

УДК 621.01

Расчет пространственных рычажных механизмов методом конечных элементов

А. Кайнарбеков, Е. Темирбеков

Для расчета на жесткость и прочность плоских рычажных механизмов методика применения метода конечных элементов стандартная. Однако для пространственных рычажных механизмов такой подход не годится в силу ряда причин, о которых говорится в работе. Предлагается оригинальный конечно-элементный подход для решения задач расчета на жесткость и прочность конструкций пространственных рычажных механизмов.

Ключевые слова: пространственный рычажный механизм, жесткость, прочность, метод конечных элементов.

To calculate the rigidity and the durability of flat lever mechanisms a standard technique of application of a finite element method is used. However for spatial lever mechanisms the standard approach is not appropriate due to a number of reasons mentioned in the article. An original finite element approach to the problems of calculation of the rigidity and the durability of designs of spatial lever mechanisms is offered.

Keywords: spatial lever mechanism, rigidity, durability, finite element method.

Для плоских рычажных механизмов (РМ) методика применения метода конечных стержневых элементов известна [1, 2]. Однако для пространственных РМ стандартный подход не годится. Рассмотрена нестандартный подход в применении к жесткостному и прочностному анализу пространственных РМ (ПРМ) методом конечных стержневых элементов (МКЭ). Нестандартность заключается в том, что в качестве неизвестных задачи МКЭ предлагается принять перемещения узлов не как принято традиционно — в единой глобальной системе координат (ГСК), а в локальных системах координат (ЛСК) узлов. Кроме того, нестандартным является и подход моделирования кинематических пар (локальных граничных условий), названный методикой жестких узлов.

Внешние силы, приложенные в узлах конечно-элементных моделей (КЭМ), также рассматриваются в ЛСК узлов.

Основная система уравнений МКЭ в ЛСК

Пусть $U_i = (u_1^i, \dots, u_6^i)^T$, $U_i = (u_1^i, \dots, u_6^i)^T$, $F_i = (f_1^i, \dots, f_6^i)^T$, $\tilde{F}_i = (\tilde{f}_1^i, \dots, \tilde{f}_6^i)^T$, ($i=1, \dots, m$), — векторы упругих линейных, угловых перемещений i -го узла и внешних сил, приложенных к узлу i , соответ-



КАЙНАРБЕКОВ
Асемхан

доктор технических наук,
профессор проректор
(Казахский университет
путей сообщения)



ТЕМИРБЕКОВ
Ербол

доктор технических наук,
профессор заведующий
кафедрой «Дорожные,
строительные и путевые
машины» (Казахский
университет путей
сообщения)

ственно в ГСК XYZ и в ЛСК $O_i\tilde{x}_i\tilde{y}_i\tilde{z}_i$ i -го узла (рис.1); m — общее число узлов в КЭМ. Пусть

$$[T_i^0] = \begin{bmatrix} \cos(X, \tilde{x}_i) & \cos(X, \tilde{y}_i) & \cos(X, \tilde{z}_i) \\ \cos(Y, \tilde{x}_i) & \cos(Y, \tilde{y}_i) & \cos(Y, \tilde{z}_i) \\ \cos(Z, \tilde{x}_i) & \cos(Z, \tilde{y}_i) & \cos(Z, \tilde{z}_i) \end{bmatrix}$$

— матрица направляющих косинусов ЛСК $O_i\tilde{x}_i\tilde{y}_i\tilde{z}_i$ i -го узла относительно ГСК $OXYZ$. Тогда для i -го узла справедливы следующие преобразования:

$$U_i = [T_i] \tilde{U}_i, \quad F_i = [T_i] \tilde{F}_i, \quad \tilde{U}_i = [T_i]^T U_i, \\ \tilde{F}_i = [T_i]^T F_i, \quad i=1, \dots, m,$$

где $[T_i]$ переводит узловые векторы из ЛСК i -го узла в ГСК,

$$[T_i] = \begin{bmatrix} T_i^0 & 0 \\ 0 & T_i^0 \end{bmatrix}, \quad i=1, \dots, m.$$

