

РАСЧЕТ И КОНСТРУИРОВАНИЕ МАШИН

539.3

ОТЛИЧИЯ РАСЧЕТОВ ФОРМЫ УПРУГОЙ ЛИНИИ ГИБКОГО СТЕРЖНЯ МЕТОДАМИ ДИСКРЕТИЗАЦИИ МКЭ И МТТ

Канд. техн. наук, проф. П.Г. РУСАНОВ

Двумя методами дискретизации (МКЭ и МТТ-методом твердых тел) численно исследованы равновесные формы упругой линии гибкого стержня для трех случаев его нагружения. При сопоставлении полученных результатов с численными решениями этих задач на основании теории гибких стержней сделаны выводы о преимуществе метода МТТ перед МКЭ как в отношении точности результатов, так и в отношении простоты и наглядности процесса вывода итоговой математической модели.

By two discrimination techniques (FEM and SBM – solid bodies' method) were numerically investigated equilibrium shapes of flexible bar under three load cases. Comparisons of these results with numerical solving the same test by a flexible bar method show that the SBM has preferences to FEM both in accuracy of results and in simplicity and visualization of the final mathematical model output

Сейчас на рынке вычислительных услуг подавляющее большинство рекламируемых компьютерных пакетов программ, выполняющих численный анализ динамики и прочности конструкций, получают решения по математическим моделям на основе метода математической дискретизации — метода конечных элементов (МКЭ).

Цель этой работы — на примере гибкого стержня показать определенные преимущества иного метода дискретизации — метода твердых тел (МТТ) [1,2] перед МКЭ как в отношении физической наглядности и технологичности вывода математической модели, так и в отношении точности итоговых результатов.

МТТ принадлежит к числу методов физической дискретизации, обладающих интуитивно доступным идейным содержанием. Спонтанные приемы физической дискретизации деформируемой среды давно нашли свое отражение в расчетах собственных частот упругих конструкций. В работах В.Л. Бидермана [3] и Я.Г. Пановко [4] были сформулированы достаточно общие методические воззрения по проблеме физической дискретизации упругих систем в форме идейной экстраполяции, но без указания общих правил или универсальных критериев образования соответствующей дискретной расчетной схемы.

МТТ развивает положения, высказанные этими учеными. Принципиальное отличие МТТ от МКЭ состоит в выборе дискретного носителя информации о состоянии элементарного конечного объема. В МКЭ — это его узловые точки, а в МТТ — репер главных центральных осей инерции.

Рассчитаем методами МКЭ и МТТ статическую форму упругой линии гибкого однородного стержня с защемленным концом для трех классических вариантов нагружения (рис. 1), когда, поочередно, лишь одна из трех характеристик нагружающих сил (M, P, q) отлична от нуля, и сравним результаты с «эталонными» численными решениями этих же задач, но на основе теории гибких стержней [5, 6]. В этой задаче используем дополнительные допущения: упругая линия — плоская кривая, в недеформированном состоянии она прямолинейна; форма и площадь поперечных сечений, а также плотность и упругие

свойства материала не зависят от продольной координаты; материал стержня изотропный, линейноупругий; не учитываются растяжение упругой линии, сдвиг поперечных сечений и температурные эффекты.

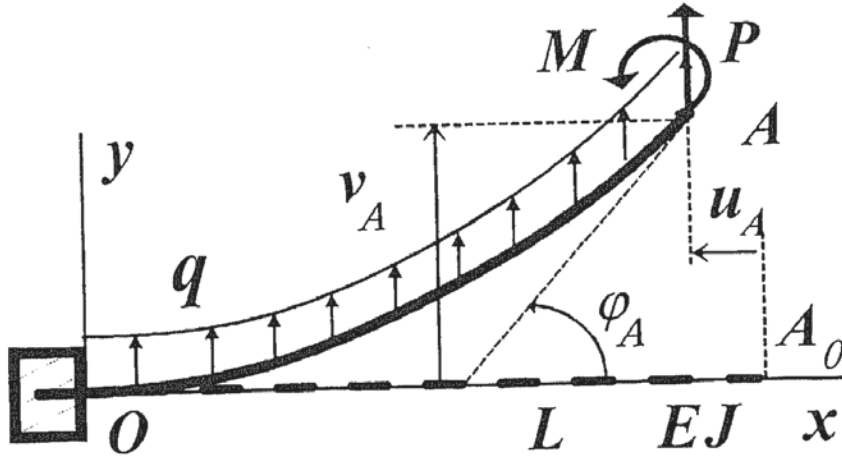


Рис. 1

Для стержня известны: длина L , масса m_0 , EJ — удельная изгибная жесткость консольной части; M , P , q — характеристики сил нагружения постоянного направления.

