

# РАСЧЕТ И КОНСТРУИРОВАНИЕ МАШИН

261.01

## СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ДВУХ МЕТОДОВ РЕШЕНИЯ КОНТАКТНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ КОЛЬЦЕВОГО СЛОЯ ПРОИЗВОЛЬНОЙ ТОЛЩИНЫ

Д-р техн. наук, проф. Л.В. БОЖКОВА, канд. техн. наук, проф. В.Г. РЯБОВ,  
канд. техн. наук, доц. Г.И. НОРИЦИНА

*Предложен аналитический метод решения контактной задачи для кольцевого слоя произвольной толщины. В его основе лежит использование функции напряжений Эри в рядах. Закон изменения контактных давлений выражен в виде некоторого бесконечного ряда, содержащего бесконечное число неизвестных констант. Они определены двумя способами. При решении задачи была исследована и улучшена сходимость всех бесконечных рядов. В результате найден закон изменения контактных давлений, характеристика сжатия, а также напряженно-деформированное состояние слоя.*

*Analytical method of solving a Hertzian problem in a ring layer of arbitrary thickness is offered. Its basis is in the usage of Airy stress functions in the series. The law of variation of contact pressures is in the form of some infinite series containing infinite number of unknown constants. They are defined by two ways. At the task solution convergence of all infinite series has been examined and improved. The law of variation of contact pressures, the characteristic of compression, and also mode of deformation of a layer.*

В [1, 2] предложен инженерный метод решения конструктивно-нелинейных контактных задач для упругого кольцевого слоя произвольной толщины. Он прост и удобен, однако в основе этого метода лежит допущение о том, что контактные давления изменяются по закону косинуса и геометрическое условие контакта удовлетворяется приближенно (в трех точках зоны контакта).

В связи с этим представляется весьма важным получение уточненного метода решения, свободного от указанных выше допущений. По уточненному решению представится возможность оценить погрешности, полученные при использовании метода приближенного решения, и определить класс задач, для которых целесообразно его применять.

Расчетная схема изображена на рис. 1.

Закон изменения контактных давлений  $p(\theta)$  представим в виде некоторого бесконечного ряда

$$\bar{p}(\theta) \begin{cases} \sum_{m=0}^{\infty} p_m \cos(m\pi[\theta/\theta_0]), & |\theta| < \theta_0 \\ 0 & |\theta| > \theta_0 \end{cases} \quad (1)$$

где  $\bar{p}(\theta) = p(\theta)/E$  — безразмерная величина,  $p_m (m = 0, 1, 2, \dots)$  — безразмерные неизвестные константы.

Разложим функцию  $\bar{p}(\theta)$  в ряд Фурье на промежутке  $-\pi \leq \theta \leq \pi$



где  $\delta$  — параметр, характеризующий сближение тел при сжатии, его можно определить, подставляя в (6)  $\theta = 0$ ,

$$\bar{\delta} = -2/\pi \left\{ \alpha_0 p_0 \theta_0 + \sum_{m=0}^{\infty} \left( (-1)^{m+1} p_m \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta_n \sin n\theta_0}{\tilde{m}^2 - n^2} \right) \right\}. \quad (7)$$

В результате подстановки  $\delta$  в (6) получим

$$\sum_{m=0}^{\infty} p_m \varphi_m(\theta) = (1/2)r^* \theta^2, \quad \theta < \theta_n, \quad (8)$$

где  $\varphi_0(\theta) = 1/\pi \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{\beta_n}{n^2} (\sin n(\theta_0 - \theta) + \sin n(\theta_0 + \theta) - 2 \sin n\theta_0) \right\}$ ,

$$\varphi_m(\theta) = \frac{(-1)^{m+1}}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{\beta_n}{(\tilde{m}^2 - n^2)} (\sin n(\theta_0 - \theta) + \sin n(\theta_0 + \theta) - 2 \sin n\theta_0) \right\},$$

$m = 1, 2, \dots$

Функциональные ряды, входящие в выражения функций  $\varphi_0(\theta)$  и  $\varphi_m(\theta)$  ( $m = 1, 2, \dots$ ), сходятся равномерно для всех  $|\theta| < \theta_0$ .

