

Расчет и конструирование машин

УДК 6.620.172.251.12+620.173.2

О рациональной форме записи уравнений состояния для решения задач пластического деформирования

А.С. Галахарь, С.С. Гаврюшин, Е.А. Деулин

Постоянное повышение требований к точности расчета процессов механической обработки материала ставит на повестку дня повышение точности описания поведения материала при упругопластическом деформировании. Упругое деформирование материала традиционно описывается с помощью закона Гука, а пластическое чаще всего — с помощью билинейных моделей пластического деформирования или нелинейного степенного закона пластического упрочнения. В статье анализируются возможности и отмечаются преимущества применения неравномерных рациональных би-сплайнов (NURBS) для уточненного описания поведения материала при упругопластическом деформировании.

Ключевые слова: уравнение состояния, обработка давлением, NURBS, эффект Баушингера.

Continuous improvement of requirements to the accuracy of plastic forming process calculations puts on agenda an enhancement in the accuracy of description of stress-strain constitutive equations. An elastic deformation of material is traditionally described by Hooke' law, while a plastic one by bilinear models of plastic deformation or nonlinear exponential law of plastic strain hardening. The article analyses the potential and points out advantages of application of non-uniform, rational B-splines (NURBS) to make more accurate representation of material behaviour under elastic-plastic deformation.

Keywords: constitutive equation, plastic forming, NURBS, bauschinger' effect.



ГАЛАХАРЬ
Александр Сергеевич
инженер I категории
кафедры «Прикладная
механика»
(МГТУ им. Н.Э. Баумана)



ГАВРЮШИН
Сергей Сергеевич
доктор технических наук,
зав. кафедрой
«Компьютерные системы
автоматизации
производства»
(МГТУ им. Н.Э. Баумана)



ДЕУЛИН
Евгений Алексеевич
профессор кафедры
«Электронные технологии
в машиностроении»
(МГТУ им. Н.Э. Баумана)

Упрощенное описание свойств материалов вносит определенную погрешность при расчетах технологических процессов пластического деформирования.

Простейшие уравнения состояния составляются на основе упруго- или жесткопластических моделей поведения материала с линейным [1] или экспоненциальным упрочнением [2, 3]. Такие модели не могут обеспечить приемлемой точности во всем диапазоне деформирования, не учитывают историю нагружения материала, что в свою очередь не позволяет однозначно определить величину упругой деформации. Вместе с тем, известно и экспериментально показано, что вследствие эффекта Баушингера, предел текучести при растяжении после сжатия может не только уменьшаться по абсолютной величине, но и увеличиваться в зависимости от состава сплава [4, 5].

Современное развитие вычислительной техники позволяет предложить более рациональные способы записи уравнений состояния, ориентированные на использование систем автоматизированного проектирования (САПР). Развитая теория неравномерных рациональных би-сплайнов (NURBS), используемых в современных САПР [6–8], изначально созданная для воспроизведения геометрических очертаний сложных конструкций, может быть использована и для уточненного описания экспериментально найденных зависимостей, получаемых, как правило, в табличном виде. По-видимому, впервые использовать NURBS для описания деформационных свойств нелинейно-упругого тканого материала было предложено в работах [9, 10]. В настоящее время стало понятно, что NURBS можно использовать для описания физических соотношений при расчетах нелинейных деформаций.

Авторы данной статьи предлагают способ записи уравнений состояния, позволяющий, в предположении справедливости гипотезы единой кривой [11] и в рамках теории малых упругопластических деформаций, с требуемой точностью описать влияние эффекта упругой разгрузки и скорости деформирования.

Описание закона деформирования в многомерном пространстве

Представление физических зависимостей с помощью NURBS

Неравномерный рациональный NURBS использует функции сопряжения, получаемые для неоднородных узлов. Представление NURBS удобно тем, что для него разработаны общие алгоритмы аналитического дифференцирования, интегрирования, вставки и удаления узлов и т. п. [6, 12, 13]. Ниже приведены краткие сведения, включающие используемые обозначения, необходимые для понимания предлагаемой методики.