Поскольку $[T_i^0]$ является матрицей вращения, то: $[T_i^0]^T = [T_i^0]^{-1}$, тогда $[T_i]$ также является ортогональной матрицей:

$$[T_i]^T [T_i] = [T_i][T_i]^T = [E],$$

или $[T_i]^T = [T_i]^{-1}$. (1)

Пусть U — вектор перемещений всех узлов КЭМ и F — вектор внешних узловых сил, приложенных к системе, в ГСК $OXYZ$:

$$U = (U_1, \dots, U_m)^T = (u_1, \dots, u_N)^T, \quad (2) \\ F = (F_1, \dots, F_m)^T = (f_1, \dots, f_N)^T,$$

где N — число степеней свободы системы или неизвестных.

Аналогично в ЛСК узлов:

$$\tilde{U} = (\tilde{U}_1, \dots, \tilde{U}_m)^T = (\tilde{u}_1, \dots, \tilde{u}_N)^T; \quad (3) \\ \tilde{F} = (\tilde{F}_1, \dots, \tilde{F}_m)^T = (\tilde{f}_1, \dots, \tilde{f}_N)^T.$$

Под векторами которых являются векторы упругих перемещений и внешних сил отдельных узлов в соответствующих ЛСК. Тогда выражения (2) и (3) связаны следующим образом:

$$U = [T] \tilde{U}; \quad F = [T] \tilde{F}; \quad \tilde{U} = [T]^m U; \quad \tilde{F} = [T]^T F, \quad (4)$$

где матрица преобразования $[T]$ имеет вид:

$$[T] = \begin{bmatrix} T_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & T_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & T_m \end{bmatrix}$$

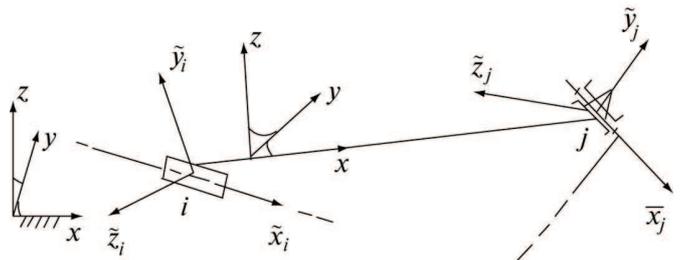


Рис. 1. Звено пространственного стержневого механизма, в узлах i и j поступательная и вращательная кинематические пары с жестко связанными с ними локальными системами координат $Ox_iy_iz_i$ и $Ox_jy_jz_j$

Покажем, что матрица $[T]$ является ортогональной:

$$[T]^T [T] = \begin{bmatrix} T_1^T & 0 & \dots & 0 \\ 0 & T_2^T & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & T_m^T \end{bmatrix} \times \\ \times \begin{bmatrix} T_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & T_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & T_m \end{bmatrix} = \\ = \begin{bmatrix} T_1^T T_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & T_2^T T_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & T_m^T T_m \end{bmatrix} = \\ = \begin{bmatrix} E & 0 & \dots & 0 \\ 0 & E & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & E \end{bmatrix} = [E]$$

Следовательно, для матрицы $[T]$ также выполняется свойство (1):

$$[T]^T [T] = [T][T]^T = [E], \text{ или } [T]^T = [T]^{-1}.$$

Основная система линейных уравнений МКЭ имеет вид

$$[K]U = F. \quad (5)$$

Преобразуем уравнение (5) следующим образом:

$$[T]^T [K] U = [T]^T F$$

Очевидно, оно эквивалентно уравнению:

$$[T]^T [K] [E] U = [T]^T F$$

или

$$[T]^T [K] [T][T]^T U = [T]^T F.$$

Используя (4), последнее выражение можно записать в следующем виде:

$$[T]^T [K][T] \tilde{U} = \tilde{F}.$$

Обозначим $[\tilde{K}] = [T]^T [K][T]$ — матрица жесткости системы КЭМ в ЛСК узлов. Таким образом, (5) эквивалентно уравнению

$$[\tilde{K}] \tilde{U} = \tilde{F}, \quad (6)$$

которое является уравнением равновесия конструкции в ЛСК узлов, и вместо решения уравнения (5) нужно искать решение уравнения (6). Следовательно, предлагаемый подход рассмотрения основной системы МКЭ не в ГСК, а в ЛСК узлов также является корректным.

