбаланса на вихревое движение ротора с гидродинамическими подшипниками // Проблемы трения и смазки, 1975. — № 1. — С. 41—48.
20. Chu F. H., Pilkey W. D. A direct integration technique for the transient analysis of rotating shafts // Transactions of ASME. — 1982. — Vol. 104, April. — P. 384—388.
21. Zhenq T., Hasebe N. Nonlinear dynamic behaviors of a complex rotor — bearing system // Journal of Applied Mechanics. — 2000. — Vol. 67, September. — P. 485—495.
22. Zhu H. Transient response of flexible non-uniform spinning shaft with nonlinear and asymmetric supports // Journal of Shanghai University. — 2001. — Vol. 5, — № 1, March. — P. 35—39.
23. Chu F., Holmes R. Efficient computation on nonlinear responses of a rotating assembly incorporating the squeeze-film damper // Computer methods in applied mechanics and engineering. — 1998. — Vol. 164. — P. 363—373.
24. Hill H. J. An efficient semi-analytic time integration method with application to non-linear rotordynamic systems // Computational mechanics. — 2000. — № 26. — P. 362—375.
25. Каханер Д. Численные методы и программное обеспечение. — М.: Мир, 2001. — 575 с.
26. Мэтьюз Д. Г., Финк К. Д. Численные методы. — М.: «Вильямс», 2001. — 720 с.
27. Амосов А. А. Вычислительные методы для инженеров. — М.: Высшая школа, 1994. — 544 с.
28. Хайрер Э. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Нежесткие задачи. — М.: Мир, 1990. — 512 с.
29. Бате К., Вилсон Е. Численные методы анализа и МКЭ. — М.: Стройиздат, 1982. — 448 с.
30. Chu F., Zhang Z. Periodic, quasi-periodic and chaotic vibrations of a rub-impact rotor system supported on oil film bearings // Int. J. of Engineering Science, 1997. — № 10/11. P. 963 — 973.