NURBS-кривая представляется с помощью уравнения (1) [6]:

$$\bar{C}(u) = \frac{\sum_{i=0}^n N_{i,p}(u)w_i \mathbf{P}_i}{\sum_{i=0}^n N_{i,p}(u)w_i} \quad 0 \leq u \leq 1, \quad (1)$$

где \mathbf{P}_i — радиус-векторы опорных точек для построения опорного многоугольника; w_i — веса; $N_{i,p}(u)$ — базисными функции В-сплайна степени p , такие что

$$N_{i,0} = \begin{cases} 1, & \text{если } 0 \leq u < 1 \\ 0 & \text{иначе} \end{cases}$$

$$N_{i,p}(u) = \frac{u - u_i}{u_{i+p} - u_i} N_{i,p-1}(u) + \frac{u_{i+p+1} - u}{u_{i+p+1} - u_{i+1}} N_{i+1,p-1}(u). \quad (2)$$

здесь u_i — неотрицательные компоненты узлового вектора \mathbf{U} , расположенные по возрастанию:

$$\mathbf{U} = \left\{ \underbrace{0, \dots, 0}_{p+1}, u_{p+1}, \dots, u_n, \underbrace{1, \dots, 1}_{p+1} \right\}. \quad (3)$$

Криволинейная координата u точки кривой $C(u)$, лежащей внутри выпуклой оболочки опорных точек $\mathbf{P}_{i-p}, \dots, \mathbf{P}_i$ на кривой NURBS степени p , определяется по уравнению (4):

$$c_p u^p + c_{p-1} u^{p-1} + \dots + c_1 u + c_0 = 0, \quad (4)$$

коэффициенты которого рассчитываются по формулам

$$c_k = w_{i+k-p} (P_{i+k-p} - C(u)); \quad (5)$$

$$i = p, \dots, n; k = 0, \dots, p,$$

где P_{i+k-p}, \dots, P_i и $C(u)$ обозначают общую координату радиус-векторов опорных точек P_{i-p}, \dots, P_i и радиус-вектора точки на кривой $C(u)$.

Из найденных корней уравнения (4) выбираются те, которые удовлетворяют условию $u_i \quad u < u_i + 1$.

Однозначное определение напряжения по деформациям

Диаграмма одноосного растяжения-сжатия, получаемая при механических испытаниях образца материала, показывает зависимость напряжения от полной деформации образца. Однако полученная опытная зависимость напряжения от деформации не является взаимно однозначной в области пластических деформаций. Для однозначного определения зависимости напряжения от деформации необходимо оценить величину накопленной пластической деформации. При этом, важно отметить, что напряжение, соответствующее заданной деформации, может быть разным в зависимости от величины и знака предшествующей пластической деформации материала (рис. 1).

Поясним это утверждение на примере диаграмм деформирования стали У10 при температуре 623 К [14] (рис. 1, рис. 2). Приближение кривых деформирования с помощью NURBS третьей степени на рис. 2 было получено по точкам графиков, изображенных на рис. 1, с помощью алгоритма наилучшего приближения [6]. Номера кривых на рис. 2 соответствуют номерам кривых на рис. 1. Опорные точки NURBS показаны на рис. 2 кружками, а стороны опорных многоугольников — штриховой линией. Упругая деформация показана на рис. 2 штриховой линией.

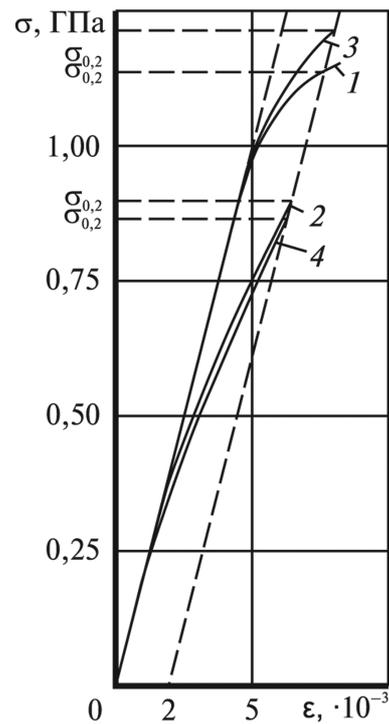


Рис. 1. Диаграммы деформирования стали У10 при 623 К: 1 — растяжение без предварительного деформирования; 2 — растяжение после сжатия до условного предела текучести; 3 — сжатие без предварительного деформирования; 4 — сжатие после растяжения до условного предела текучести [14]

