

РАСЧЕТ И КОНСТРУИРОВАНИЕ МАШИН

539.3

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИКИ ОСЕСИММЕТРИЧНОГО РАСКРЫТИЯ МЯГКОЙ ОБОЛОЧКИ В ПОЛЕ СИЛЫ ТЯЖЕСТИ

Канд. техн. наук, доц. П.Г. РУСАНОВ

Изложена несложная методика численного анализа процесса динамического раскрытия мягкой оболочки в поле силы тяжести при наполнении ее газом под давлением на основе дискретной расчетной схемы метода твердых тел. Для осесимметричного варианта задачи получена численная информация о статическом состоянии оболочки при нулевом давлении газа, а также о последующих изменениях формы меридиана, толщины и напряжений оболочки при повышении давления.

There is wrote the simplest manner of numerical analysis for dynamic process expansion soft flexible shell in gravity space during gas filling under pressure by mean the discretization technique solid bodies methods. For axes-symmetrical case of test there is obtained the numerical information about shell static condition, when pressure is absent, and also about the next changes of meridian form, thickness and tensions on account of pressure rising.

Теоретический анализ скоротечного динамического процесса раскрытия замкнутой мягкой оболочки при резком повышении внутреннего давления представляет собой нелинейную задачу механики для системы с бесконечным числом степеней свободы. Предлагается решение *осесимметричного* варианта задачи на основе дискретной расчетной схемы метода твердых тел (МТТ) [1—12], который, по сравнению с МКЭ, в задачах такого класса имеет более наглядные расчетные схемы, простой вывод уравнений состояния, технологичные алгоритмы численного решения и лучшую точность результатов.

Постановка задачи. Симметричная замкнутая область контейнера (рис. 1) ограничена однородной тонкой оболочкой из эластика (коэффициент Пуассона $\nu = 0,5$) толщиной h_0 , массой $M_0 + 2\Delta M$ с жестким подвижным дном массой M . Оболочка подвешена на неподвижной вертикальной трубе — штуцере и наполняется газом. В ненагруженном состоянии ее срединная поверхность имеет форму круглого цилиндра радиусом R и длиной образующей $L_0 + \Delta L$. Внешние радиусы дна и трубы одинаковы и равны $R - 0,5h_0$. До начала раскрытия (время $t \leq 0$) конструкция неподвижна в поле силы тяжести при нулевом избыточном давлении газа p внутри оболочки. Главные допущения: *безмоментное* напряженное состояние материала оболочки с постоянной удельной плотностью, пренебрежение массой газа внутри оболочки, тепловыми процессами и движением воздуха снаружи контейнера. Цель — в рамках наглядных физических представлений изучить переходные процессы изменения формы меридиана, толщины и напряженного состояния оболочки при известном законе роста давления $p = p(t)$.

Дискретная расчетная схема. Следуя МТТ, срединную поверхность оболочки снабжаем регулярной ортогональной сеткой, деформируемой вместе с ней (рис. 2, а). Эта сетка служит основой для разбиения массы оболочки на *элементы физической дискретизации*. Поверхности границ между элементами относим к числу линейчатых поверх-

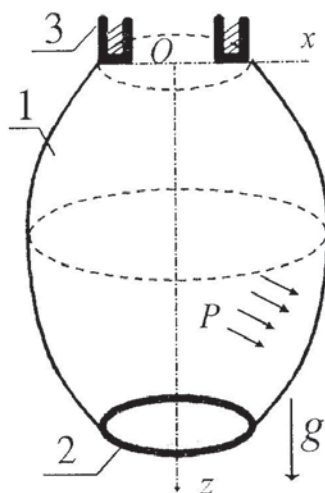


Рис. 1. 1 — оболочка, 2 — дно, 3 — труба

ностей (плоскость и конус), образованных движением нормали к срединной поверхности оболочки по контурам «вживленной» в нее сетки. В *ненагруженном состоянии* оболочки линии сетки расположены в равноотстоящих $n + 2$ горизонтальных и n_0 аксиальных плоскостях. Поэтому в этом состоянии все $(n + 2) \times 2n_0$ элементов одинаковы, имея массу $m = 0,5 M_0 / (nn_0)$ и характерные размеры $l_0 \times 2R\beta \times h_0$, $l_0 = L_0 / (n + 1)$, $\beta = 0,5\pi/n_0$.