Учет кинематических пар методикой жестких узлов

Обычно используют стандартный способ учета кинематических соединений. Это апробированный подход моделирования шарниров в МКЭ и пригоден для расчета стержневых систем с вращательными и поступательными парами с взаимно параллельными или перпендикулярными осями.

В работе [3] предложен другой способ моделирования шарнирных соединений в МКЭ, названный методикой «жестких» узлов. Основная идея заключается в том, что шарнирные узлы моделируются в виде комбинации двух или более жестких узлов, расположенных в одной точке и имеющих пять общих степеней свободы. При этом вводятся дополнительно новые неизвестные — в виде углов поворота торцево-

го сечения конечных стержневых элементов (КСЭ) относительно оси шарнира. Следовательно, порядок основной системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) равновесия МКЭ увеличится на число этих дополнительных неизвестных, но при этом значительно упростится схема учета шарнирных соединений.

С точки зрения моделирования основной идеей является включение уравнений (8) в СЛАУ МКЭ как независимых и решение СЛАУ. Порядок СЛАУ таким образом увеличен на число КСЭ, примыкающих к шарнирам.

Кратко приведем основные моменты этой методики. Кроме жестких и шарнирных узлов вводятся так называемые жесткошарнирные узлы. На рис. 2 показаны примеры узлов. Для этих узлов известные методы учета шарнирных соединений оказались на практике трудно применимыми. Например, в узле, изображенном на рис. 2, *д*, на концах элементов соответственно возникают два разных по значению изгибающих момента и соответственно два угла поворота относительно оси вращения шарнира: общий угол поворота торцевых сечений жестко соединенных слева двух КСЭ, и общий угол поворота торцевых сечений жестко соединенных справа двух КСЭ. Узлы вида *д*, *е*, *ж*, *з* названы сложными шарнирами и для них определено число степеней свободы *W*. Очевидно, что в общем случае сложные шарниры представляют собой категорию узлов, в которых шарнирно соединяются *n* групп стержней, каждая из которых состоит из *k_i*, *i* = 1, ..., *n*, жестко связанных КСЭ. Тогда все остальные виды узловых соединений являются частными случаями слож-

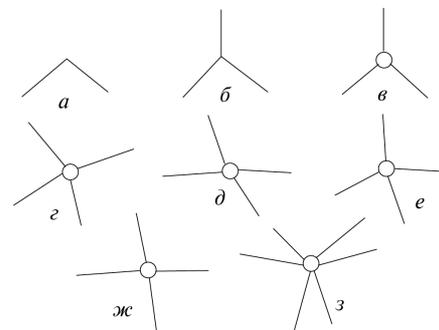


Рис. 2. Узлы:

а, б — жесткие; *в, г* — полные шарнирные; *д-з* — жесткошарнирные

ных шарниров. Следовательно, внутри каждой группы в торцевых сечениях КСЭ возникают одинаковые изгибающие моменты и одинаковые угловые повороты вокруг оси шарнира, т.е. по шарнирной степени свободы (вращение вокруг оси шарнира) каждая жесткая группа имеет свои компоненты перемещения узла и вектора реакций. Остальные пять компонент этих векторов одинаковы для всех групп, так как по этим степеням свободы передаются реакции между всеми стержнями, входящими в узел.

Из приведенных рассуждений можно сделать вывод: любой шарнирный узел можно представить в виде комбинации нескольких жестких узлов, расположенных в одной точке и имеющих пять общих степеней свободы. Число степеней свободы W сложного шарнира, соединяющего n жестких групп стержневых элементов

$$W = 5 + n. \quad (7)$$

Учет дополнительных перемещений и усилий, возникающих в сложных узлах, естественно означает введение дополнительных неизвестных задачи. Остановимся на этом подробнее.