Так как последовательность чисел  $\beta_n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ), монотонно убывая, сходится к числу  $\beta = 2A$ , можно улучшить сходимость рядов, входящих в выражения функции  $\varphi_0(\theta)$  и  $\varphi_m(\theta)$  ( $m = 1, 2, \dots$ ).

В результате получим

$$\begin{aligned} \varphi_0(\theta) = & \beta/\pi \left( \int_{\theta_0}^{\theta} \ln \left[ 2 \sin \frac{\theta_0 - \theta}{2} \right] d\theta - \int_{-\theta_0}^{\theta} \ln \left[ 2 \sin \frac{\theta_0 + \theta}{2} \right] d\theta - 2 \int_{\theta_0}^{\theta} \ln \left[ 2 \sin \frac{\theta}{2} \right] d\theta \right) + \\ & + 1/\pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\beta_n - \beta)}{n^2} (\sin n(\theta_0 - \theta) + \sin n(\theta_0 + \theta) - 2 \sin n\theta_0), \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \varphi_m(\theta) = & \beta/\pi m \left\{ \sin(\tilde{m}\theta) \left( \ln \frac{\theta_0 - \theta}{\theta_0 + \theta} + S_1(\tilde{m}(\theta_0 + \theta)) - S_1(\tilde{m}(\theta_0 - \theta)) \right) + \right. \\ & + \cos(\tilde{m}\theta) (S_1(\tilde{m}(\theta_0 + \theta)) + S_1(\tilde{m}(\theta_0 - \theta))) - 2S_1(m\pi) \left. \right\} + \\ & + \frac{(-1)^{m+1}}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\beta_n - \beta)}{(\tilde{m}^2 - n^2)} (\sin n(\theta_0 - \theta) + \sin n(\theta_0 + \theta) - 2 \sin n\theta_0). \end{aligned} \quad (10)$$

$m = 1, 2, \dots$

Можно также улучшить сходимость ряда, входящего в (7). В результате  $\delta$ , характеризующий сближение тел при сжатии, выглядит следующим образом:

$$\delta = -2/\pi \left\{ \alpha_0 p_0 \theta_0 + \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^{m+1} p_m \left( \frac{(-1)^{m+1}}{\tilde{m}} \beta S_1(m\pi) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\beta_n - \beta) \sin n\theta_0}{(\tilde{m}^2 - n^2)} \right) \right\}. \quad (11)$$

Был построен алгоритм определения неизвестных констант  $p_m$  ( $m = 1, 2, \dots$ ), которые определяли двумя способами. Первый состоит в решении задачи о разложении про-

извольной функции  $f(\theta)$  по известным функциям  $\varphi_m(\theta)$  ( $m = 0, 1, 2, \dots$ ) с помощью бесконечных систем линейных алгебраических уравнений. Второй состоит в решении задачи о разложении функции  $f(\theta)$  по функциям  $f_m(\theta)$  ( $m = 0, 1, 2, \dots$ ) путем ортогонализации этой системы функций.

Первый способ определения неизвестных констант  $p_m$  ( $m = 0, 1, 2, \dots$ ) дает бесконечную систему линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{m=0}^{\infty} p_m c_{k,m} = b_k, \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

где  $c_{k,m} = \int_{-\theta_0}^{\theta} \varphi_m(\theta) \psi_k(\theta) dt, \quad (k = 0, 1, \dots), \quad (m = 0, 1, \dots),$

$$b_k = (1/2)r^* \int_{-\theta_0}^{\theta} \theta^2 \psi(\theta) dt, \quad (k = 0, 1, \dots).$$

Выбирая в качестве системы функций  $\psi_k(\theta)$  ( $k = 0, 1, 2, \dots$ ) систему  $\cos(k\pi\theta/\theta_0)$  ( $k = 0, 1, \dots$ ), являющуюся полной на отрезке  $(-\theta_0, \theta_0)$ , постоянные коэффициенты  $c_{k,m}$  и  $b_k$  бесконечной системы линейных алгебраических уравнений будут определяться следующими соотношениями:

$$c_{k,m} = \int_{-\theta_0}^{\theta} \varphi_m(\theta) \cos \frac{k\pi\theta}{\theta_0} d\theta, \quad (k = 0, 1, \dots), \quad (m = 0, 1, \dots),$$

$$b_0 = (1/3)r^* \theta_0^3,$$

$$b_k = (-1)^k (2r^* \theta_0^3) / (k^2 \pi^2), \quad (k = 1, 2, \dots).$$

Второй способ дает построение ортогональной системы функций на основании следующего соотношения:

$$\Phi_m(\theta) = \sum_{i=0}^m \frac{T_{i,m}^{-1}}{T_{m,m}^{-1}} \varphi_i(\theta),$$