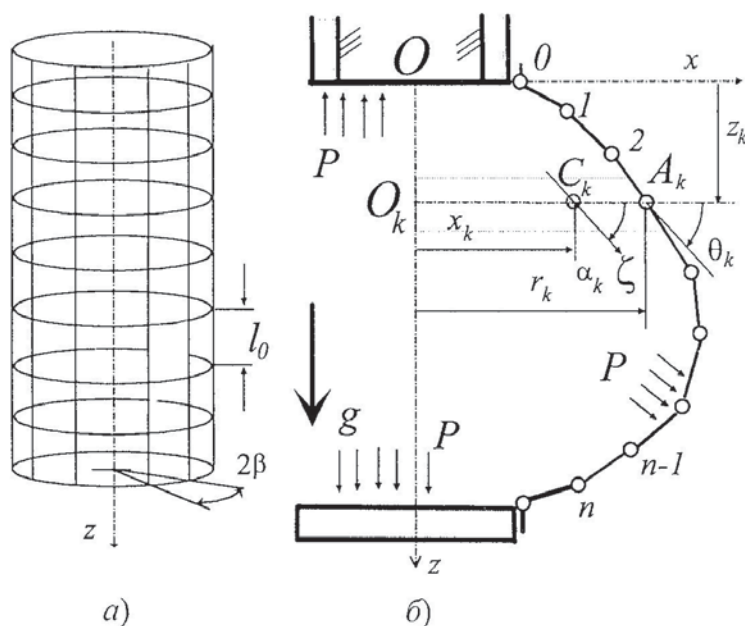


Рис. 2

Упростим граничные условия искомой математической модели, согласовав ранее назначенные величины ΔL , ΔM_0 с шагом сетки разбиения, а именно, положим $\Delta L = l_0$ и $\Delta M = 2mm_0$. Тогда ΔM — масса, а ΔL — ширина одного пояса ненагруженной оболочки.^{*} По той же причине считаем, что крайние пояса с номерами $k = 0$ и $k = n + 1$ на половину своей ширины $0,5l_0$ заходят на боковые цилиндрические поверхности дна и трубы и жес-

^{*} «Поясом» называем совокупность всех элементов оболочки с двумя общими горизонтальными линиями сетки. Пояса нумеруем последовательно от трубы к дну, начиная с 0.

тко связаны с ними, а центры масс крайних поясов *всегда* лежат в соответствующих торцовых плоскостях тел закрепления ($z_0 = 0, z_n$ — аппликаты торцов трубы и дна).

Введенные элементы в дальнейшем играют роль самостоятельных инерционных тел постоянной массы, что допускает изменение их размеров и ориентации разграничивающих поверхностей в процессе деформирования оболочки, но при сохранении элементами всех своих материальных точек.

О движении каждого элемента будем судить по изменениям положения его *собственного репера*, т.е. главных центральных осей инерции массы элемента. С учетом осесимметричности формы оболочки обобщенными координатами системы «дно, реперы элементов оболочки» могут служить z_n — аппликата торца дна и тройки однотипных геометрических параметров, задающих положения реперов для элементов внутренних поясов с номерами $k = 1, 2, \dots, n$: 1) x_k — расстояние от центра масс элемента (точки C_k) до оси Oz ; 2) z_k — аппликата центра масс в неподвижной системе координат; 3) α_k — угол наклона оси инерции $C_k \zeta$ элемента к плоскости параллели.

Чтобы напрямую следить за формой оболочки, вместо координаты x_k будем использовать $r_k = O_k A_k$ — радиус параллели срединной поверхности оболочки в плоскости, проходящей через C_k — центр масс элемента (O_k — центр кривизны параллели, A_k — точка параллели, $z_{A_k} = z_k$, рис. 2, б). Упростим связь между x_k и r_k , пренебрегая на данном этапе размерами поперечного сечения элемента в аксиальной плоскости, проходящей через ось Oz . Тогда, приближенно, $x_k \approx \sin \beta r_k / \beta$, причем точность выполнения данного соотношения повышается с ростом n — числа внутренних поясов. В результате получаем возможность указывать положение дискретных точек меридиана A_k по значениям координат точек C_k , рассчитываемых на основании уравнений динамики.

