№ 6 *2006*

РАСЧЕТ И КОНСТРУИРОВАНИЕ МАШИН

539.3

О МАТЕМАТИЧЕСКОМ МОДЕЛИРОВАНИИ ДЕФОРМИРУЕМЫХ ТЕЛ

Канд. физ.-мат. наук, ст. препод. Н. В. МИНАЕВА

Проведен анализ некоторых способов упрощения математических моделей деформируемых тел для случая, когда граничные условия заданы в напряжениях.

This article represents the analysis of some simplification modes applicable to mathematical models of deformable skew fields for a case when boundary conditions are set in voltages.

Математическую модель, применяемую при изучении поведения деформируемого тела и состоящую из уравнений равновесия, реологических соотношений и граничных условий в напряжениях, запишем в следующей операторной форме:

$$
\begin{aligned}
&H_1(u,\sigma,F)=0,\\
&H_2(u,\sigma,\mu)=0,\\
&H_3(u\big|_f,\sigma,f,P)=0,
\end{aligned}
\qquad (1)
$$

где μ — характеристика физических свойств материала тела, f — характеристика границы тела, u — вектор перемещений, $u\big|_f$ — вектор перемещений точек границы тела, σ — тензор напряжений, F и P — объемные (массовые) и поверхностные внешние силы (рис. 1).

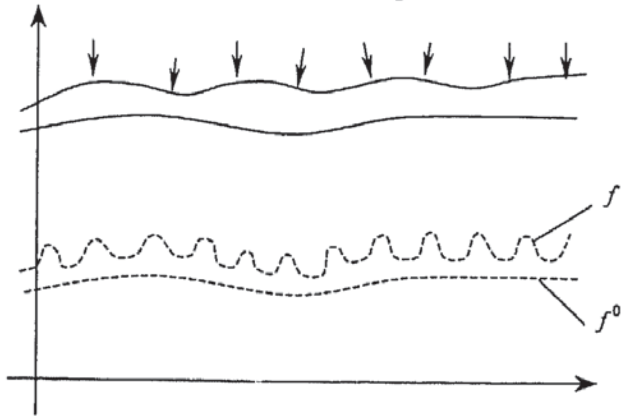

Рис. 1

Решать задачу (1) в общем случае весьма трудно. Поэтому обычно применяются некоторые упрощения. Рассмотрим эти упрощения, касающиеся оператора H_3, т.е. граничных условий.

1. Пусть граница тела, на которой заданы граничные условия в напряжениях, описывается функцией

$$f=f^0+f^{(1)},$$

где f^0 — функция, описывающая границу некоторого идеализированного по форме тела, а $f^{(1)}$ — функция, характеризующая отклонение реального тела от идеального (геометрическое «несовершенство»).

Поскольку обычно

$$\left\| f^{(1)} \right\| << \left\| f^0 \right\|, \tag{2}$$

то вместо математической модели (1) берут такую:

$$\begin{aligned} &H_1(u, \sigma, F) = 0, \\ &H_2(u, \sigma, \mu) = 0, \\ &H_3(u\big|_{f^0}, \sigma, f^0, P) = 0. \end{aligned} \tag{3}$$

Оператор H_3 в (3) соответствует формулировке граничных условий в напряжениях на границе идеального тела в деформированном состоянии (рис. 2).

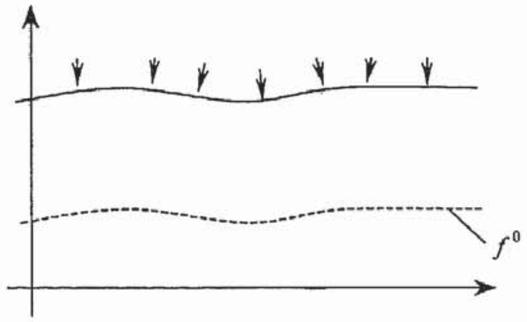

Рис. 2

При этом считается, что решение задачи (3) u_1^0 достаточно хорошо описывает поведение реального объекта, т.е. предполагается, что решение задачи (1) непрерывно зависит от $f^{(1)}$ и

$$\lim_{\left\| f^{(1)} \right\| \to 0} \left\| u \right\| = \left\| u_1^0 \right\|. \tag{4}$$

Однако решение задачи (3) также бывает весьма затруднительным. Поэтому при определении напряженно-деформированного состояния тела, ограничиваясь задачами, в которых

$$\left\| u \right\| << \left\| f^0 \right\|, \tag{5}$$

вместо математической модели (3) чаще всего рассматривают такую

$$\begin{aligned} &H_1(u, \sigma, F) = 0, \\ &H_2(u, \sigma, \mu) = 0, \\ &H_3(0, \sigma, f^0, P) = 0. \end{aligned} \tag{6}$$

Оператор H_3 в (6) соответствует формулировке граничных условий в напряжениях на границе идеального по форме тела в недеформированном состоянии (рис. 3).