где  $T_{i,m}^{-1}$  — элемент некоторой обратной матрицы  $[T]_m^{-1}$ , стоящей на пересечении  $i$ -ой строки и  $m$ -го столбца. При этом элементы матрицы  $[T]_m$  определяются по формуле

$$T_{i,j} = \int_{-\theta_0}^{\theta} \varphi_i(\theta) \varphi_j(\theta) d\theta, \quad i = 0, 1, 2, \dots, m, \quad j = 0, 1, 2, \dots, m.$$

Для определения зоны контакта, характеризуемой углом  $\theta_0$ , записывается условие статического равновесия в безразмерных параметрах

$$\bar{Q} = \int_{-\theta_0}^{\theta} \bar{p}(\theta) d\theta, \quad (12)$$

где  $\bar{Q} = Q/Er_2 r^*$ ,  $\bar{p}(\theta) = p(\theta)/Er^*$ ,  $r^* = r_2/r_0$ .

Подставляя в уравнение равновесия (1), получим

$$\bar{Q} = 2\bar{p}_0\theta_0, \quad (13)$$

где  $\bar{p}_0 = p_0/(1+r^*)$ .

Покажем, что представление закона изменения контактных давлений в (1) удовлетворяет условию равенства нулю контактных давлений на границе области контакта. Для этого возьмем производные по  $\theta$  от соотношений (8)—(10)

$$\sum_{m=0}^{\infty} p_m \varphi'_m(\theta) - r\theta, \quad (14)$$

$$\varphi'_0(\theta) = 1/\pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta_n}{n^2} (\cos n(\theta_0 - \theta) + \cos n(\theta_0 + \theta)), \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \varphi'_m(\theta) = & -\beta/\pi \left\{ \cos(\tilde{m}\theta) \left( \ln \frac{\theta_0 - \theta}{\theta_0 + \theta} + S_1(\tilde{m}(\theta_0 + \theta)) - S_1(\tilde{m}(\theta_0 - \theta)) \right) \right\} - \\ & - \sin(\tilde{m}\theta) (S_1(\tilde{m}(\theta_0 + \theta)) + S_1(\tilde{m}(\theta_0 - \theta))) \Big\} + \\ & + \frac{(-1)^{m+1}}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(\beta_n - \beta)n}{(\tilde{m}^2 - m^2)} (\cos n(\theta_0 - \theta) - \cos n(\theta_0 + \theta)). \end{aligned} \quad (16)$$

$m = 1, 2, \dots$

При  $\theta \rightarrow \theta_0$  (15), (16) могут быть аппроксимированы соответственно следующими выражениями:

$$\varphi'_0 = \beta/\pi \ln \left( \frac{\theta_0 + \theta}{\theta_0 - \theta} \right), \quad (17)$$

$$\varphi'_m = \beta/\pi \cos(\tilde{m}\theta) \ln \left( \frac{\theta_0 + \theta}{\theta_0 - \theta} \right). \quad (18)$$

Тогда (14) с учетом (17) и (18) примет вид при  $\theta \rightarrow \theta_0$

$$\sum_{m=0}^{\infty} p_m \cos \left( \frac{m\pi}{\theta_0} \theta \right) = \frac{\pi r^*}{\beta} \frac{\theta}{\ln \left( \frac{\theta_0 + \theta}{\theta_0 - \theta} \right)}. \quad (19)$$

Сравнивая полученное выражение с (1), можно сделать вывод, что контактные давления равны нулю на границе области контакта.

Следует подчеркнуть, что при  $r_0 \rightarrow \infty$  полученное решение будет соответствовать случаю контактного взаимодействия упругого слоя с жестким плоским основанием.