Уравнения движения. В рассматриваемых условиях у внутренних поясов репер каждого элемента имеет три степени свободы. Однако в целях упрощения применим лишь уравнения движения для координат r_k, z_k , полагая, в силу допущения о безмоментном состоянии оболочки, движения реперов по координатам α_k *быстрыми*, а по координатам r_k, z_k *медленными*. Вместо α_k — угла наклона оси репера $C_k \zeta$ будем следить за θ_k — углом направления касательной к меридиану оболочки в его дискретных точках A_k , оценивая $\text{tg} \theta_k$ по отношению конечных разностей координат r_k, z_k ,

$$\text{tg} \theta_k = \frac{z_{k+1} - z_{k-1}}{r_{k+1} - r_{k-1}}, \quad (k = 1, 2, \dots, n). \quad (1)$$

Заметим, что $\alpha_k \rightarrow \theta_k$ при бесконечном уменьшении параметров β и l_o . В точках A_0, A_{n+1} значения углов θ_k доопределяем формулами $2\theta_0 = 0,5\pi + \theta_1, 2\theta_{n+1} = 0,5\pi + \theta_n$.

Поскольку все элементы одного пояса имеют одинаковые значения координат r_k, z_k , упростим задачу, сократив число элементов в каждом поясе до двух. Тогда $2n_o = 2, 2\beta = \pi$, масса элемента $m = 0,5M/n, x_k = 2/\pi r_k$.

Чередуя номера поясов $k = 1, 2, \dots, n$, составим по два скалярных уравнения динамики на основе теоремы о движении центра масс, примененной к массе лишь одного из элементов пояса. В них применим упрощенные аналитические выражения для проекций главных векторов внешних распределенных сил, получаемые с использованием аппроксимации линии меридиана срединной поверхности — ломаной $A_0, A_1, \dots, A_k, \dots, A_n, A_{n+1}$. Для элемента k -го пояса выражения проекций будут следующими:

на *радиальную* ось, проходящую через центр масс элемента,

$N_{k,r} = 2(\sigma_{k,m2} r_{k,2} h_{k,2} \cos \theta_{k,2} - \sigma_{k,m1} r_{k,1} h_{k,1} \cos \theta_{k,1}), T_{k,r} = \sigma_{k,t} (h_{k,1} l_{k,1} + h_{k,2} l_{k,2})$ — от меридиональных и окружных сил в оболочке; $P_{k,r} = p(t) S_{kr}$ — от сил избыточного давления газа; $Q_{k,r} = -2\mu S_{kr} \dot{r}_k$ — от сил вязкого сопротивления внешнего газа;

на вертикальную ось z

$N_{k,z} = \pi(\sigma_{k,m2} r_{k,2} h_{k,2} \sin\theta_{k,2} - \sigma_{k,m1} r_{k,1} h_{k,1} \sin\theta_{k,1})$ — от меридиональных сил; $P_{k,z} = p(t) S_{kz}$ — от сил избыточного давления газа; $Q_{k,z} = -\mu |S_{kz}| \dot{z}_k$ — от сил вязкого сопротивления внешнего газа; $G_{k,z} = mg$ — от сил тяжести.

Здесь коэффициент 2 в выражениях для $N_{k,r}$, $Q_{k,r}$ получен в результате аналитического интегрирования проекций элементарных распределенных сил по дуге параллели срединной поверхности в пределах границ элемента; дополнительные нижние индексы 1 и 2 указывают на соседство границы или участка элемента, соответственно, с нижним или верхним поясами; $S_{kz} = 0,5\pi(r_{k,2}^2 - r_{k,1}^2)$, $S_{kr} = (0,5r_{k-1} + r_k + 0,5r_{k+1}) H_k$ — площади проекций срединной поверхности элемента деформированной оболочки на две плоскости, перпендикулярные, соответственно, оси Oz и радиальной оси, проходящей через центр масс элемента;