Если применить формулу (7) для узлов, в которые шарнирно входит хотя бы два одиночных стержня, то получим «лишние» степени свободы — повороты торцевых сечений стержней. Например, узел, изображенный на рис. 2, d , получает не 5, а 8 степеней свободы.

Обычно в число неизвестных перемещений стержневой системы не вводятся углы поворота сечений стержней, примыкающих к шарнирным узлам, хотя эти угловые перемещения так же неизвестны, как и углы поворота жестких узлов [2]. Во-первых, потому что это приведет к увеличению числа неизвестных и, следовательно, количества уравнений равновесия. Во-вторых, потому что это перемещение является линейно зависимым от остальных компонент перемещений данного стержневого элемента:

$$f_l = k_{l1}\delta_1 + \dots + k_{ll}\delta_l + \dots + k_{l,12}\delta_{12} = 0, \quad (8)$$

где f_l — реакция по рассматриваемой l -й степени свободы, т.е. изгибающий момент, равный нулю; k_{lj} — элементы l -й строки матрица жесткости конечного стержневого элемента (МЖ КСЭ); δ_j — компоненты перемещений конечного стержневого элемента (КСЭ).

Предлагаемый подход означает включение указанных углов поворота в число неизвестных

перемещений вследствие введения «лишних» степеней свободы шарниров. При этом все узлы КЭМ конструкции считаются жесткими, т.е. вместо исключения линейно зависимых уравнений из основной СЛАУ, эти «лишние» уравнения вводятся и решаются вместе со всеми уравнениями.

Моделирование кинематических пар ПРМ

Для моделирования пространственных кинематических пар применим метод жестких узлов, изложенный выше. Согласно этому методу, кинематическая пара 5-го класса представляется в виде комбинации двух или более жестких узлов, находящихся в одной точке и имеющих пять общих степеней свободы.

В общем случае, для произвольной пространственной кинематической пары количество общих степеней свободы входящих в нее узлов, очевидно, равно числу накладываемых связей W' , т.е. классу кинематической пары. Будем рассматривать кинематические пары, для которых $3 \leq W' \leq 5$. Определим число степеней свободы W (в смысле МКЭ) кинематической пары, состоящей из k жестких узлов. Аналогично (7)

$$W = W' + k(6 - W'). \quad (9)$$

Тогда формулы для определения количества степеней свободы N всей конструкции ПМВК имеют вид:

$$N = 6n_{\text{ж}} + \sum_{i=1}^{n_{\text{п}}} (6k_i - W'_i(k_i - 1)) - n_r, \quad (10)$$

где $n_{\text{ж}}$ — число жестких узлов, $n_{\text{п}}$ — число кинематических пар; n_r — число степеней свободы, по которым отсутствуют перемещения, т.е. наложены граничные условия; k_i — количество жестких узлов, входящих в i -ю кинематическую пару, $i = 1, \dots, n_{\text{п}}$; W'_i — класс i -й кинематической пары, $i = 1, \dots, n_{\text{п}}$.

Таким образом, при составлении КЭМ ПРМ любая кинематическая пара представляется в виде комбинации из k узлов, находящихся в одной точке и имеющих W' общих степеней свободы, где k — количество жестких групп стержневых элементов, соединенных в этом шарнире, W' — класс кинематической пары. Для каждого положения ПРМ необходимо задать ориентацию всех кинематических пар с помощью углов α , β , γ между ЛСК, связанны-

ми с кинематическими осями и осями ГСК Ox , Oy , Oz соответственно.

Количество осей S кинематических пар зависит от вида пары: вращательная, поступательная и цилиндрическая имеют только одну ось S , совпадающую с направлением поступательного движения или с осью вращения элементов кинематической пары. Сферический шарнир не имеет осей, так как в нем отсутствуют изгибающие моменты относительно любой оси. Сферический шарнир с пальцем имеет две шарнирные оси S_1 и S_2 , совпадающие с осью пальца и прямой, проходящей через центр шарнира перпендикулярно касательной к профилю направляющей прорези пальца.