Таким образом, общая схема расчета по предложенному уточненному методу решения контактных конструктивно-нелинейных задач для упругого кольцевого слоя при малых зонах контакта дает возможность построить: график зависимости между результирующей нагрузкой  $Q$ , представленной в безразмерной форме, и углом  $\theta_0$ , график зависимости между параметром  $\delta$  и углом  $\theta_0$ .

Далее по результирующей нагрузке  $Q$  (или заданному параметру  $\delta$ ) определяем с помощью построенного соответствующего графика величину угла  $\theta_0$  (а значит, величину зоны контакта).

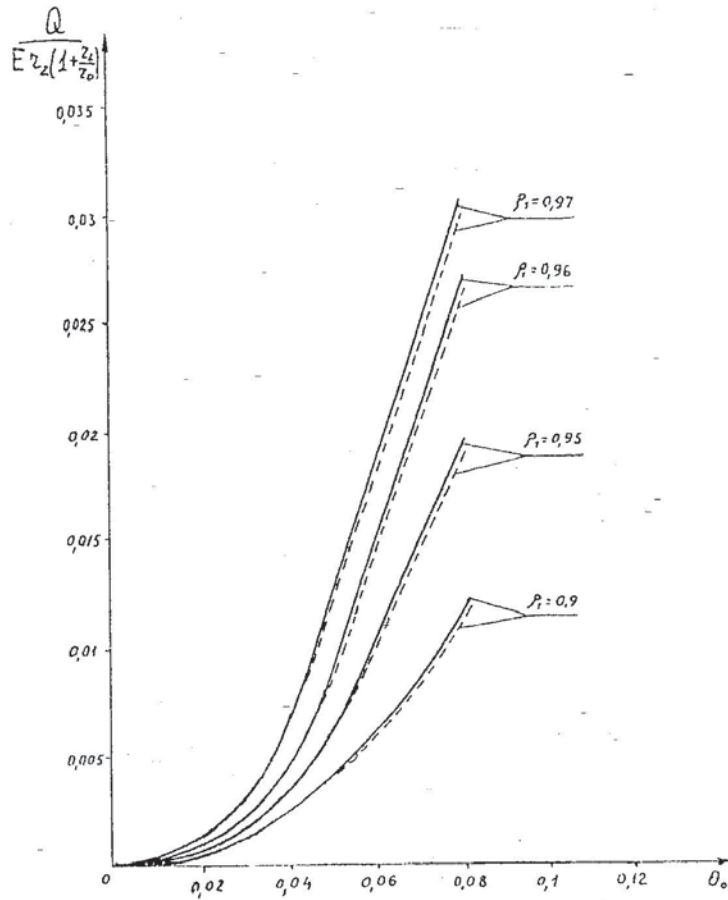


Рис. 2. Зависимость угла  $\theta_0$  от результирующей нагрузки при уточненном методе решения

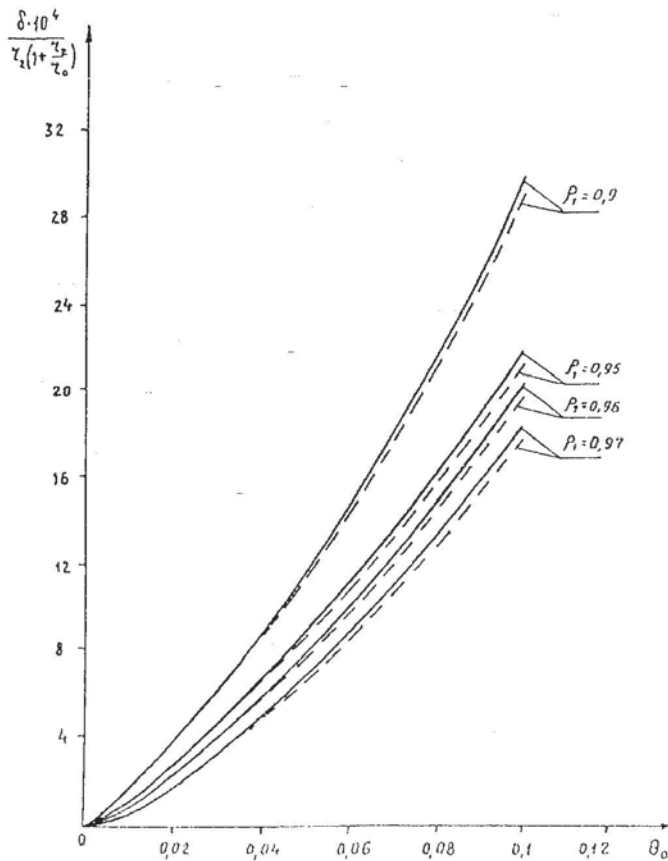


Рис. 3. Зависимость угла  $\theta_0$  от параметра  $\delta$  при уточненном методе решения