Достаточно громоздкая технология обоснования разрешающих уравнений статики узлов стержня методом МКЭ хорошо известна. Поэтому ниже дан вывод расчетных выражений лишь на основе МТТ. Следуя МТТ, для анализа формы упругой линии нагруженного стержня в статическом состоянии применим *простейшую* дискретную расчетную схему из $n + 1$ одинаковых, абсолютно жестких тел, фрагментов стержня массой $m = m_0/(n + 0,5)$ и длиной $l = L/(n + 0,5)$ каждое (на рис. 2 $n = 3$), соединенных n идеальными, цилиндрическими шарнирами, оси которых параллельны оси Oz , и одинаковыми, невесомыми спиральными пружинами с жесткостью на скручивание $c = EJ/l$, равной изгибной жесткости участка стержня той же длины l [6]. При отсутствии нагрузки на стержень спиральные пружины недеформированы.

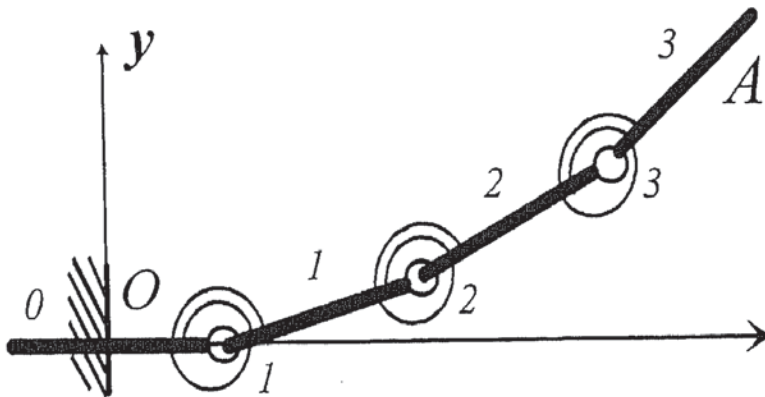


Рис. 2

Тело 0 неподвижно, его центр масс совпадает с границей заделки. Левая половина этого тела погружена в основание, а правая — свободна. Остальные n тел изменяют свои положения под нагрузкой. Данная схема дискретизации отражает равномерность распределения масс и *равножесткость* участков стержня одинаковой длины на изгиб.

З а м е ч а н и е 1. Для учета сдвиговых деформаций ММТ рекомендует в дискретной схеме стержня применять узлы с большим числом степеней свободы.

З а м е ч а н и е 2. Значения масс элементов дискретизации необходимы для учета влияния объемно-массовых сил в задачах динамики.

Согласно МТТ, основными информационными параметрами кинематического состояния расчетной системы твердых тел служат координаты центров масс и углы поворота главных центральных осей инерции каждого из твердых тел. При наличии шарнирных узлов связи роль обобщенных координат для полученной дискретной схемы могут выполнять φ_k — углы поворота отдельных тел ($k = 0, n$), отсчитываемые от оси Ox . Для тела с номером 0 принимаем $\varphi_0 = 0$.

Для расчета значений φ_k в состоянии равновесия тел воспользуемся, например, системой из n независимых уравнений статики (каждое в форме суммы моментов вокруг оси цилиндрического шарнира с номером k от внешних сил дна подсистемы тел с номерами от k до n)

$$\mathfrak{M}_k - c(\varphi_k - \varphi_{k-1}) = 0, (k = 1, n), \quad (1)$$

где \mathfrak{M}_k зависит от варианта сил нагружения M, P, q :

$$\text{при нагружении парой сил } \mathfrak{M}_k = M; \quad (2)$$

$$\text{при нагружении силой } P \text{ в точке } A \mathfrak{M}_k = Pl \sum_{i=k}^n \cos \varphi_i; \quad (3)$$

при нагружении силами, равномерно распределенными по длине, интенсивностью q по рекурсивной формуле ($k = n, n - 1, \dots, 2, 1$)

$$\mathfrak{M}_{n+1} = 0; \mathfrak{M}_k = \mathfrak{M}_{k+1} + ql^2(n - k + 0,5)\cos\varphi_k. \quad (4)$$

З а м е ч а н и е 3. В случае следящего характера направлений силы P и распределенных сил интенсивностью q процедура построения дискретной математической модели для расчета методом МТТ формы упругой линии гибкого стержня также является достаточно прозрачной и физически наглядной.