Для каждого узла КЭМ ПРМ необходимо построить ЛСК $Oxyz$ с центром в этом узле. ЛСК одиночных узлов (т. е. не входящих в какой-либо шарнир) и узлов сферического шарнира можно выбрать произвольно ввиду произвольной ориентации степеней свободы данных узлов. Поэтому оси ЛСК таких узлов направим параллельно осям ГСК $OXYZ$. ЛСК узлов, образующих кинематические пары 4- и 5-го класса с одной кинематической осью S , построим таким образом, чтобы ось Ox совпадала с осью S , а оси Oy и Oz направим произвольно, разумеется, чтобы тройка $Oxyz$ была правой прямоугольной. Для узлов сферического шарнира с пальцем ось Ox направим по оси пальца S_1 , а ось Oy — по оси S_2 , проходящей через центр шарнира перпендикулярно касательной к профилю направляющей прорези. Очевидно, узлы одного шарнира имеют одну общую ЛСК, поэтому термин «ЛСК шарнира» означает ЛСК входящих в него жестких узлов.

В таблице приведены виды кинематических пар, используемые в ПРМ, ориентация их ЛСК в пространстве, а также отсутствующие (нулевые) компоненты вектора реакций. Помимо координат шарнира и расположения шарнирных осей, для каждой кинематической пары необходимо указать шарнирные степени свободы, т.е. для узлов каждого шарнира нужно задать информацию о том, какие степени свободы в ЛСК узлов являются общими, и какие шарнирными. Это осуществляется тем же способом, что и в методе жестких узлов, описанном выше. Отличие состоит лишь в том, что каждая строка матрицы ID задается не в ГСК,

а в ЛСК соответствующего узла, т.е. элементы i -й строки описывают перемещения и углы поворота i -го узла в его ЛСК.

Особенности МКЭ при силовом анализе

Принцип построения МЖС и порядок вычисления МЖ КСЭ, изложенный в работе [1], остаются без изменений. Алгоритм силового расчета дополняется лишь процедурой преобразования МЖ КСЭ $[K_r^s]$, $s = 1, \dots, n$ (n — число стержневых элементов) из ГСК $OXYZ$ в ЛСК начального и конечного узлов КСЭ. Опишем эту процедуру более подробно. Вычисление МЖ s -го КСЭ $[K_n^s]$, $s = 1, \dots, n$, производится по известным формулам [1] в ЛСК s -го КСЭ. Затем МЖЭ $[K_n^s]$ преобразовывается в МЖЭ $[K_r^s]$ в ГСК $OXYZ$. Пусть i, j — номера начального и конечного узла КСЭ s , $s = 1, \dots, n$. В этих узлах имеем местные ЛСК $O_i x y z$ и $O_j x y z$ с матрицами направляющих косинусов $[T_i^0]$ и $[T_j^0]$ вида

(2). Построим матрицу $[T^s]$:

$$[T^s] = \begin{bmatrix} T_i & 0 \\ 0 & T_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_i^0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & T_i^0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & T_j^0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & T_j^0 \end{bmatrix}. \quad (11)$$

Очевидно, $[T^s]$ является матрицей преобразования для КСЭ из ГСК в ЛСК узлов i и j .

Рассмотрим уравнение равновесия s -го КСЭ в ГСК:

$$[K_r^s] U^s = F^s, \quad (12)$$

где U^s и F^s — векторы перемещений и внешних усилий КСЭ s в ГСК,

$$U^s = (U_i, U_j)^T = (u_1^i, \dots, u_6^i, u_1^j, \dots, u_6^j)^T; \quad (13)$$

$$F^s = (F_i, F_j)^T = (f_1^i, \dots, f_6^i, f_1^j, \dots, f_6^j)^T.$$

Матрица $[T^s]$ является ортогональной, поэтому для уравнения (12) можно выполнить аналогичные (5)—(6) преобразования, в результате которых получим уравнение равновесия s -го элемента:

$$[\tilde{K}^s] \tilde{U}^s = \tilde{F}^s \quad (14)$$

в местных системах координат i -го и j -го узлов, где

$$[\tilde{K}^s] = [T^s]^T [K_r^s] [T^s] \quad (15)$$

— МЖ s -го КСЭ в ЛСК i -го и j -го узлов.