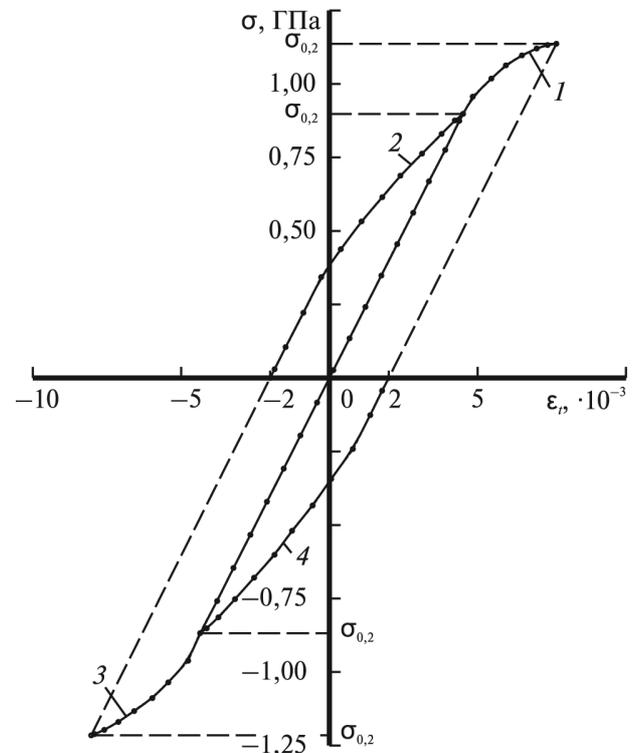


Рис. 2. Приближение диаграмм растяжения-сжатия стали У10 при 623 К [14] с помощью NURBS (1–4 см. рис. 1)

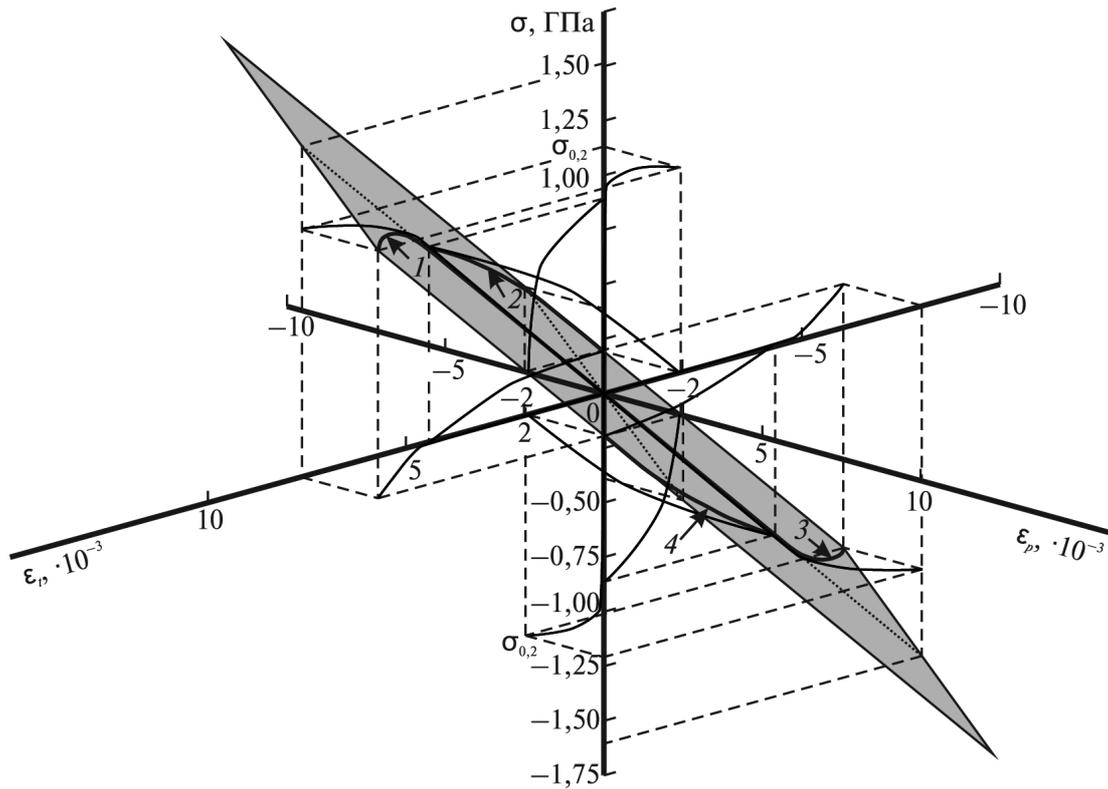


Рис. 3. Трехмерное представление зависимости напряжения от деформации стали У10 при 623 К с помощью NURBS [14]