Затем для найденного значения угла  $\theta_0$  вычисляем константы  $p_m$  ( $m = 0, 1, 2, \dots$ ) одним из описанных выше способов.

И, наконец, определяем угол  $\theta_0$  и константы  $p_m$  ( $m = 0, 1, 2, \dots$ ), находим на основании (1) закон распределения радиальных контактных давлений  $p(\theta)$ .

Зная закон распределения контактных давлений  $p(\theta)$  в зоне контакта, можно определить напряжение и деформированное состояние упругого кольцевого слоя.

На рис. 2 представлены графики зависимостей между результирующей нагрузкой  $Q$  и углом  $\theta_0$  при разных значениях безразмерного параметра  $\rho_1$  ( $\rho_1 = 0,97; 0,96; 0,95; 0,9$ ).

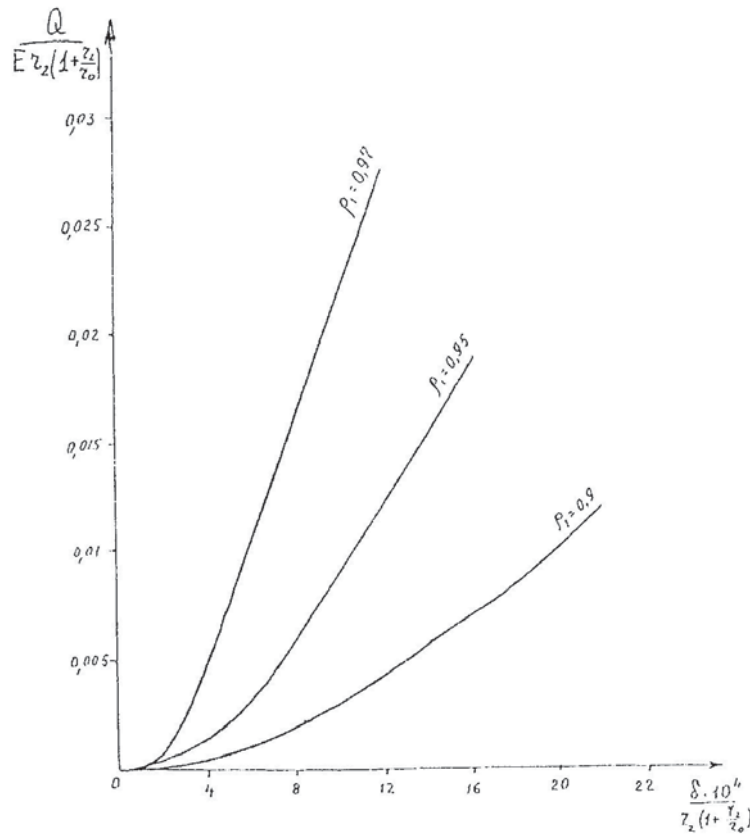


Рис. 4. Зависимость параметра  $\delta$  от результирующей нагрузки при уточненном методе решения