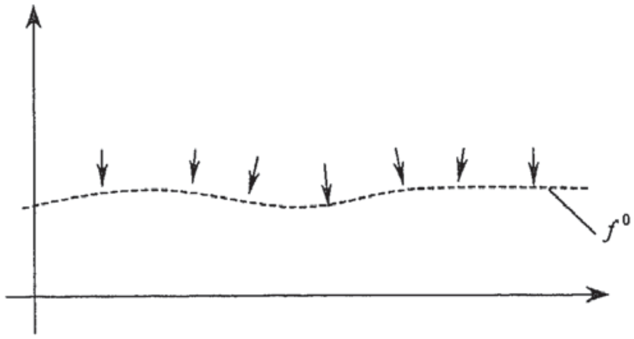

Рис. 3

Обозначим решение задачи (6) через u_2^0. После того, как u_2^0 найдено, необходимо удостовериться, что принятые выше при упрощении математической модели условия выполняются.

Выполнение условия (5) при этом просто проверяется для полученного $u = u_2^0$. Задача же исследования выполнения условия (4), т.е. о непрерывности зависимости решения задачи (1) от $f^{(1)}$ при $f^{(1)} \equiv 0$, является весьма трудной. Рассмотрим возможность упрощения этой задачи за счет выбора другого способа упрощения математической модели (1).

2. Если граничные условия в (1) заменить граничными условиями, заданными на границе тела в недеформированном состоянии (рис. 4), то получим следующую математическую модель

$$\begin{aligned} &H_1(u, \sigma, F) = 0, \\ &H_2(u, \sigma, \mu) = 0, \\ &H_3(0, \sigma, f, P) = 0. \end{aligned} \tag{7}$$

Решение задачи (7) обозначим через u_2.

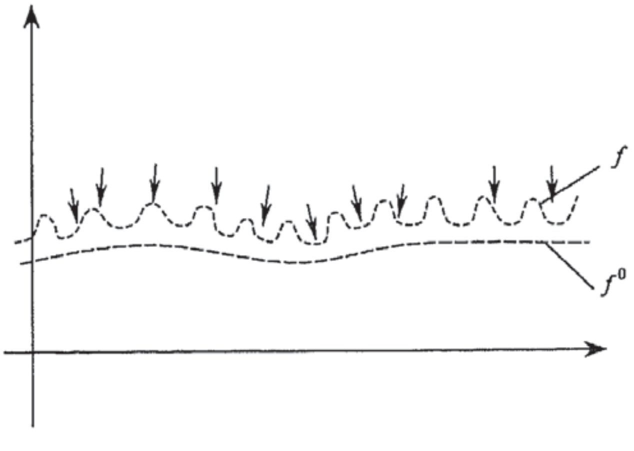

Рис. 4

Отметим, что при переходе от математической модели (1) к модели (7) подразумевается следующее предположение:

$$\left\| u_2 \big|_f \right\| << \left\| f^{(1)} \right\| \tag{8}$$

(поскольку $f^{(1)}$ сохранена в граничных условиях, а $u\big|_f$ — нет).

Дальнейшее упрощение математической модели — переход от (7) к (6) подразумевает условие непрерывности зависимости решения задачи (7) от $f^{(1)}$ при $f^{(1)} = 0$, т.е.

$$\lim_{\|f^{(1)}\|\to 0} \left\| u_2 \big|_f \right\| = \left\| u_2^0 \right\|. \tag{9}$$

Из соотношений (8), (9) следует, что

$$\lim_{\|f^{(1)}\|\to 0} \left\| u_2 \big|_f \right\| = 0. \tag{10}$$

Итак, рассматриваемый способ упрощения математической модели (1) при исследовании адекватности оказывается внутренне противоречивым.