Одному значению полной деформации на рис. 2 может соответствовать несколько значений напряжения. Чтобы однозначно определить напряжение, возникающее в материале, удобно выразить напряжения через полную и пластическую деформации, измеряемые непосредственно при механических испытаниях образцов. В случаях нелинейной зависимости напряжения от упругой деформации материала кривые деформирования, изображенные в трех координатах — напряжения, пластической и полной деформаций — обладают переменным кручением. Поэтому NURBS-кривая третьей степени является простейшей, позволяющей построить сколь угодно точное приближение кривой деформирования общего вида.

Для стали приближения зависимости напряжения от полной и пластической деформации с помощью NURBS-кривых являются плоскими кривыми, лежащими на NURBS-поверхности первой степени (рис. 3), что объясняется линейной зависимостью напряжения от упругой деформации. Пересечение построенной NURBS-поверхности (для стали — плоскости) с плоскостью $0\epsilon_p\sigma$ соответствует упругому де-

формированию, с плоскостью $0\epsilon_p\sigma$ — изменению предела текучести вследствие эффекта Баушингера, а с плоскостью $0\epsilon_p\epsilon_p$ — идеальному пластическому течению, при котором упругая деформация отсутствует, а бесконечно малое напряжение вызывает увеличение пластической деформации материала. Проекции NURBS-кривых на плоскость $0\epsilon_p\sigma$ совпадают с диаграммами зависимости напряжения от деформации, получаемыми при механических испытаниях материала, проекции на плоскость $0\epsilon_p\sigma$ — с диаграммой упрочнения, а проекции на плоскость $0\epsilon_p\epsilon_p$ показывают изменение пластической составляющей в полной деформации материала при формоизменении.

Определение характеристик материала по трехмерной NURBS-диаграмме

Предел пропорциональности. Когда диаграмма растяжения-сжатия представлена с помощью двумерной или трехмерной NURBS-кривой, предел пропорциональности можно найти по определению [15] из условия (6):

$$\left. \left(\frac{\partial \varepsilon_i}{\partial u} \right) \right|_{u_{pl}} = 1,5 \left. \left(\frac{\partial \varepsilon_i}{\partial u} \right) \right|_{u_0} \quad (6)$$

где ε_i — полная деформация, сумма упругой и пластичной деформаций; u_{pl} — значение параметра, соответствующие пределу пропорциональности и нулевой деформации.

Предел пропорциональности для стали У10, определенный по NURBS кривым рис. 2 и рис. 3, при сжатии составляет $\sigma_{plc} = -979$ МПа ($u_{plc} = 0,1004$, $\varepsilon_{plc} = -0,04955$), а при растяжении — $\sigma_{pls} = 952$ МПа ($u_{pls} = 0,9217$, $\varepsilon_{pls} = 0,04856$). Полученные значения пределов пропорциональности находятся в хорошем соответствии со справочными данными для стали этой марки.

Модуль упругости

Для определения осредненного модуля упругости по диаграмме растяжения-сжатия, представленной с помощью NURBS кривой из уравнения (7), согласно стандартной методике [15], находится значение криволинейной координаты u_E , соответствующее $0,7\sigma_{pl}$:

$$\sigma(u_E) = 0,7\sigma_{pl} \quad (7)$$

По известному значению u_E вычисляется осредненный модуль упругости E :

$$E = \frac{0,7\sigma_{pl}}{\varepsilon(u_E)} \quad (8)$$

Модуль упругости, найденный по уравнениям (7), (8) по NURBS-кривым деформации из исходного состояния (см. рис. 2, рис. 3) для стали У10, при сжатии составляет $E = 2,00 \cdot 10^5$ МПа ($u_E = 0,22545$, $\varepsilon_E = -0,00343$), при растяжении $E = 1,99 \cdot 10^5$ МПа ($u_E = 0,80005$, $\varepsilon_E = 0,00335$).

Производная напряжения по полной деформации в каждой точке участка упругого деформирования материалов, вычисленная по формуле

$$E = \frac{\partial \sigma}{\frac{\partial \varepsilon_i}{\partial u}}, \quad (9)$$

имеет размерность удельной энергии упругой деформации и совпадает с модулем упругости при линейном законе упругого деформирования.