Таким образом, перевод МЖ КСЭ $[K_r^s]$, $s = 1, \dots, n$, в ЛСК узлов осуществляли по формуле (15). Построение МЖ КЭМ $[\tilde{K}]$ из полученных МЖ КСЭ $[\tilde{K}^s]$ выполняется известным способом [1]. Процедура решения системы уравнений равновесия также не меняется. Небольшое дополнение вносится на этапе вычисления усилий в КСЭ. После решения основной системы уравнений и определения узловых перемещений \tilde{U} необходимо для каждого s -го КСЭ выполнить преобразование вектора перемещений \tilde{U}^s КСЭ из ЛСК узлов в ГСК:

$$U^s = [T^s] \tilde{U}^s. \quad (16)$$

Выводы

Алгоритм силового расчета ПРМ МКЭ отличается от стандартного алгоритма наличием дополнительных процедур.

1. Ввод дополнительной информации об ориентации ЛСК узлов кинематических пар: углов α , β и γ между кинематической осью S и осями Ox , Oy и Oz ГСК.

2. Вычисление матриц направляющих косинусов ЛСК узлов.

3. Преобразование МЖ КСЭ перед адресацией в МЖ системы.

4. Преобразование векторов перемещений КСЭ по формуле (16) после решения основной СЛАУ равновесия.

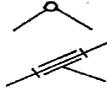
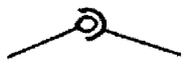
Показана эквивалентность рассмотрения основной разрешающей системы МКЭ в ГСК и ЛСК узлов. Эквивалентность рассмотрения основной разрешающей системы МКЭ в ГСК и ЛСК узлов позволила разработать методику анализа конструкций ПРМ с учетом упругости и особенностей кинематических пар для определения всех компонент реакций и реактивных моментов в кинематических парах различного класса ПРМ. МКЭ также позволил на уровне методики решить задачу анализа жесткости конструкций ПРМ с учетом упругости звеньев, как промежуточный этап при получении компонентов реакций и реактивных моментов.

Литература

1. Шапошников Н.Н. и др. Расчет машиностроительных конструкций на прочность и жесткость. М.: Машиностроение, 1991, 333 с.
2. Бате К., Вилсон Е. Численные методы анализа и метод конечных элементов / Под ред. А.Ф.Смирнова. М.: Стройиздат, 1992. 448 с.
3. Джолдасбеков У.А., Темирбеков Е.С. Некоторые аспекты анализа и синтеза механизмов высоких классов: Астана, Акмол ЦНТИ, 2006. 299 с.

Статья поступила в редакцию 17.03.2011 г.

Таблица

№ п/п	Название кинематическая пары	Условное обозначение	Нулевые усилия	Направление осей ЛСК $Oxyz$
1	Вращательная 5 класс		M_x	Ox — вдоль оси вращения Oy — перпендикулярно оси Ox Oz — перпендикулярно плоскости Oxy
2	Поступательная 5 класс		N_x	Ox — вдоль направления движения ползуна Oy — перпендикулярно оси Ox Oz — перпендикулярно плоскости Oxy
3	Цилиндрическая 4 класс		N_x M_x	Ox — вдоль оси вращения Oy — перпендикулярно оси Ox Oz — перпендикулярно плоскости Oxy
4	Сферическая с пальцем 4 класс		M_x M_y	Ox — вдоль оси пальца Oy — перпендикулярно плоскости прорези Oz — перпендикулярно плоскости Oxy
5	Сферическая 3 класс		M_x M_y M_z	Ox — произвольно Oy — перпендикулярно оси Ox Oz — перпендикулярно плоскости Oxy