$$2H_k = z_{k+1} - z_{k-1}; \quad 2r_{k,1} = r_k + r_{k-1}; \quad 2r_{k,2} = r_{k+1} + r_k;$$

$$2\theta_{k,1} = \theta_k + \theta_{k-1}; \quad 2\theta_{k,2} = \theta_k + \theta_{k+1};$$

$$h_{k,1} = \frac{V_0}{l_{k,1} r_{k,1}}; \quad h_{k,2} = \frac{V_0}{l_{k,2} r_{k,2}}; \quad V_0 = 0,5h_0 l_0 R; \quad (2)$$

$$2l_{k,1} = \sqrt{(r_k - r_{k-1})^2 + (z_k - z_{k-1})^2}; \quad 2l_{k,2} = \sqrt{(r_{k+1} - r_k)^2 + (z_{k+1} - z_k)^2},$$

где $2l_{k,1}$, $2l_{k,2}$ — длины отрезков ломаной линии, аппроксимирующей меридиан, $h_{k,1}$, $h_{k,2}$ — текущие толщины k -го пояса оболочки по его верхней и нижней границам; $\sigma_{k,m}$, $\sigma_{k,l}$, $\varepsilon_{k,m}$, $\varepsilon_{k,l}$ — осредненные по толщине оболочки напряжения и линейные деформации материала на границах элемента в меридиональных и окружных направлениях, $\varepsilon_{k,n}$ — линейная деформация оболочки в нормальном к ее поверхности направлении

$$\sigma_{k,m1} = E_1[\varepsilon_{k,m1} + \nu(\varepsilon_{k,l1} + \varepsilon_{k,n1})]; \quad \sigma_{k,m2} = E_1[\varepsilon_{k,m2} + \nu(\varepsilon_{k,l2} + \varepsilon_{k,n2})];$$

$$\sigma_{k,l1} = E_1[\varepsilon_{k,l1} + \nu(\varepsilon_{k,m1} + \varepsilon_{k,n1})]; \quad \sigma_{k,l2} = E_1[\varepsilon_{k,l2} + \nu(\varepsilon_{k,m2} + \varepsilon_{k,n2})]; \quad (3)$$

где $E_1 = E/(1-\nu^2)$; $\mu > 0$ — постоянный коэффициент вязкого сопротивления.

Относительные деформации материала оболочки ε_m , ε_l , ε_n на границах элемента k -го пояса оцениваем по изменениям характерных размеров элемента

$$\begin{aligned} \varepsilon_{k,m1} &= 2l_{k,1}/l_0 - 1; \quad \varepsilon_{k,l1} = r_{k,1}/R - 1; \quad \varepsilon_{k,n1} = h_{k,1}/h_0 - 1; \\ \varepsilon_{k,m2} &= 2l_{k,2}/l_0 - 1; \quad \varepsilon_{k,l2} = r_{k,2}/R - 1; \quad \varepsilon_{k,n2} = h_{k,2}/h_0 - 1. \end{aligned} \quad (4)$$

В итоге динамика движения элементов оболочки описывается следующей системой однотипных уравнений (опущен индекс k — номер пояса):

$$\frac{2}{\pi} m \ddot{r} = P_r + N_r + T_r + Q_r; \quad m \ddot{z} = P_z + N_z + G_z + Q_z. \quad (5)$$

Математическую модель завершают уравнение поступательного движения дна вдоль оси z , с добавлением к массе дна массы нижнего пояса оболочки,

$$(M + 2m) \ddot{z}_d = (M + 2m)g + p(t) \pi r_{1,n}^2 + N_{1,z} - \mu \pi r_{1,n}^2 \dot{z}_d, \quad (6)$$

и принятый закон изменения давления p от 0 до p_{\max} на отрезке времени $[0, T]$, например,

$$p(t) = p_{\max} (1 - e^{-bt}), \quad b = \text{const} > 0, \quad (7)$$

где T — намеченное время исследования процесса заполнения оболочки.