Для случая нагружения стержня парой сил (случай чистого изгиба) алгебраическая система (1), (2) является линейной. Ее аналитическое решение

$$\varphi_k = k\alpha, \alpha = \mu, (k = 1, n), \quad (5)$$

где $\mu = M/c$. Этому решению отвечает форма стержня в виде цепочки тел регулярной структуры — фрагмента правильного многоугольника (рис. 3, пружины не показаны).

Решение (5) для φ_k — углов поворота поперечных сечений стержня, проходящих через центры масс тел дискретизации, совпадает с точным. Но положения центров масс дискретной модели отличаются от точных из-за превышения R — истинного радиуса кривизны стержня над R^* — радиусом кривизны аппроксимирующей окружности, вписанной в многоугольник,

$$R = EJ/M = EJ(c\alpha) = l/\alpha, R^* = 0,5/\text{tg}(\alpha/2),$$

$$R^*/R = (\alpha/2)/\text{tg}(\alpha/2) \approx 1 - \alpha^2/12.$$

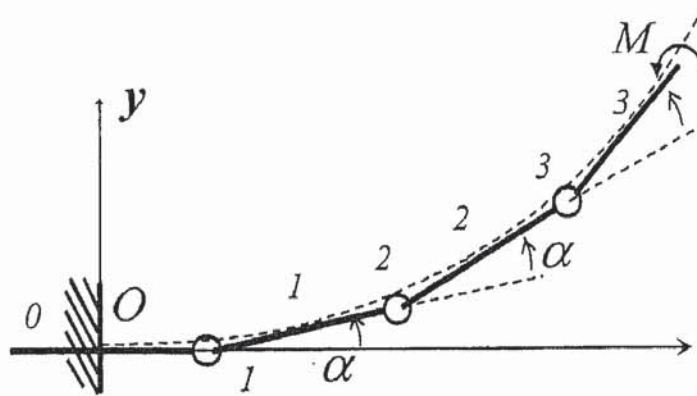


Рис. 3

Отсюда следует, что при чистом плоском изгибе стержня погрешность расчета геометрических характеристик формы упругой оси на основе дискретной модели МТТ, даже при сравнительно больших углах $\alpha \approx 1$, не превышает 10...15 %.

Системы (1), (3) и (1), (4), отвечающие двум другим случаям нагружений, являются нелинейными. Эффективные алгоритмы численного решения задач этого класса методами последовательных приближений хорошо известны.

С целью обобщения результатов численного решения приведем модельные системы уравнений метода МТТ (1)—(4) к безразмерному виду ($k = 1, n$) для случая нагружения парой сил

$$\varphi_k - \varphi_{k-1} = \mu; \quad (6)$$

при нагружений силой P в точке A

$$\varphi_k - \varphi_{k-1} = p \sum_{i=k}^n \cos \varphi_i, \quad (7)$$

где $p = Pl/c$;

при нагружении равномерно распределенными по длине силами интенсивностью q по рекурсивной формуле ($k = n, n - 1, \dots, 2, 1$)

$$\varphi_k - \varphi_{k-1} = \sigma_k,$$

где $\sigma_n = \eta \cos \varphi_n$, $\sigma_k = \sigma_{k+1} + \eta[2(n-k) + 1] \cos \varphi_k$, $\eta = 0,5ql^2/c$. (8)

В табл. 1 сравниваются результаты численных решений задач (6)—(8), сформулированных на основании МТТ (для вариантов $n = 1, 2, 3, 10$), и их численных решений на основе теории гибких стержней по уравнениям из [5, 6]

$$\begin{aligned} \frac{dx(s)}{ds} &= \cos \varphi(s); \quad \frac{dy(s)}{ds} = \sin \varphi(s); \quad \frac{d\varphi(s)}{ds} = \frac{M(s)}{EJ}; \\ \frac{dX(s)}{ds} &= 0; \quad \frac{dY(s)}{ds} = q; \quad \frac{dM(s)}{ds} = X(s) \sin \varphi(s) - Y(s) \cos \varphi(s); \end{aligned}$$