3. Рассмотрим еще один способ упрощения математической модели (1). Граничные условия в (1) заменим на граничные условия, соответствующие рис. 5 (учтена основная часть вектора перемещений точек границы тела),

$$\begin{aligned} &H_1(u, \sigma, F) = 0, \\ &H_2(u, \sigma, \mu) = 0, \\ &H_3(u\big|_{f^0}, \sigma, f, P) = 0. \end{aligned} \tag{11}$$

Решение задачи (8) обозначим через u_1^0.

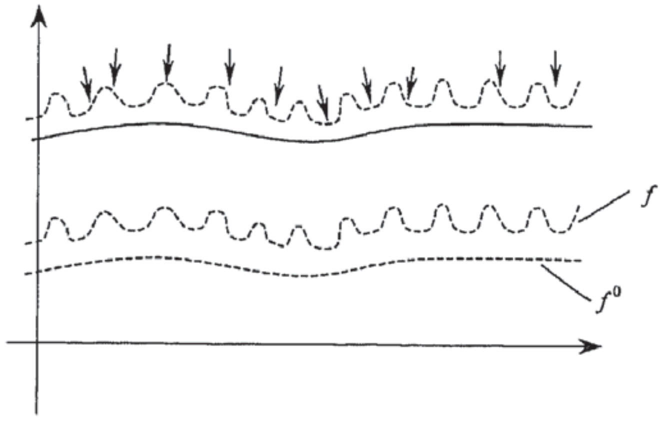

Рис. 5

Отметим, что при переходе от математической модели (1) к математической модели (11) подразумевается следующее предположение:

$$\left\| u_1 \big|_f - u_1^0 \big|_{f^0} \right\| << \left\| f^{(1)} \right\|, \tag{12}$$

так как оператор H_3 в (7) соответствует формулировке граничных условий в напряжениях на границе, получаемой добавлением к точкам границы реального тела не их истинных перемещений, а перемещений соответствующих точек идеализированного тела.

Дальнейшее упрощение математической модели — переход от (11) к (3) подразумевает условие непрерывности зависимости решения задачи (11) от $f^{(1)}$ при $f^{(1)} \equiv 0$, т.е.

$$\lim_{\|f^{(1)}\|\to 0} \left\| u_1 - u_1^0 \right\| = 0. \tag{13}$$

Но из соотношения (12) следует, что

$$\lim_{\|f^{(1)}\|\to 0} \left\| u_1 \big|_f - u_1^0 \big|_{f^0} \right\| = 0, \tag{14}$$

т.е. предположение (12) равносильно предположению о непрерывности зависимости решения задачи (7) от $f^{(1)}$ при $f^{(1)} \equiv 0$ для точек границы тела, т.е. и в этом случае задача исследования непрерывности сформулирована противоречиво.

Итак, с точки зрения проверки адекватности только первый способ упрощения математической модели деформируемого тела является внутренне непротиворечивым.

Таким образом, получаем, что при построении математической модели деформируемого тела, на основе которой планируется поводить исследование адекватности упрощенной математической модели, граничные условия в напряжениях следует формулировать только на границе реального тела в деформированном состоянии, т.е. вид оператора H_3 следует выбирать соответствующим виду (1).

Очевидно, что вид операторов H_1, H_2 не влияет на правильность постановки задачи исследования непрерывности зависимости решения задачи (1) как от f, так и от μ.

Если характеристики μ и f заданы с точностью до малых параметров, т.е. $\mu = \mu^0(x, y, z) + \varepsilon_1 \mu^{(1)}(x, y, z)$ и $f^{(1)} = \varepsilon_2 \mu(x, y, z)$, то при исследовании поведения деформируемого тела методом возмущений, например [1, 2], необходимо провести исследование сходимости. Как следует из изложенного выше, в том случае, когда выполняется условие непрерывности зависимости решения задачи (1) от μ и f при $\mu = \mu^0$, $f = f^0$, а выражения в (1) аналитичны по ε_ι характеристики напряженно — деформированного состояния будут аналитическими функциями параметров ε_ι в окрестности точки $\varepsilon_\iota = 0$. Поэтому решение задачи (1) в этом случае можно искать в виде степенных рядов по малым параметрам, являющимся рядами Тейлора.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ:

1. Ивлев Д. Д., Ершов Л. В. Метод возмущений в теории упруго-пластического тела. — М.: Наука, 1978. — 208 с.
2. Гузь А. Н., Немиш Ю. Н. Метод возмущений в пространственных задачах теории упругости. — К.: Наукова думка, 1982. — 352 с.