Применив обозначения:

для безразмерных *переменных* $r^*, z^*, h^*, l^*, p^*, \sigma^*, \tau$ (без указания нижних индексов для r, z, l, h, σ) — $r = Rr^*, z = L_o z^*, h = h_o h^*, l = L_o l^*, p = p_{\max} p^*, \sigma = E_1 \sigma^*, t = T\tau$ ($0 \leq \tau \leq 1$);

для безразмерных *констант* — $\eta = \frac{L_o}{R}, C_r^p = \pi \frac{p_{\max} L_o T^2}{m}, C_z^p = \frac{\pi p_{\max} (RT)^2}{2mL_o},$

$$C_r^m = \frac{\pi E_1 h_o T^2}{2m}, C_r^i = \frac{\pi E_1 L_o h_o T^2}{mR}, C_z^m = \frac{\pi E_1 R h_o T^2}{mL_o}, C_m^g = \frac{gT^2}{L_o}, C_r^\mu = \frac{\pi \mu R L_o T}{m}, C_z^\mu = \frac{\pi \mu R^2 T}{2m},$$

$$K^p = \frac{\pi p_{\max} (RT)^2}{(M + 2m)L_o}, K_z^m = \frac{2\pi E_1 R h_o T^2}{(M + 2m)L_o}, K^\mu = \frac{\pi \mu R^2 T}{M + 2m};$$

приведем систему (1)—(7) к безразмерному виду (символ * у безразмерных параметров опущен, дифференцирование переменных — по безразмерному времени τ)

$$\begin{aligned} \ddot{r}_k &= C_r^p (r_{1,k} l_{1,k} + r_{2,k} l_{2,k}) p(\tau) - C_r^m |r_{1,k} l_{1,k} + r_{2,k} l_{2,k}| \dot{r}_k + \\ &+ C_r^m r_{2,k} h_{2,k} [\varepsilon_{m2,k} + v(\varepsilon_{t2,k} + \varepsilon_{n2,k})] \cos \theta_{2,k} - \\ &- C_r^m r_{1,k} h_{1,k} [\varepsilon_{m1,k} + v(\varepsilon_{t1,k} + \varepsilon_{n1,k})] \cos \theta_{1,k} - \\ &- C_r^i l_{1,k} h_{1,k} [\varepsilon_{n1,k} + v(\varepsilon_{m1,k} + \varepsilon_{n1,k})] - C_r^i l_{2,k} h_{2,k} [\varepsilon_{n2,k} + v(\varepsilon_{m2,k} + \varepsilon_{n2,k})]; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \ddot{z}_k &= C_z^g - C_z^p (r_{1,k+1}^2 - r_{1,k}^2) p(\tau) - C_z^\mu |r_{1,k+1}^2 - r_{1,k}^2| \dot{z}_k + \\ &+ C_z^m r_{2,k} h_{2,k} [\varepsilon_{m2,k} + v(\varepsilon_{t2,k} + \varepsilon_{n2,k})] \sin \theta_{2,k} - \\ &- C_z^m r_{1,k} h_{1,k} [\varepsilon_{m1,k} + v(\varepsilon_{t1,k} + \varepsilon_{n1,k})] \sin \theta_{1,k}; \end{aligned}$$

$$\ddot{z}_n = C_z^g + K^p r_{1,n}^2 p(\tau) + K_z^m r_{1,n} h_{1,n} [\varepsilon_{m1,n} + v(\varepsilon_{t1,n} + \varepsilon_{n1,n})] - K_z^\mu r_{1,n}^2 \dot{z}_n;$$

$$\text{tg} \theta_k = \eta \frac{z_{k+1} - z_{k-1}}{r_{k+1} - r_{k-1}}; \quad p(\tau) = 1 - \exp(-bT\tau);$$

$$2l_{k,1} = \sqrt{(r_k - r_{k-1})^2 / \eta^2 + (z_k - z_{k-1})^2}; \quad 2l_{k,2} = \sqrt{(r_{k+1} - r_k)^2 / \eta^2 + (z_{k+1} - z_k)^2}.$$

Остальные соотношения из (2)—(4) пригодны и для безразмерной формы, если в них условно принять $R = h_o = E_1 = 1, L_o = 1/(n + 1)$.