Построение трехмерной NURBS-диаграммы по известным характеристикам материала

NURBS-приближение зависимости напряжения от деформации можно построить не только по известной диаграмме растяжения-сжатия, но и, менее точно, по таким априори известным характеристикам материала как модуль упругости, предел текучести, предел прочности и показатель деформационного упрочнения.

Построение трехмерной зависимости напряжения от деформации выполняется за два шага. На первом шаге строится NURBS-приближение зависимости напряжения от полной деформации, откуда определяется участок упругого деформирования. На втором шаге определяются значения ε_p , с учетом которых строится трехмерная зависимость напряжения от деформации.

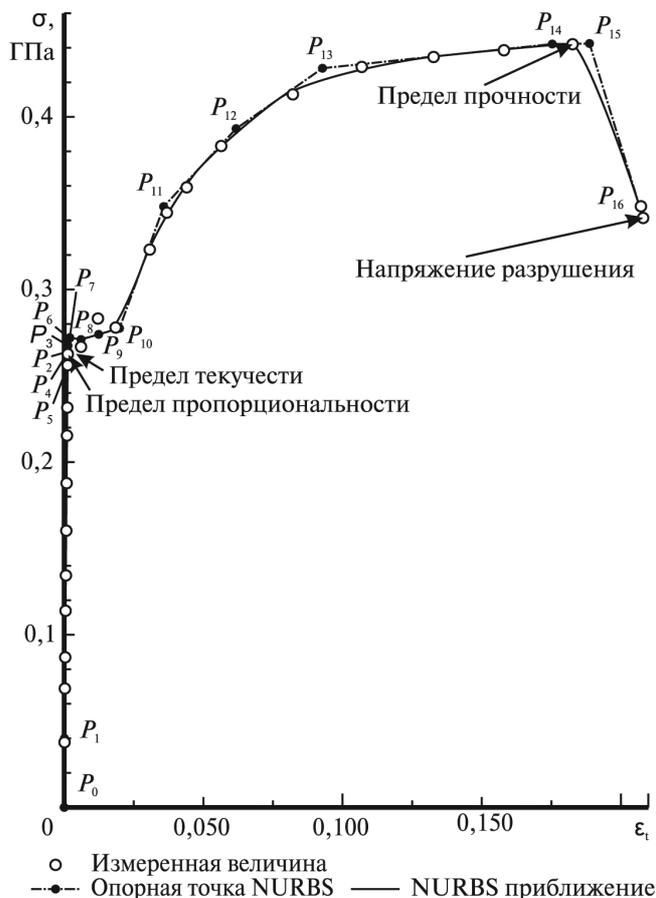
Наглядным примером пластичного конструкционного материала является мягкая малоуглеродистая сталь. На упругом участке диаграммы растяжения малоуглеродистой мягкой стали [16], показанном на рис. 4, видно, что напряжение возрастает с увеличением деформации не строго линейно. Вблизи нулевых деформаций отклонение измеренной величины напряжения от линейного закона достигает 20 МПа. Более точным на всем отрезке деформирования от нуля до напряжения текучести является нелинейное приближение упругого участка диаграммы растяжения [16] с помощью кривой NURBS третьей степени, показанное на рис. 4 штрихпунктирной с двумя точками линией.

Использование NURBS позволяет не только построить приближение упругого участка, но



Source of data: Donald S. Clark, Engineering Materials and Processes, International Textbook Co., Scranton PA, 1962, p. 35.

Рис. 4. Приближение NURBS упругого участка диаграммы растяжения малоуглеродистой мягкой стали по точкам [16, p. 35]



Source of data: Donald S. Clark, Engineering Materials and Processes, International Textbook Co., Scranton PA, 1962, p. 33.

Рис. 5. Построение NURBS диаграммы растяжения малоуглеродистой мягкой стали по точкам [16, p. 33]

и охватить участки течения и упрочнения одной непрерывной дифференцируемой в каждой точке кривой (рис. 5).