Таблица 1

n	u - Теор	u - МТТ	$\%u$	v - Теор	v - МТТ	$\%v$	φ - Теор	φ - МТТ	$\%\varphi$
$\mu = 0.2$									
1	-.00017	-.00015	15.4	.01389	.00987	28.9	.13333	.13333	0
2	-.00024	-.00023	3.89	.01821	.01663	8.66	.16000	.16000	0
3	-.00027	-.00027	1.23	.02009	.01932	3.84	.17143	.17143	0
10	-.00033	-.00033	-1.20	.02323	.02329	-.268	.19048	.19048	0
$\mu = 1.0$									
1	.00424	-.00357	15.8	.06872	.04868	29.2	.66667	.66667	0
2	-.00596	-.00572	4.05	.09004	.08215	8.76	.80000	.80000	0
3	-.00672	-.00663	1.32	.09931	.09544	3.89	.85714	.85714	.0
10	-.00799	-.00808	-1.16	.11482	.11509	-.239	.95238	.95238	0
$\mu = 2.0$									
1	-.07612	-.05974	21.5	.28222	.19041	32.5	1.33333	1.33333	0
2	-.10580	-.09905	6.38	.36608	.32830	10.32	1.60000	1.60000	0
3	-.11885	-.11579	2.57	.40244	.38331	4.75	1.71429	1.71429	0
10	-.14077	-.14169	-.655	.46322	.46289	.071	1.90476	1.90476	0
$\sigma = 0.2$									
1	-.00111	-.00131	-17.5	.03443	.02948	14.4	.08858	.08854	.042
2	-.00168	-.00173	-2.79	.04673	.04460	4.57	.09566	.09564	.014
3	-.00195	-.00197	-.91	.05225	.05108	2.24	.09761	.09760	.007
10	-.00241	-.00241	-.029	.06163	.06149	.233	.09941	.09941	.001
$\sigma = 1.0$									
1	-.02398	-.02736	-14.1	.15833	.13225	16.5	.41140	.40797	.834
2	-.03605	-.03682	-2.13	.21376	.20287	5.10	.44342	.44219	.277
3	-.04169	-.04195	-.629	.23852	.23263	2.47	.45221	.45159	.138
10	-.05146	-.05146	-.002	.28054	.27982	.256	.46034	.46027	.016
$\sigma = 5.0$									
1	-.18050	-.17299	-4.16	.40544	.29223	27.9	1.11450	1.06896	4.09
2	-.25941	-.25583	-1.38	.52713	.48330	8.31	1.18000	1.16360	1.39
3	-.29528	-.29317	.715	.58016	.55770	3.87	1.19750	1.18920	.693
10	-.35661	-.35627	.097	.66916	.66665	.375	1.21340	1.21250	.074
$\eta = 0.2$									
1	-.00017	-.00015	15.4	.01389	.00987	28.9	.03184	.02962	6.98
2	-.00024	-.00023	3.89	.01821	.01663	8.66	.03279	.03199	2.44
3	-.00027	-.00027	1.23	.02009	.01932	3.84	.03295	.03264	.942
10	-.00033	-.00033	-1.20	.02323	.02329	-.268	.03304	.03324	-.62
$\eta = 1.0$									
1	.00424	-.00357	15.8	.06872	.04868	29.2	.15782	.14656	7.13
2	-.00596	-.00572	4.05	.09004	.08215	8.76	.16250	.15843	2.51
3	-.00672	-.00663	1.32	.09931	.09544	3.89	.16331	.16171	.982
10	-.00799	-.00808	-1.16	.11482	.11509	-.239	.16375	.16473	-.60
$\eta = 5.0$									
1	-.07612	-.05974	21.5	.28222	.19041	32.5	.66955	.60800	9.19
2	-.10580	-.09905	6.38	.36608	.32830	10.3	.68788	.66414	3.45
3	-.11885	-.11579	2.57	.40244	.38331	4.75	.69104	.68031	1.55
10	-.14077	-.14169	-.655	.46322	.46289	.071	.69274	.69517	-.35