Начальные условия. По условиям задачи до начала заполнения оболочки газом скоростные компоненты вектора состояния решающей системы уравнений (1)—(7) $X(t) = \{r_1, \dots, r_k, \dots, r_n, z_1, \dots, z_k, \dots, z_n, z_n, \dot{r}_1, \dots, \dot{r}_k, \dots, \dot{r}_n, \dot{z}_1, \dots, \dot{z}_k, \dots, \dot{z}_n, \dot{z}_n\}$ равны нулю: $\dot{r}_k = 0; \dot{z}_k = 0; \dot{z}_n = 0; (k = 1, n)$. Однако пока остается неизвестной статичная форма средней поверхности оболочки в однородном поле сил тяжести. Прямой путь расчета значений координат $z_n, r_k, z_k (k = 1, n)$ дискретных точек A_k меридиана покоящейся оболочки — решить существенно нелинейные, алгебраические уравнения статики, т.е. частный случай системы (1)—(7) при $p = 0$ и нулевых скоростях и ускорениях.

Чтобы не усложнять алгоритм компьютерного решения, для расчета исходной статической формы оболочки в поле силы тяжести нами применен динамический подход, учитывающий свойства механических систем с диссипацией энергии. Для этого алгоритм численного решения задачи предусматривает предварительный этап, где проводится расчет статической формы меридиана срединной поверхности оболочки в поле силы тяжести на основании уже имеющейся системы уравнений (1)—(7), но при $p \equiv 0$ и переменном ускорении g , изменяющемся в *условном* времени скачком или монотонно от нуля до номинального значения $g = 10 \text{ м/с}^2$, с использованием тривиальных начальных условий для вектора состояния, соответствующих покою ненагруженной оболочки: $r_k = R$, $z_k = k l_o$, $z_{д} = L_o = (n + 1)l_o$, $h_k = h_o$, $\epsilon_{mk} = \epsilon_{tk} = \epsilon_{nk} = 0$, ($k = 1, n$). Расчет на первом этапе прекращался при снижении норм скоростей и ускорений вследствие учета сил вязкого сопротивления до заданных уровней точности при установившемся номинальном значении g . Время, затраченное на расчет статической формы меридиана, на последующих этапах не учитывалось. Полученные на первом этапе численным интегрированием системы уравнений значения координат дискретных точек меридиана восполняют для последующего этапа недостающие компоненты вектора состояния в начальный момент заполнения оболочки газом $t = 0$ с. С качественных позиций данный способ расчета статического состояния конструкции можно отнести к числу методов последовательного нагружения. На втором этапе решаем ту же задачу Коши, но с переменным давлением газа.

Результаты расчетов. Численный анализ решений выполнен для следующих исходных данных: $n = 100$, $M = 10 \text{ м} = 10 \text{ кг}$, $L_o = R = 200h_o = 1 \text{ м}$, $g = 10 \text{ м/с}^2$; $\mu = 100 \text{ Н·с/м}^3$, $E_1 = 1 \text{ МПа}$, $p(t) = 1 - \exp(-0,5t) \text{ КПа}$, $T = 10 \text{ с}$.

Расчет на первом этапе формы неподвижно висящей «тяжелой» оболочки вращения при $p = 0$, показал, что, помимо удлинения образующей и перемещения вниз дна на 6,94 мм, оболочка втянулась по всей высоте внутрь, образуя «шейку» в верхней части (рис. 3, поз. 0). Наибольшее радиальное перемещение срединной поверхности внутрь $w = -6,32 \text{ мм}$ имеет место на уровне 25-го пояса.