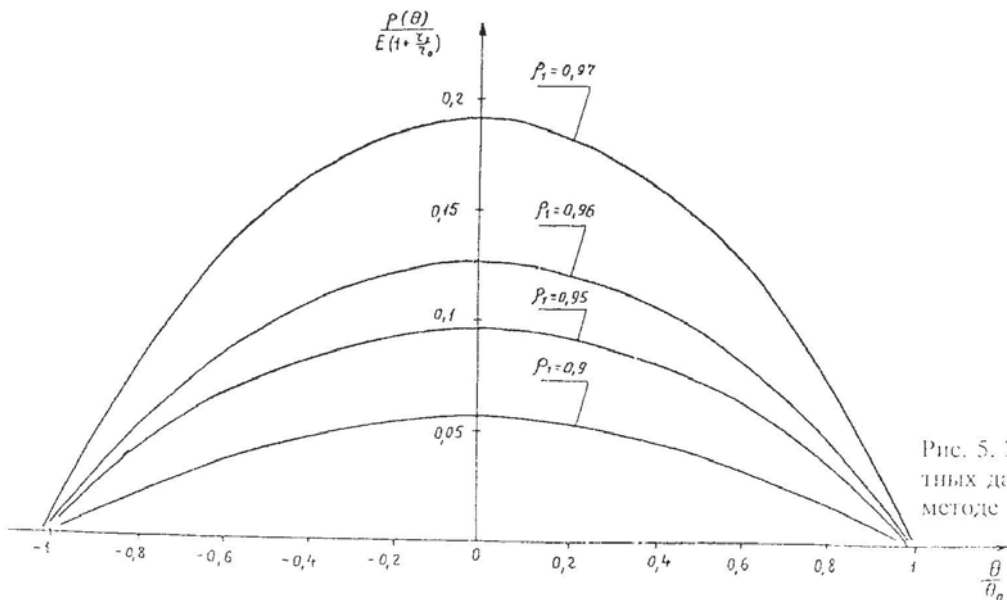


Рис. 5. Закон изменения контактных давлений при уточненном методе решения

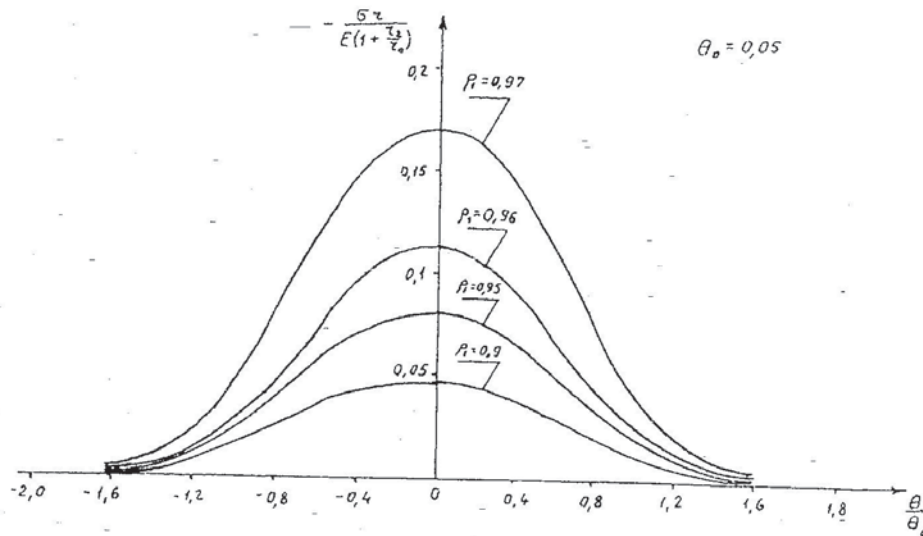


Рис. 6. Радиальные напряжения на связывающей поверхности твердого цилиндра с упругим слоем