Представление с помощью NURBS диаграммы сжатия, дополняющее диаграмму растяжения, можно построить по справочным данным: модуль упругости $E = 1,93 \cdot 10^5$ МПа, предел упругости $\sigma_T = -267$ МПа, показатель деформационного упрочнения $n = 0,22$ [15] при сжатии со скоростью деформирования от $10^{-3} \dots 10^{-2} \text{ с}^{-1}$. Приняв для сжатия упругопластический закон деформирования со степенной зависимостью упрочнения от деформации

$$\sigma_i = \sigma_T (\varepsilon_i / \varepsilon_{iT})^n, \quad (10)$$

(где σ_i — интенсивность напряжения, ε_i — интенсивность деформации, а ε_{iT} — предельная интенсивность упругой деформации), можно построить NURBS-приближение диаграммы растяжения-сжатия, показанное на рис. 6, до предельной деформации сжатия, выбранной равной по абсолютной величине деформации разрыва при растяжении $\varepsilon_f = -0,2080$.

Тогда участок сжатия с деформациями от $-0,2080$ до 0 , описанный упругопластическим законом деформирования (10), можно заме-

нить NURBS-кривой с шестью опорными точками, а приближение всей диаграммы растяжения-сжатия малоуглеродистой мягкой стали непрерывной NURBS-кривой будет иметь 22 опорные точки, как показано на рис. 6.

Трехмерная зависимость напряжения от деформации малоуглеродистой мягкой стали с учетом ε_p показана на рис. 7. Исходя из гипотезы единой кривой [11], можно утверждать, что кривые деформирования при любой остаточной пластической деформации лежат на трехмерной NURBS-поверхности (см. рис. 7).

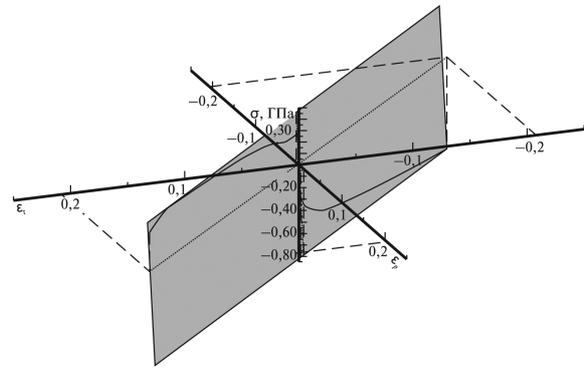


Рис. 7. Зависимость напряжения в малоуглеродистой мягкой стали от полной и пластической деформации

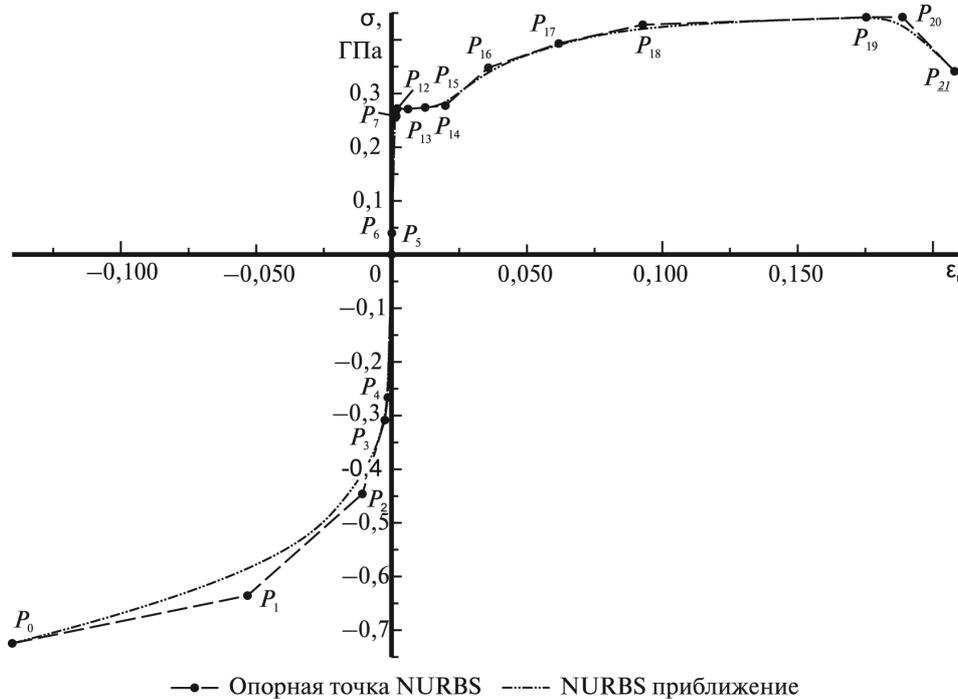


Рис. 6. NURBS-диаграмма растяжения-сжатия малоуглеродистой мягкой стали [16], дополненная участком сжатия с пластическим упрочнением по степенному закону [15]