Таблица 2

n	u -Теор	u -МКЭ	$\%u$	v -Теор	v -МКЭ	$\%v$	φ -Теор	φ -МКЭ	$\%\varphi$
$\mu = 0.2$									
1	-.006653	-.004865	-26.9	.099667	.1000	.334	0.20	0.20	0.
2		-.006082	-8.59						
3		-.006307	-5.21						
10		-.006471	-2.74						
$\mu = 1.0$									
1	-.158529	-.121632	-23.3	.459698	.5000	8.77	1.0	1.0	0.
2		-.152040	-4.09						
3		-.157671	-.541						
10		-.161771	2.05						
$\mu = 2.0$									
1	-.545351	-.486528	-10.8	.708073	1.000	41.3	2.0	2.0	0.
2		-.608160	11.5						
3		-.630684	15.6						
10		-.647082	18.7						
$\sigma = 0.2$									
1	-.00265	-.00216	18.3	.06636	.0666 7	-.46	.09964	.1000	-.437
2		-.00247	6.79						
3		-.00254	4.18						
10		-.00259	2.26						
$\sigma = 1.0$									
1	-.05643	-.05406	4.21	.30172	.3333	-10.5	.46135	.5000	-8.38
2		-.06166	-9.27						
3		-.06340	-12.4						
10		-.06474	-14.7						
$\sigma=5.0$									
1	-.38763	-1.35147	-249.	.71379	1.667	-133.	1.2154	2.500	-106.
2		-1.54152	-298.						
3		-1.58505	-309.						
10		-1.61839	-317.						
$\eta = 0.2$									
1	-.00035	-.00030	13.5	.02480	.0250 0	-.798	.03304	.03333	-.878
2		-.00033	5.70						
3		-.00034	2.86						
10		-.00035	-0.3						
$\eta = 1.0$									
1	-.00862	-.00760	11.9	.12258	12500	-1.97	.16376	.16667	-1.78
2		-.00825	4.29						
3		-.00848	1.62						
10		-.00867	-0.06						
$\eta=5.0$									
1	-.15175	-.19005	-25.2	.49363	.6250	-26.6	.69279	.83333	-20.3
2		-.20622	-35.8						
3		-.21191	-39.6						
10		-.21670	-42.8						

с граничными условиями $x(0) = 0$; $y(0) = 0$; $\varphi(0) = 0$; $X(l) = 0$; $Y(l) = P$; $M(l) = M$, для трех вариантов нагружения, когда только одна из трех величин M , P , q (и, соответственно, из μ , ρ , η) отлична от 0. При этом для сокращения объема табл. 1 в ней приведены данные (u — продольные и v — поперечные перемещения точек упругой линии и φ — углы поворота сечений) лишь для сечения, проходящего через центр масс элемента с номером n , самого близкого к сечению A .

Схожие результаты решений этих задач на основании МКЭ с помощью программы Лира [7] с тем же набором n -подвижных узлов дискретизации ($n = 1, 2, 3, 10$), но лишь для последнего узла A представлены в табл. 2.

В ходе выполнения расчетов установлено, что при одинаковом количестве дискретных элементов затраты компьютерного времени на решение рассматриваемых задач методами МКЭ и МТТ соотносятся примерно как 50 к 1.

На основании полученных данных приходим к выводу, что по точности результатов для решенных задач статики гибкого стержня метод МКЭ существенно проигрывает методу МТТ, особенно при повышенных уровнях сил нагружения, где наблюдаются ошибки более чем на 200 %. При этом с ростом числа элементов n от 1 до 10 точность результатов МТТ возрастает, в отличие от МКЭ. Возможно, что на результатах расчета методом МКЭ отразилась специфика реализации программы Лира.

Очевидно, что по сравнению с МКЭ технология расчета стержневых конструкций методом МТТ доступна уже на ранних стадиях подготовки инженеров, благодаря большей простоте и физической наглядности востребованных основ механики.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Русанов П. Г. Построение расчетных моделей динамики сплошной среды с помощью метода твердых тел / Сб. докл. научного симпозиума «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред». — М.: МАИ, 1995. — С.
2. Жуков И. В., Кетат В. В., Русанов П. Г. Анализ динамики упругой балки методом физической дискретизации // Известия вузов. Машиностроение. — 2000. — № 3. — С. 3—9.
3. Бидерман В. Л. Прикладная теория механических колебаний. — М.: Высшая школа, 1980. — 408 с.
4. Прочность устойчивость колебания: Справ. в 3-х томах; под ред. И.А. Биргера, Я.Г. Пановко— М.: Машиностроение, 1968. — Т. 3. — 568 с.
5. Светлицкий В. А. Механика гибких стержней и нитей. — М.: Машиностроение, 1978. — 222 с.
6. Усюкин В. И. Строительная механика конструкций космической техники. — М.: Машиностроение, 1988.— 392 с.
7. ПК ЛИРА, версия 9. Программный комплекс для расчета и проектирования конструкций / Под ред. А.С. Городецкого. К. — М.: ФАКТ, 2003. — 464 с.