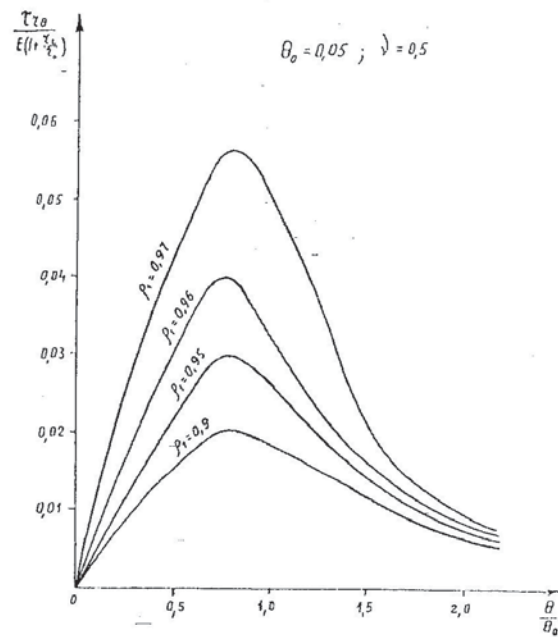


Рис. 7. Касательные напряжения на связывающей поверхности

На рис. 3 показана зависимость между параметром  $\delta$ , характеризующим сближение тел при сжатии, и углом  $\theta_0$  при тех же значениях параметра  $\rho_1$ . При этом графики, построенные пунктирными линиями, соответствуют первому способу решения функционального уравнения (с помощью бесконечных систем линейных алгебраических уравнений). Бесконечная система линейных алгебраических уравнений решалась методом последовательных приближений при нулевых начальных значениях. Графики, построенные сплошными линиями, соответствуют второму способу решения этого уравнения (основанному на ортогонализации систем функций  $\varphi_m(\theta)$  ( $m = 0, 1, 2, \dots$ )).

Графики на рис. 4 показывают зависимость параметра  $\delta$  от результирующей нагрузки при разных  $\rho_1$ . Закон изменения контактных давлений  $p(\theta)$  для случая  $\theta_0 = 0,05$  показан на рис. 5. Характер изменения радиальных и касательных напряжений на связывающей поверхности твердого цилиндра с упругим слоем при  $\theta_0 = 0,05$  представлен соответ-



ственно на рис. 6 и 7. Все расчеты были проведены для случая несжимаемого материала (коэффициент Пуассона  $\nu = 0,5$ ).

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Божкова Л. В., Чебанюк А. М. Взаимодействие кольца, жестко насаженного на абсолютно твердое цилиндрическое тело, с жестким основанием. // Известия вузов. Машиностроение. 1977. № 8. - С. 16—22.
2. Божкова Л. В., Рябов В. Г. Контактная задача для кольцевого слоя произвольной толщины с учетом сил трения в зоне контакта. Югославский конгресс по теоретической и прикладной механике. Г. Охрид, СФРЮ, 1990. — С. 112—119.

621.833.16

## НАГРУЗОЧНАЯ СПОСОБНОСТЬ ПЛАНЕТАРНЫХ ЭКСЦЕНТРИКОВЫХ ПЕРЕДАЧ

*Д-р техн. наук, проф. М.Ф. ПАШКЕВИЧ, инж. О.Е. ПЕЧКОВСКАЯ*

*Рассмотрены пути повышения нагрузочной способности планетарных эксцентрик-  
риковых передач на основе модификации зубьев сателлита и обеспечения многопар-  
ности зацепления. Показаны возможности уменьшения сил, действующих на пальцы,  
которые служат для передачи вращающего момента на ведомый вал передачи.*

*The ways of load-carrying capacity increase of the planetary eccentric gears on the  
basis of satellite teeth modification and maintenance of multipaired gearing are considered.  
Opportunities of reduction of the acting on fingers forces which serve for transfer the rotating  
moment on a conducted shaft are shown.*

В приводах различных машин широко используются планетарные зубчатые передачи. Они сочетают в себе малые габаритные размеры, высокую нагрузочную способность и широкие кинематические возможности. И хотя такие передачи наиболее изучены, их исследования активно продолжают с использованием современных компьютерных технологий. Эти технологии позволяют на основе моделирования зубчатых зацеплений пересмотреть традиционные точки зрения и уточнить ранее сформулированные положения.

Так, моделирование внутреннего зубчатого зацепления в планетарных передачах типа  $2K-H$  позволило нам получить новые сведения о возможности реализации такого зацепления даже при разнице чисел зубьев центрального колеса и сателлита, равной единице [1]. В настоящей статье эти сведения будут расширены и будет показана возможность их применения к передачам типа  $K-H-V$ .

Вначале проведем сравнение обеих передач по их кинематическим и конструктивным признакам (рис. 1). Как следует из схем передач, по кинематическому признаку (способу преобразования вращения ведущего звена — водила) эти передачи совершенно одинаковы: в обоих случаях вращение водила, выполненного в виде эксцентрика, преобразуется во вращательное движение сателлита, который размещен на эксцентрикe с возможностью свободного вращения.

Различаются эти передачи только способом снятия вращения с сателлита на ведомый вал. В передаче  $2K-H$  это вращение снимается посредством зубчатого механизма, содержащего второй зубчатый венец на сателлите и зубчатое колесо внутреннего зацеп-