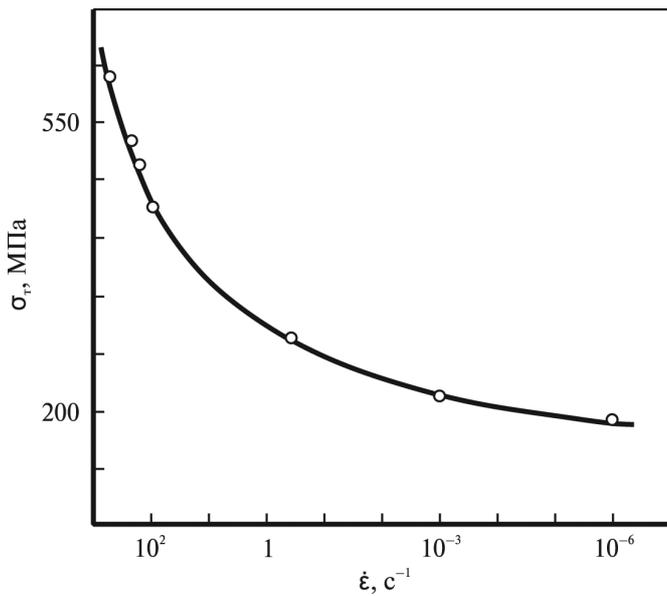


Рис. 8. Влияние скорости деформирования мягкой углеродистой стали на предел текучести [19]

Описание зависимости пластической деформации от скорости деформирования

Зависимость пластической деформации от скорости деформирования материала обычно описывают с помощью реологического уравнения Максвелла, Фойхта или Кельвина [17]. Однако эти уравнения не являются точными, поскольку в качестве постоянной в них используется время релаксации материала, которое само зависит от скорости деформирования [18]. Поэтому для инженерных расчетов часто используют эмпирическую зависимость предела текучести от скорости деформирования, пример которой показан на рис. 8.

Если принять за 1 предел текучести при скорости деформирования 10⁻³ с⁻¹, то можно построить зависимость коэффициента изменения предела текучести от скорости деформирования (рис. 9).

При принятии гипотезы единой кривой [11] коэффициент изменения предела текучести позволяет масштабировать координату σ опорных точек трехмерной NURBS-кривой, представляющей зависимость напряжения от полной и пластической деформации (см. рис. 6), и определять напряжение текучести с учетом

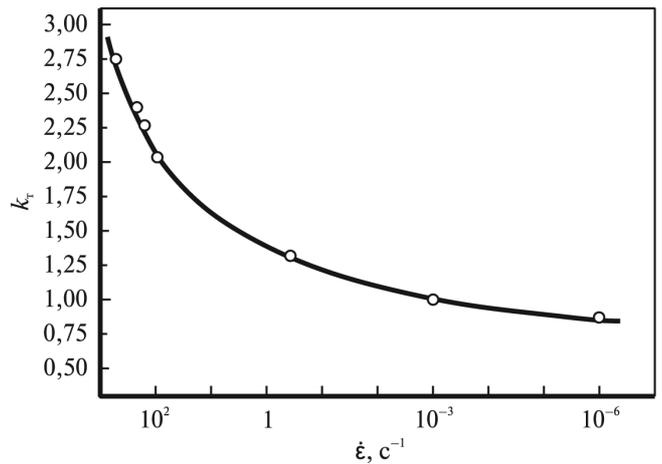


Рис. 9. Коэффициент изменения предела текучести мягкой углеродистой стали в зависимости от скорости деформирования

не только остаточной пластической деформации, но и скорости деформирования.

Кривую на рис. 9 можно приблизить степенным многочленом (11):

$$k_T = 0,6325\epsilon^{1,4} + 0,6244\epsilon^{0,15} + 0,7717, \quad (11)$$

где ϵ — деформация, происходящая за 1 с.

Другим приближением кривой на рис. 9 является NURBS третьего порядка с опорными точками $P_i(k_T, \epsilon)$: $P_0(10^{-6}; 0,86)$, $P_1(10^{-3}; 1,02)$, $P_2(10^{-1}; 1,55)$, $P_3(3,00 \cdot 10^1; 1,85)$, $P_4(1,15 \cdot 10^2; 2,1)$, $P_5(2,50 \cdot 10^2; 2,36)$, $P_6(5,1 \cdot 10^2; 2,75)$, и узловым вектором $U = (0; 0; 0; 0; 0,25; 0,5; 0,75; 1; 1; 1; 1)$.