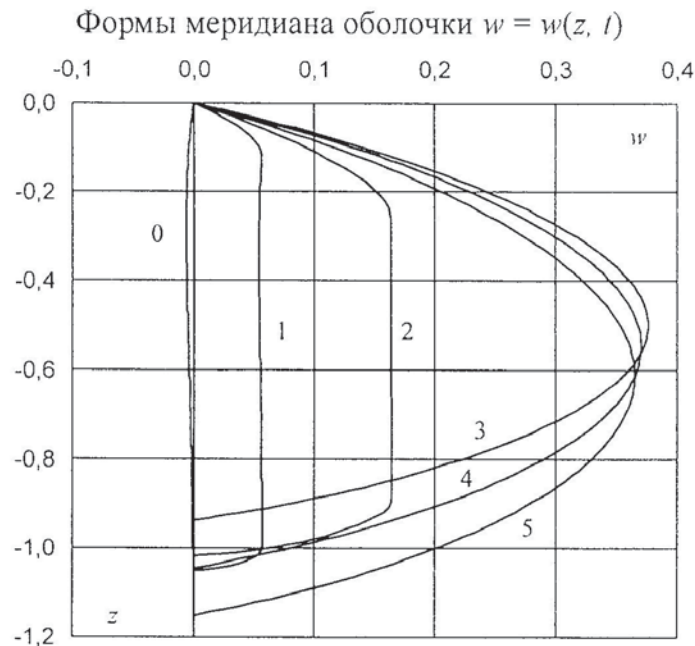


Рис. 3

На втором этапе рассчитаны формы меридиана оболочки при ее заполнении газом для дискретных моментов времени $t = 0,05; 0,1; 2; 4; 10$ с (рис. 3, поз. 1—5). Для принятого уровня сил вязкого сопротивления с ростом давления до стационарного значения $p_{\max} = 1$ КПа переходный процесс преобразования формы конструкции носит квазианериодический характер. При этом наблюдается наибольший прогиб линии меридиана в средней части в радиальном направлении (выпучивание оболочки), сопровождаемый сначала подъемом, а затем опусканием дна. В конечный момент расчета $t = T$ наибольший прогиб оболочки в радиальном направлении наружу составил $w = 36,5$ см, а дно опустилось дополнительно вниз на 14,2 см. Отметим, что в расчетах с более низким значением коэффициента сопротивления ($\mu = 10$ Н·с/м³) движения всей линии меридиана оболочки и дна визуально воспринимаются по графической информации, выводимой на экран в процессе счета, как затухающие колебания. Практическое отсутствие волн на расчетных изображениях линии меридиана подтверждает правомочность применения метода разделения быстрых и медленных движений при формировании данной математической модели.

О динамике изменения толщины и напряженного состояния оболочки можно судить по рис. 4—6, где соответственно представлены $h = h(s)$, $\sigma_m = \sigma_m(s)$, $\sigma_l = \sigma_l(s)$ — графики распределения толщины и меридиональных и окружных напряжений по длине оболочки (в безразмерном виде) для указанных выше дискретных моментов времени. $s = z/L_0$ — безразмерная аппликата горизонтальной плоскости сечения свободной поверхности оболочки в ненагруженном состоянии, $0 \leq s \leq 1$.

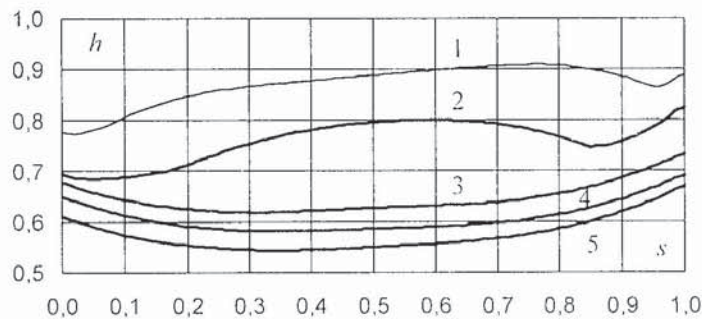
Толщина оболочки $h = h(s, t)$ 

Рис. 4

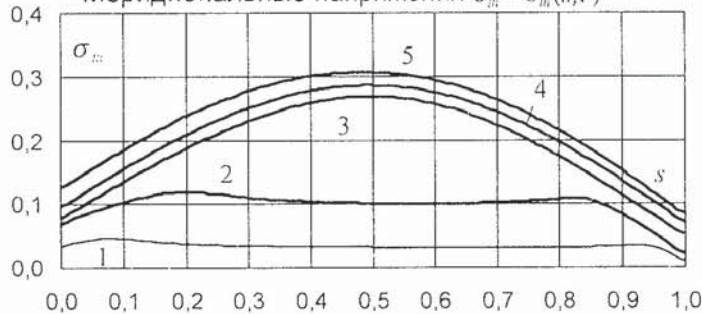
Меридиональные напряжения $\sigma_m = \sigma_m(s, t)$ 

Рис. 5

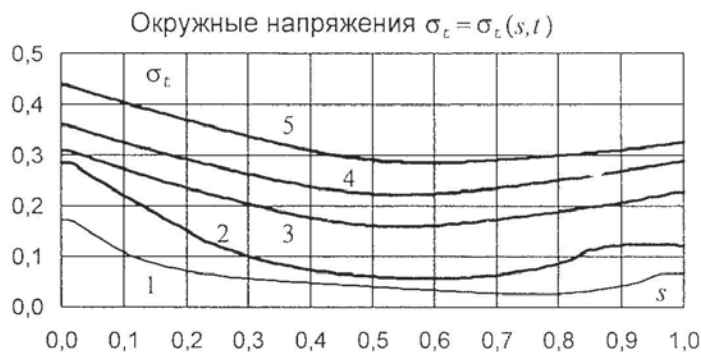


Рис. 6

Толщина оболочки в средней части к моменту окончания ее заполнения газом в 2 раза меньше, чем номинальная толщина h_0 . По сравнению с начальным моментом времени максимальные значения меридиональных и окружных напряжений к моменту окончания заполнения оболочки возросли более, чем в 30 раз. При этом меридиональные напряжения достигают наибольших значений в средней части оболочки, а окружные напряжения — по концам оболочки.

Затраты компьютерного решения данной задачи Коши с шагом 10^{-4} с на интервале физического времени $T = 10$ с — менее 3 минут.

В заключение отметим, что результаты расчетов для более редкой сетки дискретизации, когда $n = 10$, отличаются от приведенных выше для случая $n = 100$ менее, чем на 15 %.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Русанов П. Г. Построение расчетных моделей динамики сплошной среды с помощью метода твердых тел / М.: МАИ: сб. докл. Научн. Симпоз. «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред». — 1995. — С. 42—43.
2. Русанов П. Г. Анализ динамики контактного микропереключателя методом твердых тел (там же, С. 43—44.).
3. Русанов П. Г. Применение метода твердых тел в динамике деформируемого тела / Пермь: сб. докл. 10-той Зимней школы Ур. Отд. РАН по механике сплошных сред. — 1995. — С. 213—214.
4. Русанов П. Г. Моделирование цунами методом твердых тел (там же, С. 213)
5. Русанов П. Г., Русанова Е. М. Компьютерный анализ динамики хлопка полукольцевой арки при симметричном нагружении силой в плоскости кольца / Подольск.: Госкомобр. 3-ий Межд. сем. «Технологические проблемы прочности». — 1996. — С. 146-148.
6. Русанов П. Г. Анализ статики пластины, нагруженной неконсервативными силами, методом твердых тел / Подольск.: Госкомобр. 8-ой Межд. сем. «Технологические проблемы прочности». — 2001. — С. 188—197.
7. Жуков И. В., Кстат В. В., Русанов П. Г. Анализ динамики упругой балки методом физической дискретизации // Известия вузов. Машиностроение. — 2000. — №3. — С. 3—9.
8. Русанов П. Г. Анализ динамики деформируемых тел с помощью дискретных моделей / М.: МГУ. Сб. трудов конф., посвященной 100-летию со дня рожд. чл.-корр. АН СССР Б.В. Булгакова. — 2000. — С. 116.
9. Русанов П. Г. Вычислительные модели механики на основе метода твердых тел / М.: РУДН, сб. докл. на XI Всеросс. конф. по проблемам математики, информатики, физики и химии. — 2004. — С. 169—170.
10. Русанов П. Г. Примеры анализа статики и динамики пластин методом физической дискретизации / М.: РУДН, сб. докл. на XII Всеросс. конф. по проблемам математики, информатики, физики и химии. — 2005. — С. 46—47.
11. Русанов П. Г. Компьютерный анализ нелинейных динамических процессов деформируемых механических систем по расчетным схемам на основе метода твердых тел / М.: РУДН, сб. докл. на XII Всеросс. конф. по проблемам математики, информатики, физики и химии. — 2006. — С. 73.
12. Русанов П. Г. Отличия расчетов формы упругой линии гибкого стержня методами дискретизации МКЭ и МТТ // Известия вузов. Машиностроение. — 2006. — № 7. — С. 3—9.