NURBS-приближение и степенной многочлен (11) одинаково точны, но NURBS-приближение удобнее для определения скорости деформирования по величине k_T .

Выводы

Очевидное неудобство билинейной и степенной моделей, используемых при описании процессов упругопластического деформирования материала обусловлено их относительно невысокой точностью при описании нелинейного участка деформирования и наличия разрыва первого рода в точке диаграммы, соответствующей пределу текучести.

Для реализации современных численных алгоритмов расчета процессов нелинейного деформирования альтернативу традиционным

моделям может составить методика использования аппроксимации с помощью NURBS.

Использование NURBS позволяет с требуемой точностью описать упругую и пластическую области деформирования материала. С помощью NURBS-аппроксимации в трехмерном пространстве можно построить рациональные модели уравнений состояния для учета эффекта упругой разгрузки и влияния скорости деформирования.

Предложенную методику можно использовать при разработке алгоритмов и прикладных программ, предназначенных для анализа технологических процессов упругопластического деформирования металлов.

Литература

1. *Малинин Н.Н.* Прикладная теория пластичности и ползучести. М.: Машиностроение, 1975. 400 с.
2. *Хилл Р.* Математическая теория пластичности. М.: ГИТЛ, 1965. 407 с.
3. *Фрейтаг В.А.* Аналитическая аппроксимация диаграмм растяжения металлов // Труды Ленинградского научно-исследовательского и конструкторского института химического машиностроения. Вопросы прочности химической аппаратуры. 1974. № 8. С. 204—218.
4. *El-Danaf E.A.* Study of Bauschinger Effect by Reverse Shearing of 70:30 Brass // J. King Saud University. 2006. V. 19. No. 1. P. 83—94.
5. *Столяров В.В.* Эффект Баушингера в ультрамелкозернистых металлах // Вестник научно-технического развития. 2009. Т. 19. № 3. С. 52—58.
6. *Piegl L., Tiller W.* The NURBS Book. New York: Springer-Verlag, 1995. 646 с.
7. *Роджерс Д., Адамс Д.* Математические основы машинной графики. М.: Мир, 2001. 604 с.
8. *Лу К.* Основы САПР (CAD, CAM, CAE). СПб: Питер, 2004. 560 с.
9. *Bridgens B. N., Gosling P. D.* NURBS representation of coated woven fabric behaviour // Proceedings of the sixth conference on Computational structures technology. Civil-Comp. press, 2002. P. 219—220.
10. *Bridgens B. N., Gosling P. D.* Direct stress-strain representation for coated woven fabrics // Computers & Structures. 2004. V. 82. N 23—26. P. 1913—1927.
11. *Людвик П.* Основы технологической механики // Расчеты на прочность. М.: Машиностроение, 1971. С. 132—166.
12. *Hughes T. J. R., Reali A., Sangalli G.* Efficient quadrature for NURBS-based isogeometric analysis // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. 2010. V. 199. N 5—8. P. 301—313.
13. *Tiller W.* Knot-removal algorithms for NURBS curves and surfaces // Computer-Aided Design. 1992. V. 24. N 8. P. 445—453.
14. *Троценко В.Т.* Деформирование и разрушение металлов при многоцикловом нагружении. Киев: Наукова думка, 1981. С. 139.
15. Межгосударственный совет по стандартизации, метрологии и сертификации ГОСТ 25.503—97 «Расчеты и испытания на прочность. Методы механических испытаний металлов. Метод испытания на сжатие». М.: Госстандарт России, 1999.
16. *Clark D.S.* Engineering Materials and Processes. Scranton PA: International Textbook Co, 1962. 594 p.
17. *Зубчанинов В.Г.* Основы теории упругости и пластичности: учебник для машиностроительных специальностей вузов. М.: Высш. шк., 1990. 368 с.
18. *Godunov S.K., et al.* Interpolation formulas for Maxwell viscosity of certain metals as a function of shear-strain intensity and temperature // Journal of Applied Mechanics and Technical Physics. 1974. V. 15. N 4. P. 526—529.
19. *Pearce R.* Sheet Metal Forming. Bristol: Adam Hilger, 1991. 300 p.

Статья поступила в редакцию 15.04.2011 г.